

آیا $\sqrt{2}$ عددی گویا است؟

در دبیرستان برای شما ثابت خواهند کرد که $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست، یعنی کسری متعارفی نمی‌توان یافت که مساوی $\sqrt{2}$ باشد. به طور کلی ثابت می‌شود که اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، \sqrt{n} عددی گویا نیست. مثلاً اعداد $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{6}$ گویا نیستند.

این مطلب نشان می‌دهد که روی محور نقاطی هست که طول آنها عددی گویا نیست. این نقاط عددهایی را نمایش می‌دهند که عددهای اصم نامیده می‌شوند. مجموعه تمام عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه اعداد حقیقی می‌نامیم.

کاردرکلاس



۱. به شکل مقابل دقت کنید.

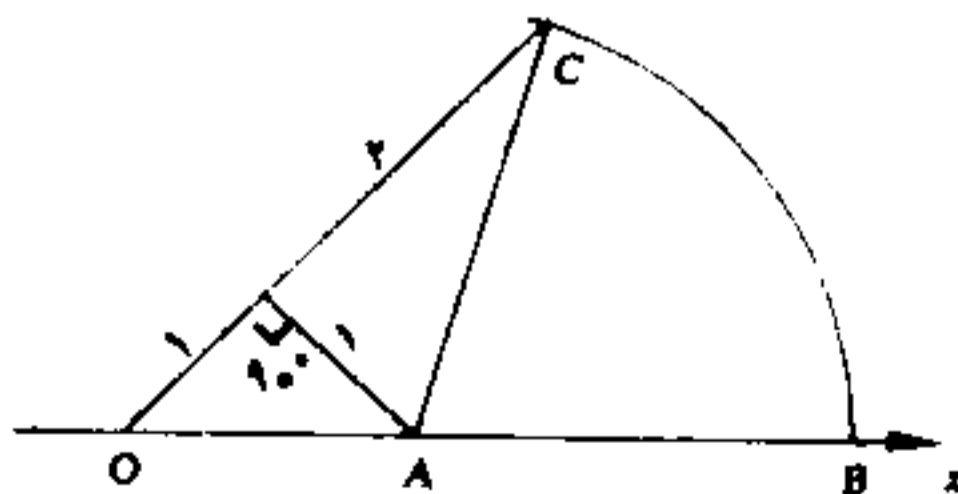
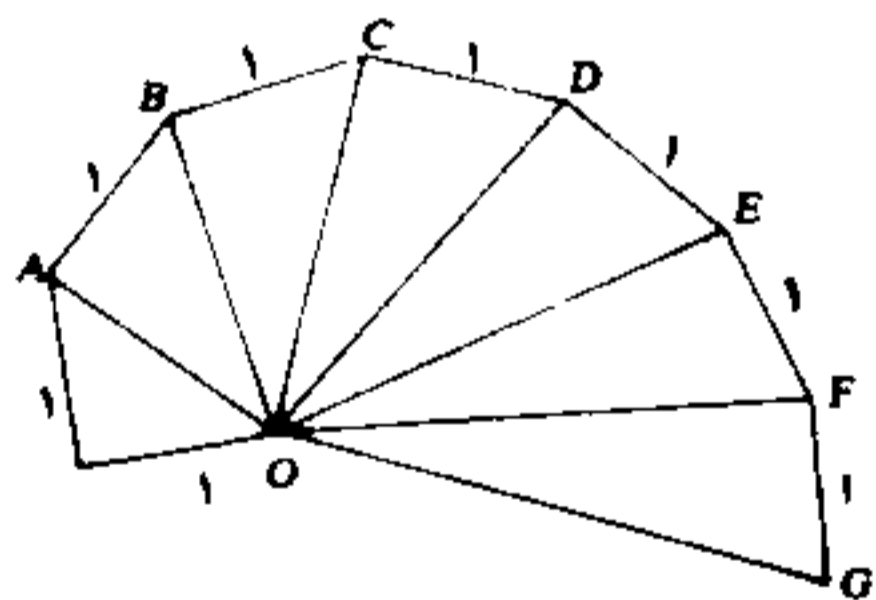
طول پاره‌خطهای OA و OB

را حساب کنید.

$$OA = \quad OB =$$

هر یک از نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهند؟

۲. در شکل سمت راست تعدادی مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. که در هر کدام یک ضلع زاویه قائمه به ضلع OA واحد است. طول پاره‌خطهای OA ، OB ، OC ، ... را حساب کنید و کنار آنها بنویسید.



۳. در شکل سمت چپ به مرکز A و شعاع AC

یک دایره زده‌ایم تا محور Ox را در نقطه B قطع

کند. نقطه B چه عددی را نمایش می‌دهد؟

در صفحه قبل دیدید که هر نقطه از محور یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد. اعداد گویا هم از جمله اعداد حقیقی هستند. مجموعه اعداد حقیقی را با حرف R نمایش می‌دهیم. بنابراین

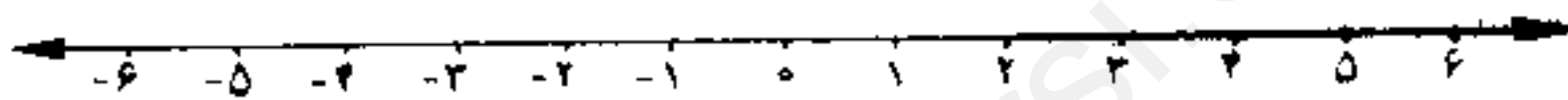
$$1 \in R \quad -5 \in R \quad \sqrt{2} \in R \quad -\frac{3}{5} \in R \quad \pi \in R$$

مجموعه اعداد حقیقی شامل تمام اعدادی است که تاکنون با آنها آشنا شده‌اید.

مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ۲ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$A = \{ x \mid x > 2 \}$$

نمودار زیر، نمایش این مجموعه را روی محور نشان می‌دهد.



هر یک از اعداد ۶، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{1}{4}$ به این مجموعه تعلق دارند. عدد ۲ و اعداد کوچکتر از ۲ عضو این مجموعه نیستند.

$$B = \{ x \mid -3 < x < 2 \} \quad \text{حالا فرض کنیم}$$

این مجموعه شامل اعداد حقیقی بین -۳ و ۲ است، یعنی هر عددی که از ۲ کوچکتر باشد و از -۳ بزرگتر، عضو این مجموعه است. نمودار این مجموعه به صورت زیر است.



با توجه به تعریف این مجموعه،

$$-2 \in B \quad , \quad \frac{1}{4} \in B \quad , \quad \sqrt{2} \in B \quad , \quad 0 \in B$$

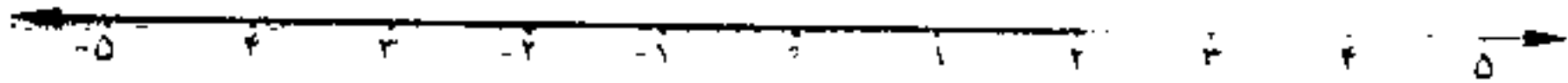
اما

$$-3 \notin B \quad , \quad -2 \notin B \quad , \quad 2 \notin B \quad , \quad \frac{3}{5} \notin B$$



کار در کلاس

۱. نمودار زیر، مجموعه $A = \{x \mid x < 2\}$ را نمایش می‌دهد.



درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$1 \in A$

$2 \in A$

$0 \in A$

$-2/3 \in A$

$2 \in A$

$0/3 \in A$

$\sqrt{2} - 1 \in A$

۲. در شکل زیر نمودار مجموعه $B = \{x \mid -1 \leq x\}$ داده شده است.

$-1 \leq x$ را بخوانند « x بزرگتر از یا مساوی با -1 است.»



درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$-1 \in B$

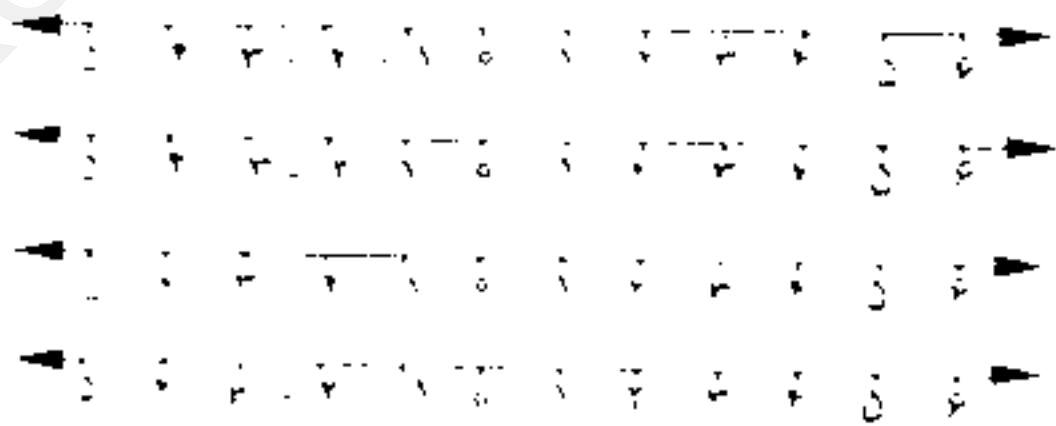
$2 \in B$

$-1/2 \in B$

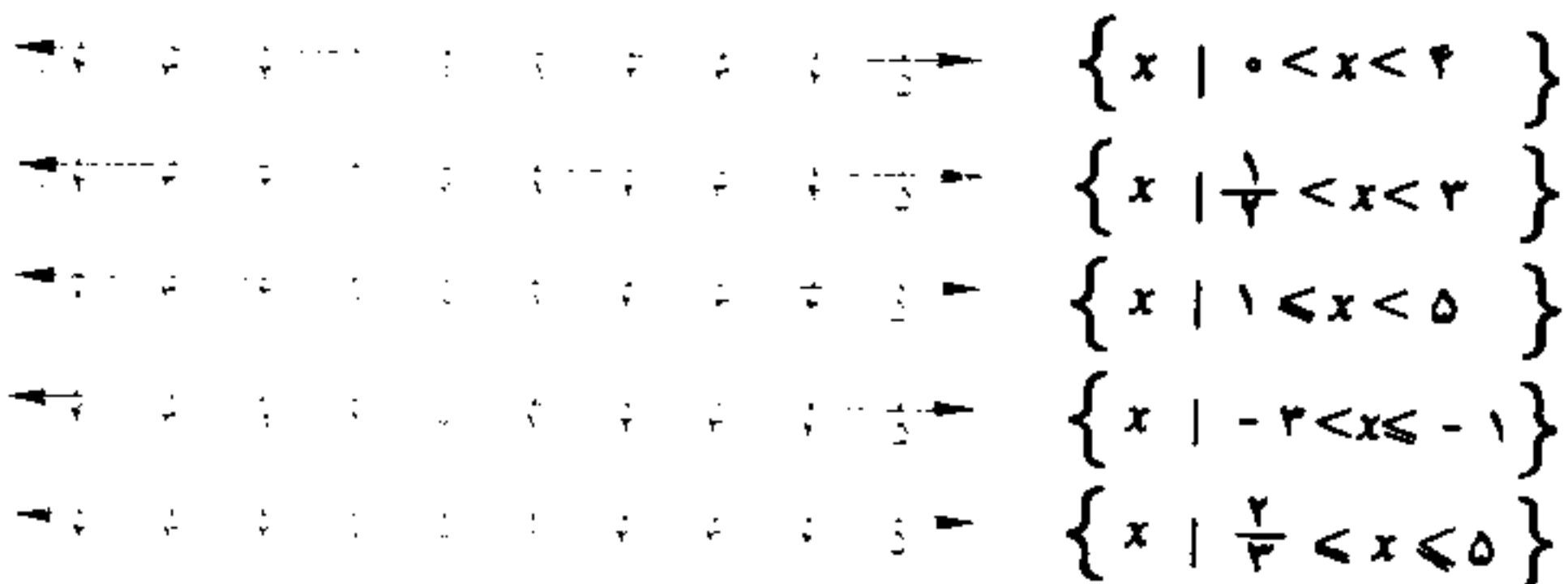
$0/9 \in B$

۳. نمایش هر مجموعه را روی محور مقابل آن مشخص کنید.

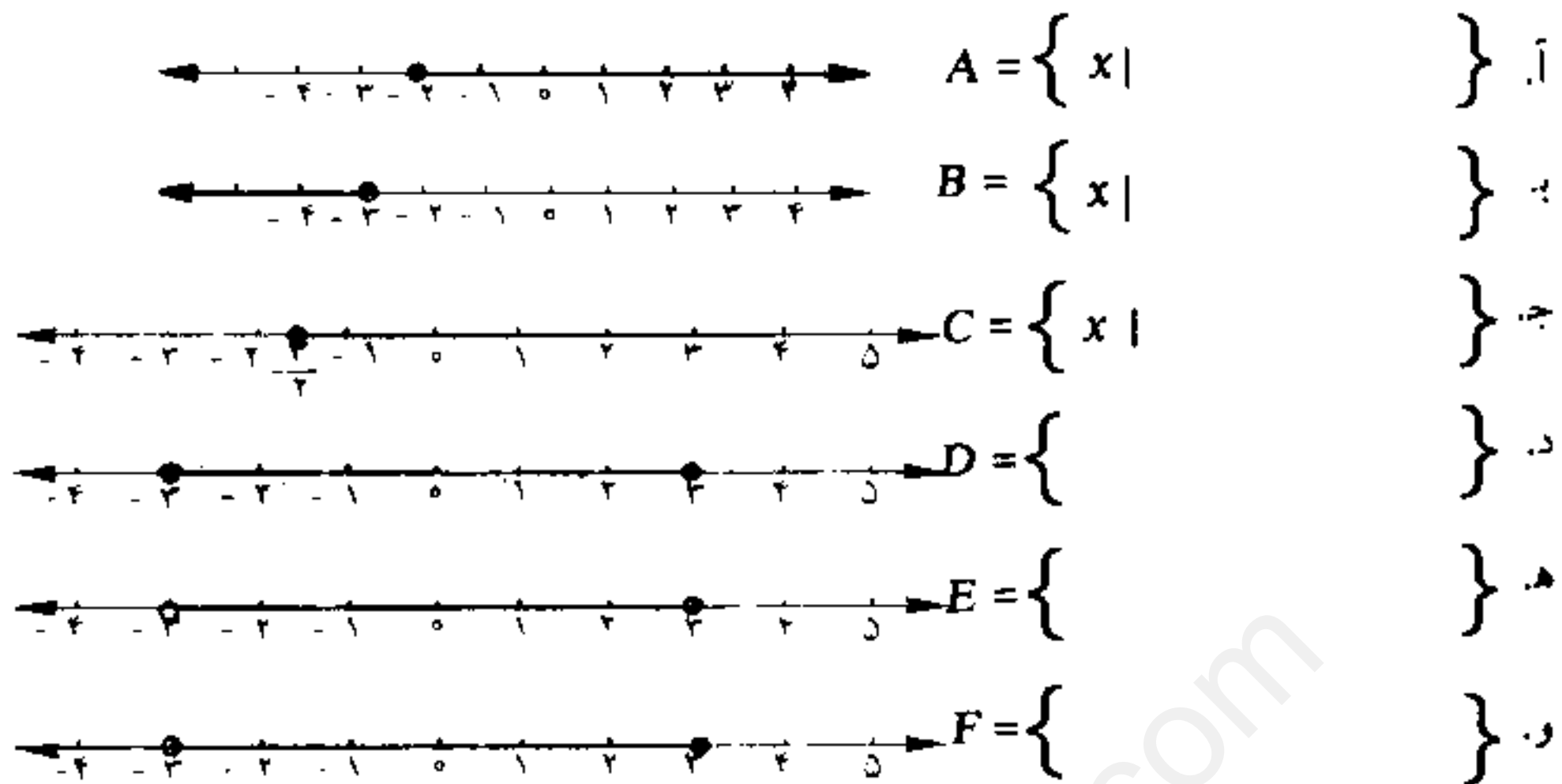
$$\begin{cases} \{x \mid x < -1\} \\ \{x \mid x \leq 3\} \\ \{x \mid 4 < x\} \\ \{x \mid -5 \leq x\} \end{cases}$$



۴. نمایش هر مجموعه را روی محور مقابل آن مشخص کنید.



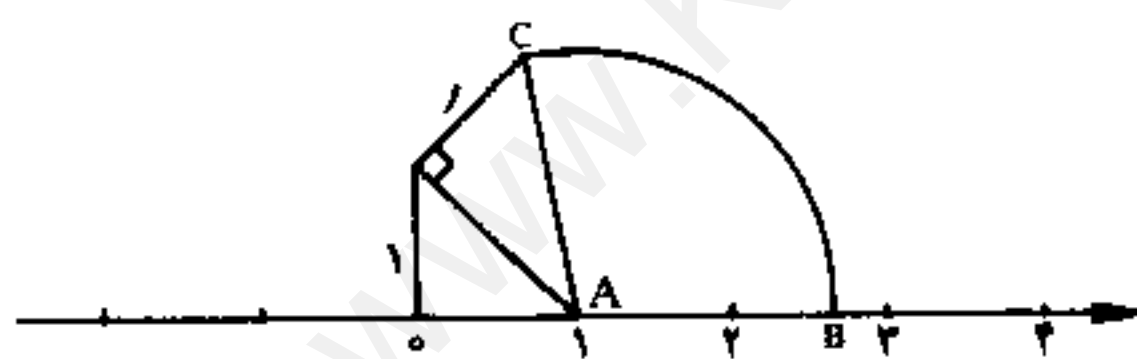
۵. مجموعه‌هایی را که مشخص شده‌اند بیان کنید.



۶. با توجه به تمرین قبل، درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$-2 \in A$	$-3 \in B$	$-\frac{3}{2} \in C$	$4 \in C$
$-3 \in D$	$2 \in E$	$-3 \in E$	$2 \in E$
$-4 \in F$	$1 \in F$	$\frac{1}{2} \in F$	$-\frac{1}{2} \in F$

تمرین



۱. در شکل مقابل، طول AC را حساب کنید. به مرکز A و شعاع AC یک دایره زده‌ایم تا محور را در نقطه B قطع کند. نقطه

B چه عددی را نمایش می‌دهد؟ آیا این عدد به مجموعه اعداد حقیقی مثبت تعلق دارد؟

۲. عدد $\sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ آیا این عدد به مجموعه $\{x \mid x > 3\}$ تعلق دارد؟

۳. نمایش هر یک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.

$$A = \{ x \mid -2 < x < 2 \}$$

$$B = \{ x \mid -1 < x < 3 \}$$

$$C = \{ x \mid x \leq 0 \}$$

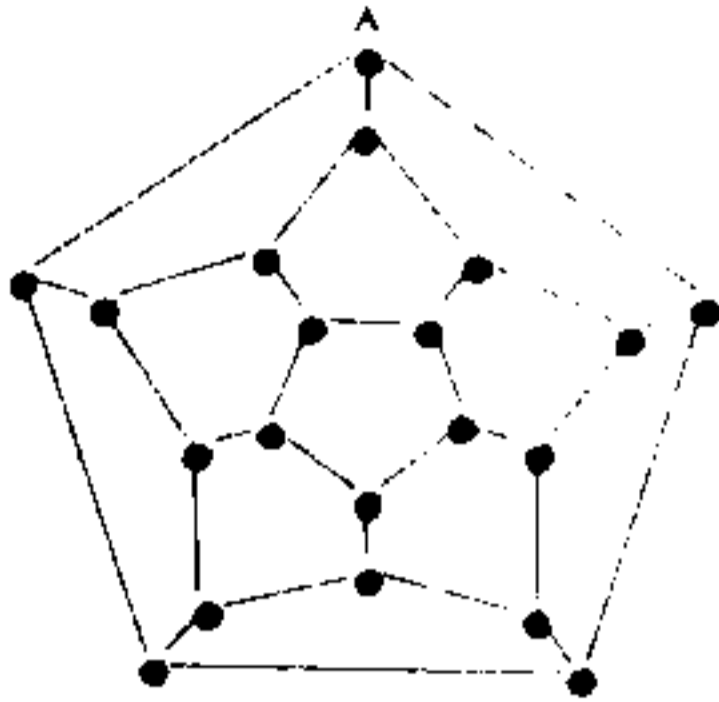
$$D = \{ x \mid x > 12 \}$$

$$E = \{ x \mid -2 < x < 2 \}$$

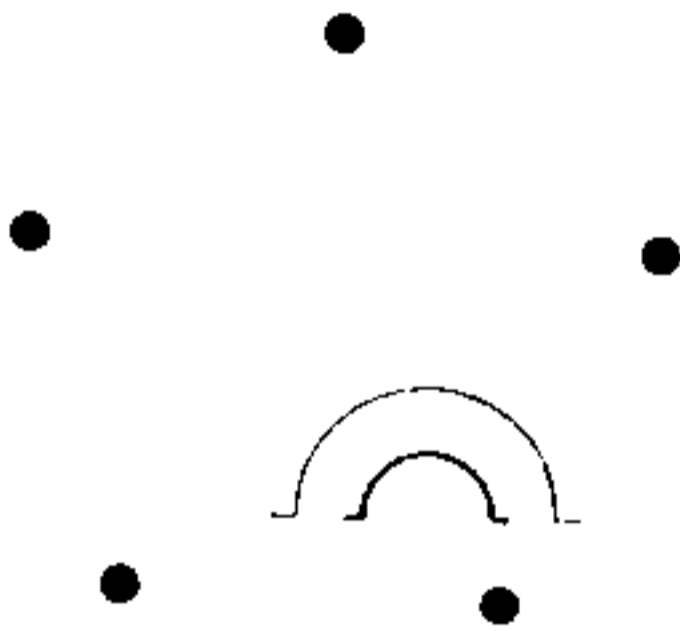
$$F = \{ x \mid 3 \leq x \}$$

فروشنده دوره گرد

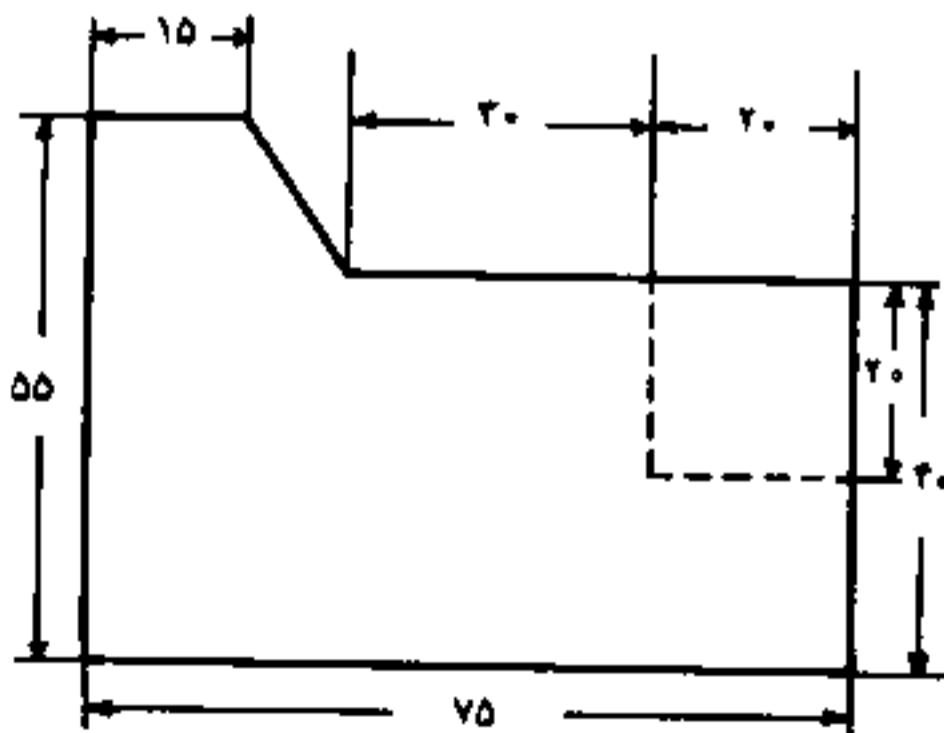
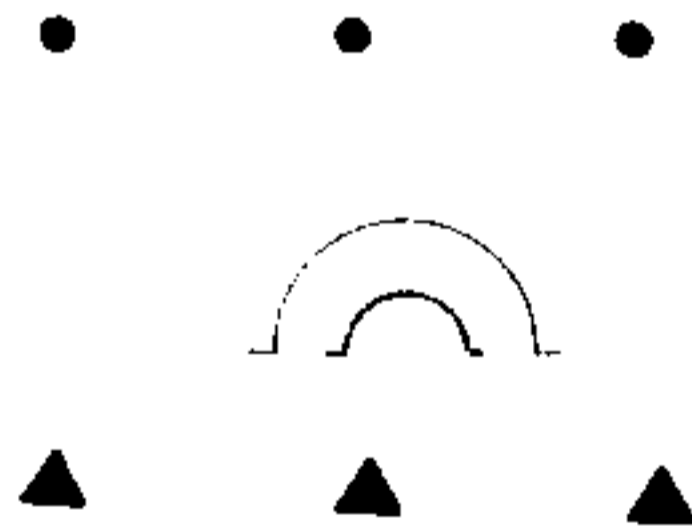
شکل مقابل نقشه ۲۰ خانه روستایی و راههای بین آنها را نشان می دهد. یک فروشنده دوره گرد می خواهد هر روز از خانه A شروع کند و مسیری را طی کند که از هر خانه یک بار بگذرد و بیش از یک بار هم نگذرد و سرانجام به نقطه A بازگردد. مسیر او را مشخص کنید. هر ● یک خانه روستایی را نشان می دهد.



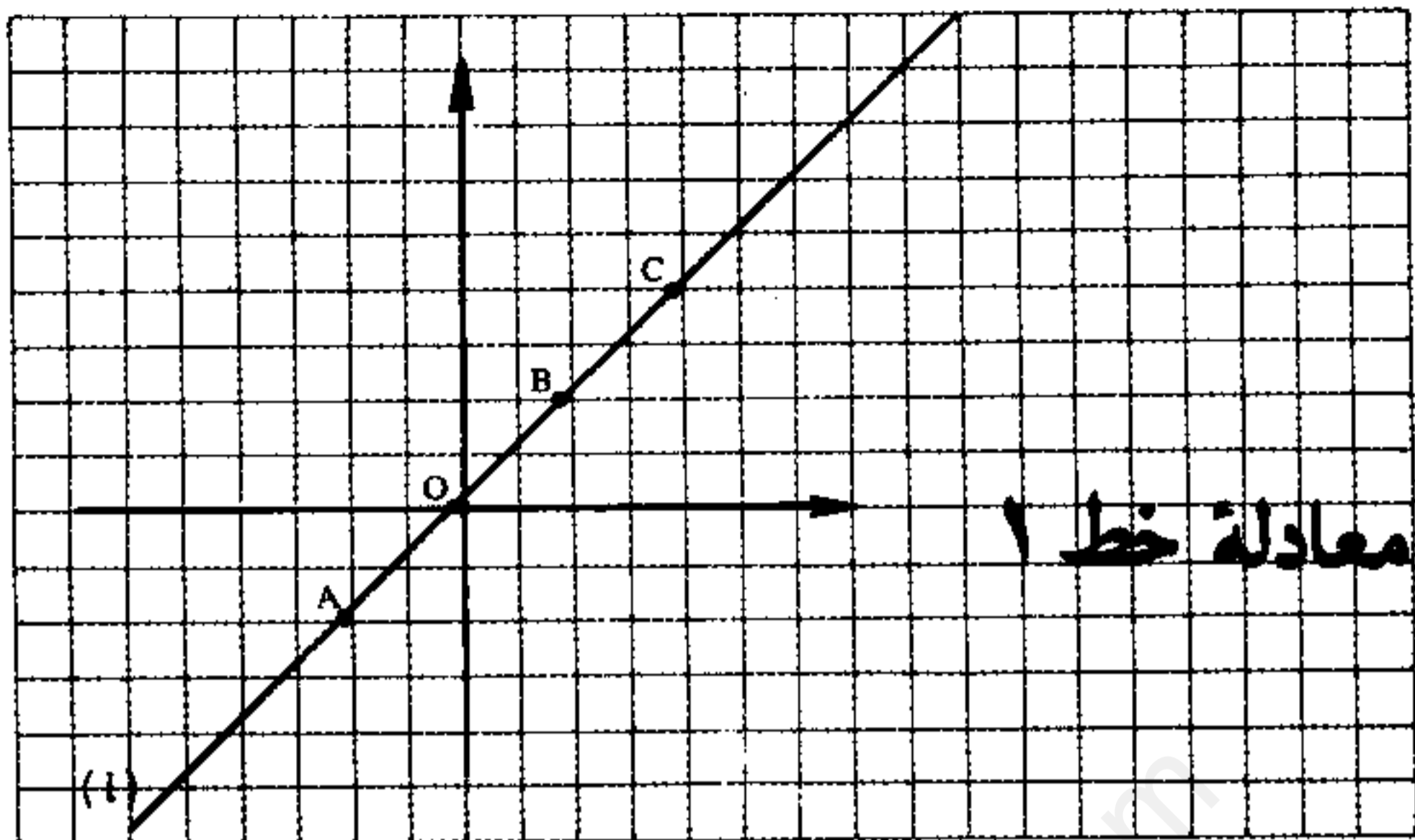
در شکل مقابل هر ● یک شهرک است. می خواهیم بین هر دو شهرک یک جاده بکشیم، به طوری که هیچ دو جاده ای تقاطع نداشته باشند. با استفاده از پل، نقشه راهها را رسم کنید.



هر ● نماینده یک معدن است و هر ▲ نماینده یک کارخانه. می خواهیم از هر معدن جاده ای به هر یک از کارخانه ها بکشیم، به طوری که هیچ دو جاده همدیگر را قطع نکنند. نقشه جاده ها را تهیه کنید.



رسم شکل مقابل را با اندازه های داده شده رسم کنید و مانند همین شکل اندازه گذاری کنید. اندازه ها بر حسب میلیمتر هستند.



به خط l توجه کنید. نقاط

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

روی این خط قرار دارند. با توجه به مختصات این نقاط، متوجه می‌شویم که عرض هر نقطه مساوی طول آن نقطه است. اگر طول نقاط را x و عرض آنها را y بنامیم، طول و

عرض هر نقطه از خط l در رابطه

$$y = x$$

صدق می‌کند.

نقطه‌ای روی خط l انتخاب کنید و آن را D بنامید $D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$.

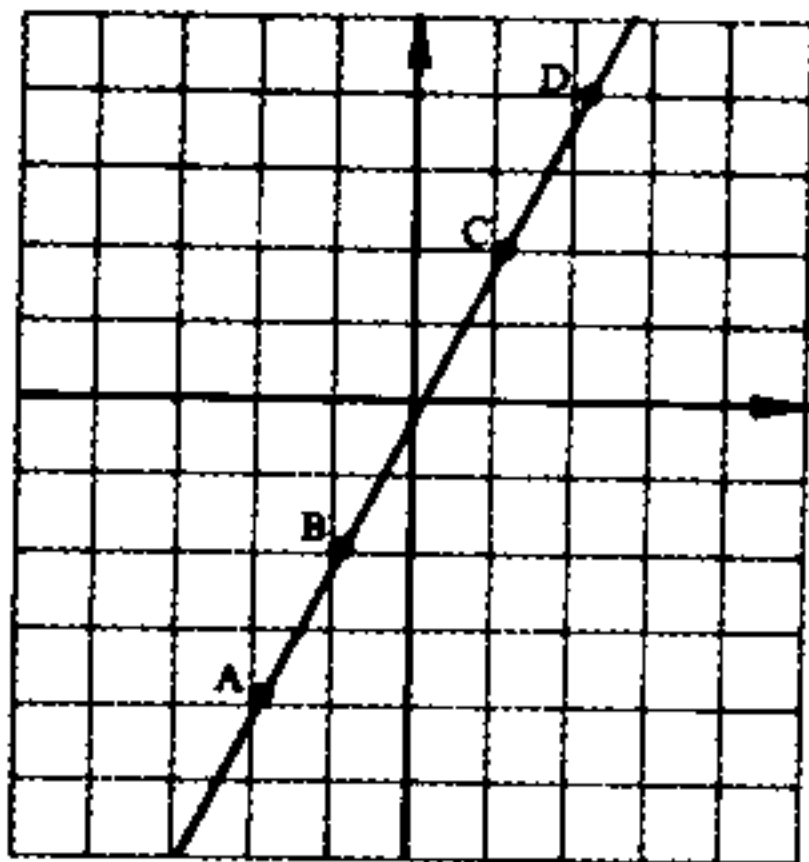
ملاحظه می‌کنید که مختصات D هم در رابطه بالا صدق می‌کند.

رابطه $y = x$ را معادله خط l می‌نامیم.



(رنه دکارت ۱۵۹۶ - ۱۶۵۰ م)

رنه دکارت یک فیلسوف و ریاضی‌دان بوده است. او در تفکر و استدلال شیوه جدیدی را بنیانگذاری کرد و در آموزش علم روشی نو بکار برد. دکارت معتقد بود که انسان بر تحصیل علم به معنی درک حقیقت و معلوم ساختن مجهولات خود توانایی دارد او ریاضیات را نمونه کامل علم می‌دانست و می‌گفت در تمام رشته‌ها باید از راه ریاضی به مطالعه پرداخت. دکارت با بکار بردن جبر در هندسه و حل مسائل هندسه با روشهای جبری هندسه تحلیلی را به وجود آورد. مختصاتی که ما برای نقاط بکار می‌بریم به نام او مختصات دکارتی نامیده می‌شود.



۱. به نمودار مقابل توجه کنید.

آ. مختصات نقاط زیر از خط را پیدا کنید.

$$A = \left[\quad \right] \quad B = \left[\quad \right]$$

$$C = \left[\quad \right] \quad D = \left[\quad \right]$$

ب. عرض هر یک از این نقاط چند برابر طول آن است؟

ج. یک نقطه روی خط انتخاب کنید و آن را M بنامید. مختصات M را بنویسید $M = \left[\quad \right]$

عرض این نقطه چند برابر طول آن است؟

د. اگر مختصات نقطه‌ای دلخواه از خط را $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بگیریم، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟

ه. معادله این خط چیست؟

۲. اکنون نمودار روبرو را در نظر بگیرید.

آ. دو نقطه روی خط انتخاب نموده و آنها را A و

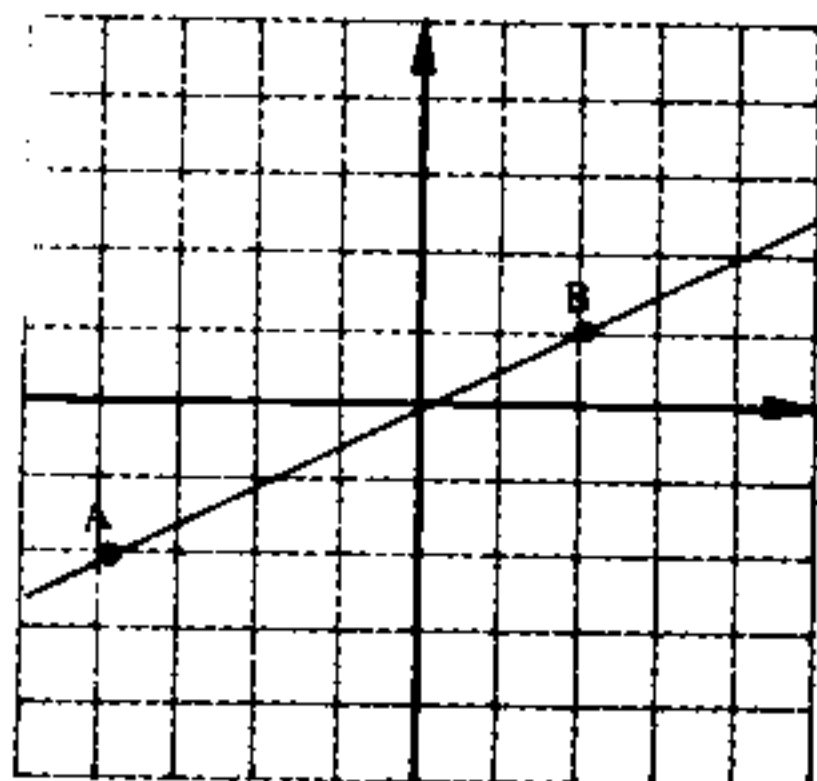
B نامیده‌ایم. مختصات این نقاط را بنویسید.

$$A = \quad B =$$

ب. عرض هر نقطه از خط چند برابر طول آن است؟

ج. اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مختصات نقطه‌ای دلخواه از

خط باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟



د. معادله این خط چیست؟

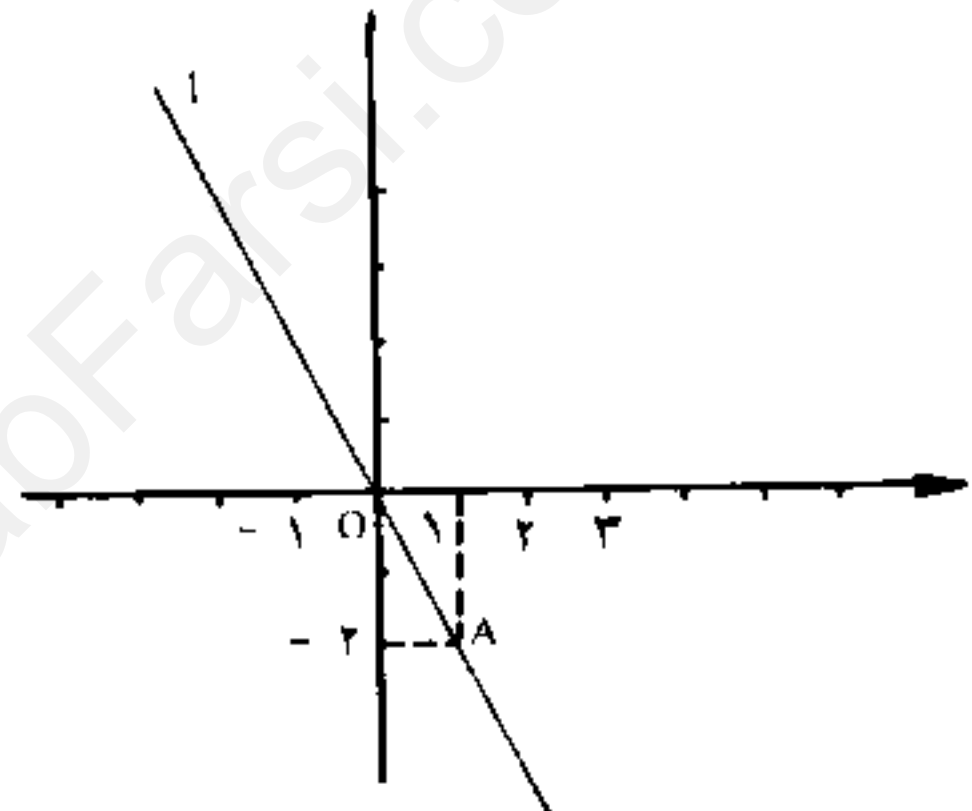
رسم خطی که معادله آن داده شده است
فرض کنیم معادله خط l به صورت

$$y = -2x$$

باشد. می‌خواهیم خط l را رسم کنیم. چون یک خط با دو نقطه‌اش مشخص می‌شود، پس دو نقطه از این خط را بدست می‌آوریم. به طور کلی اگر طول نقطه‌ای از آن خط x باشد، عرض آن نقطه $-2x$ است. پس مختصات هر نقطه از خط به صورت

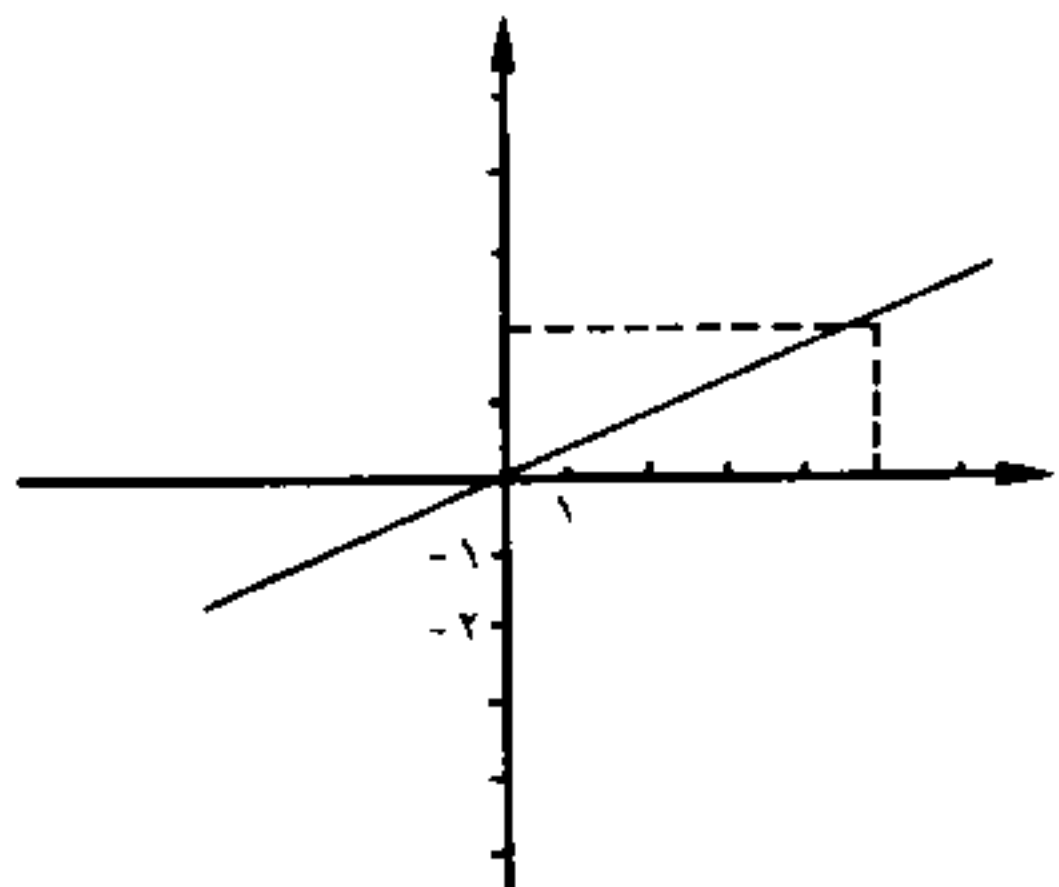
$\begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}$ است. اگر x را ۱ بگیریم، نقطه $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بدست می‌آید و اگر x را ۰ بگیریم، نقطه $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بدست می‌آید.

x	۰	۱
$y = -2x$	۰	-۲
$\begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$



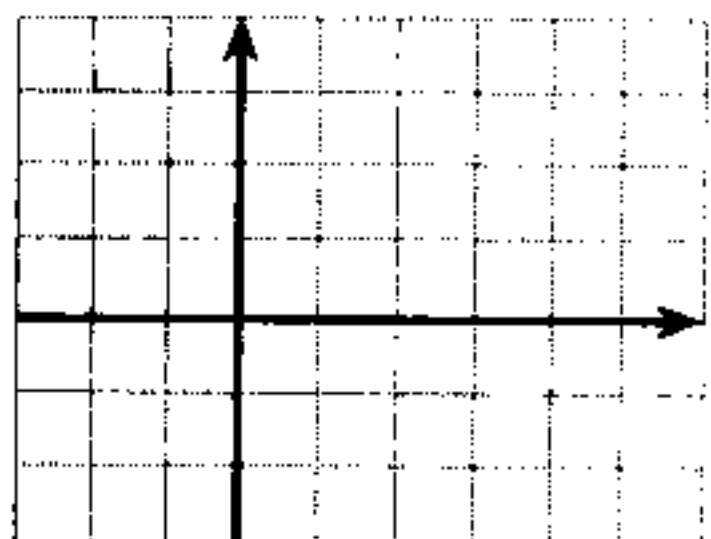
حالا خط d به معادله $y = \frac{2}{5}x$ را رسم می‌کنیم.

x	۰	۵
$y = \frac{2}{5}x$	۰	۲
$\begin{bmatrix} x \\ \frac{2}{5}x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

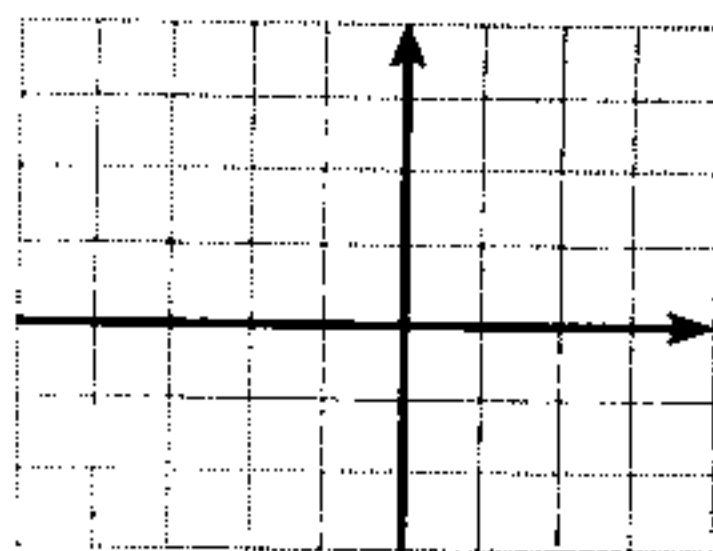




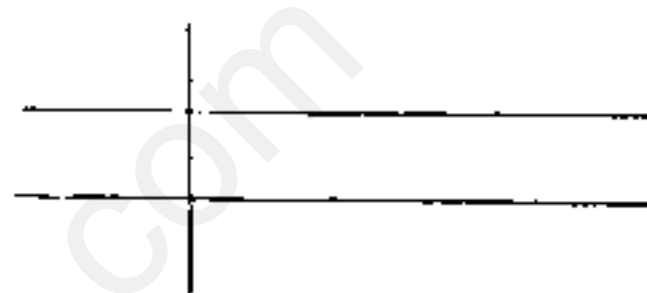
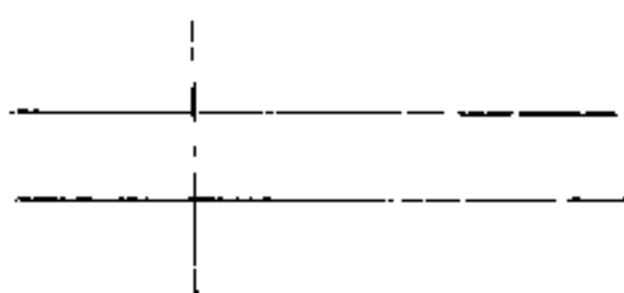
۱. خطهای زیر را رسم کنید.



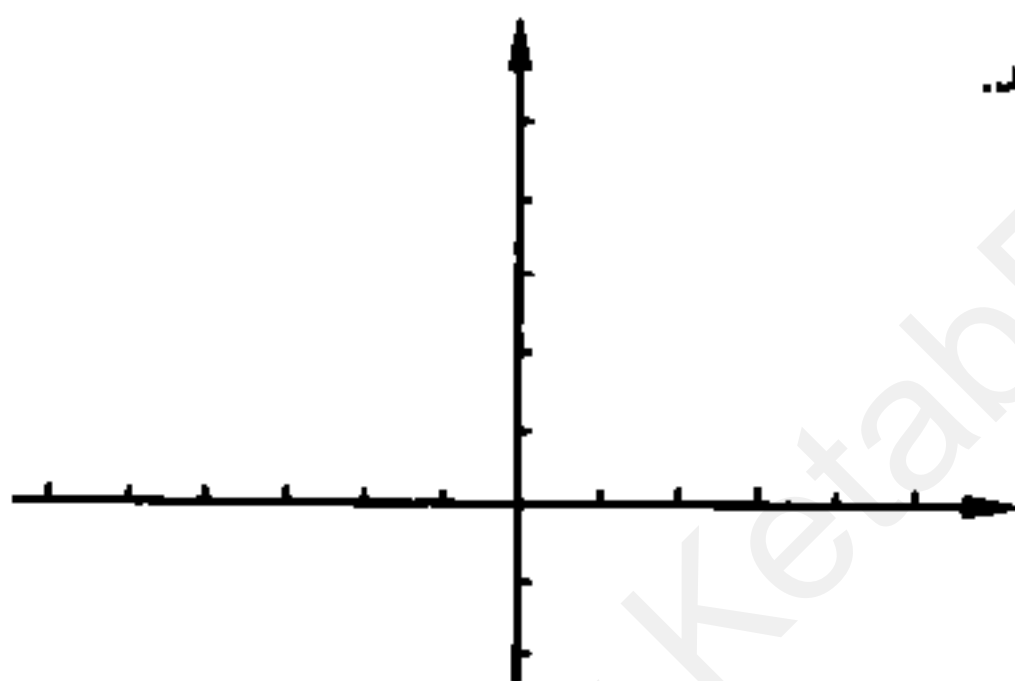
$$y = 3x$$



$$y = -\frac{3}{2}x$$



۲. در شکل روبرو، خطهای زیر را رسم کنید.



$$y = 4x$$

$$y = -\frac{1}{4}x$$



۳. مختصات نقطه‌ای از خط $y = 5x$ را پیدا کنید که طول آن ۲ باشد.

چرا؟

آیا نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟

۴. یک دستگاه مختصات رسم کنید و نقاط $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ را روی آن مشخص

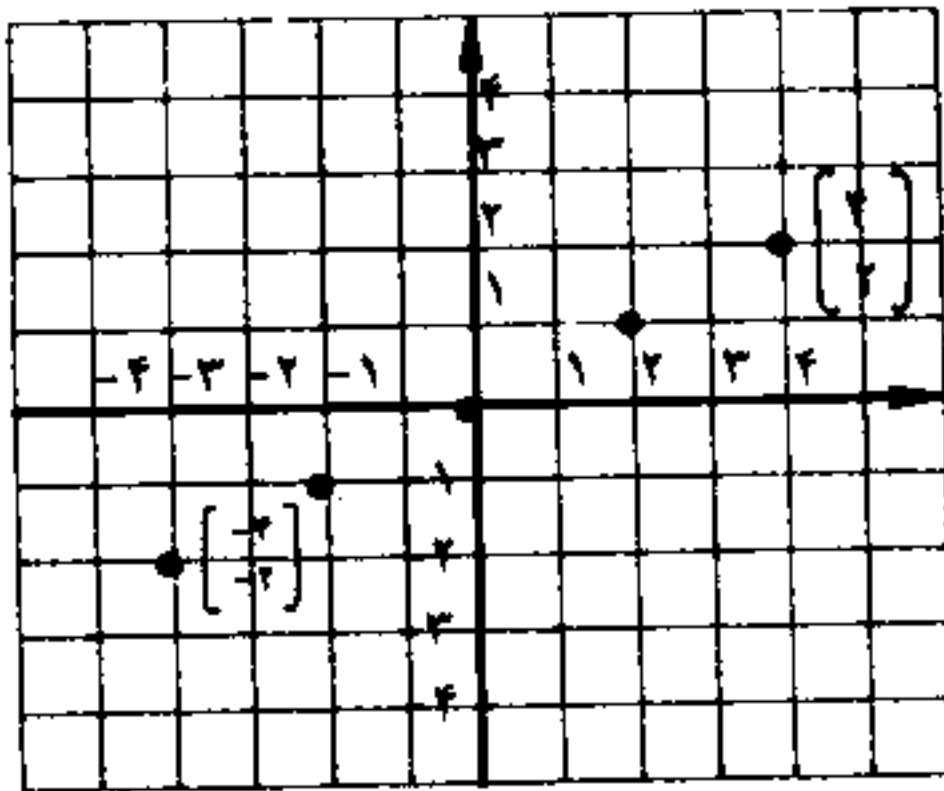
کنید. آیا نقاط A, O, B در یک امتداد قرار دارند؟ معادله خطی که از این نقاط می‌گذرد چیست؟

۵. یک دستگاه مختصات رسم کنید و نقاط $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ را روی آن مشخص

کنید. معادله خطی که از مبدأ مختصات و این دو نقطه می‌گذرد چیست؟

نمودار مجموعه‌ای از نقاط صفحه

در شکل مقابل، نمودار نقاط مجموعه

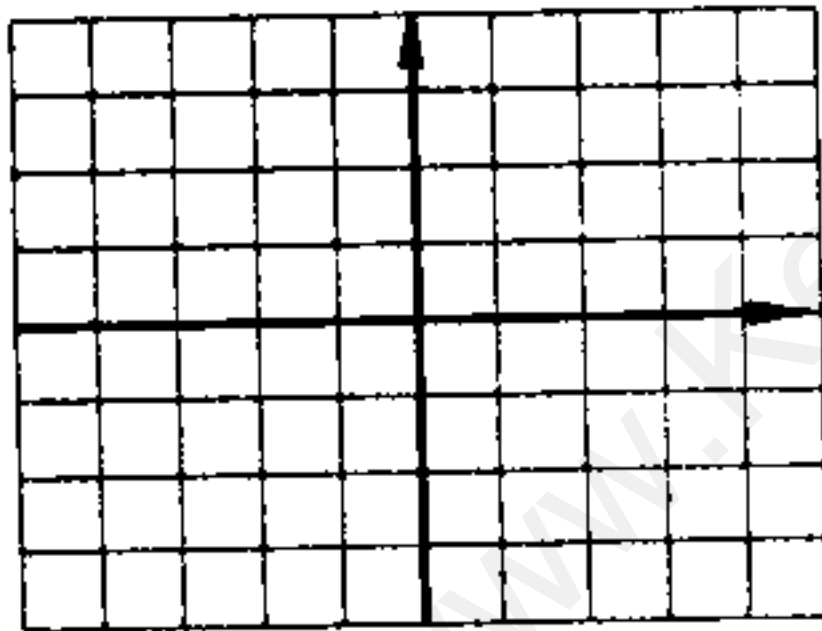


$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

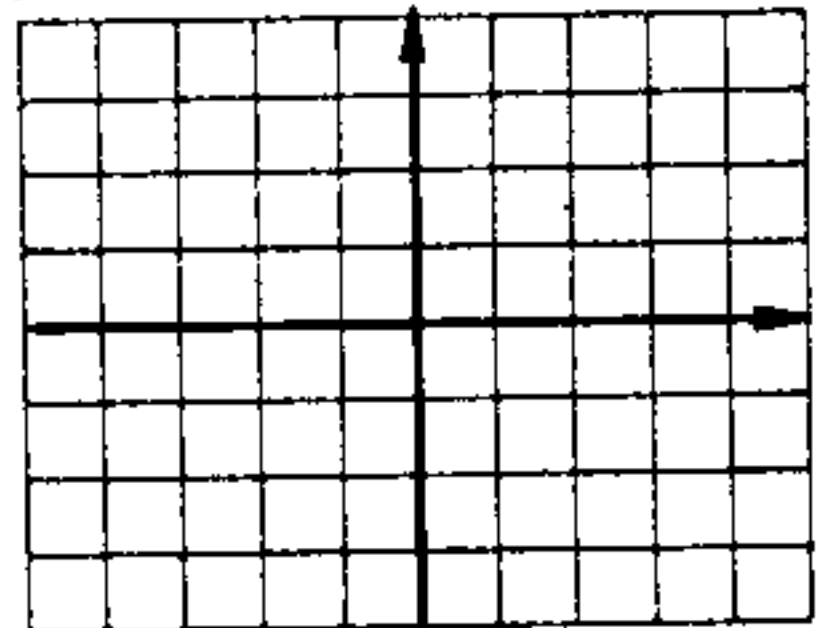
رسم شده است. این نقاط را بهم وصل کنید یک پاره خط بدست می‌آید.



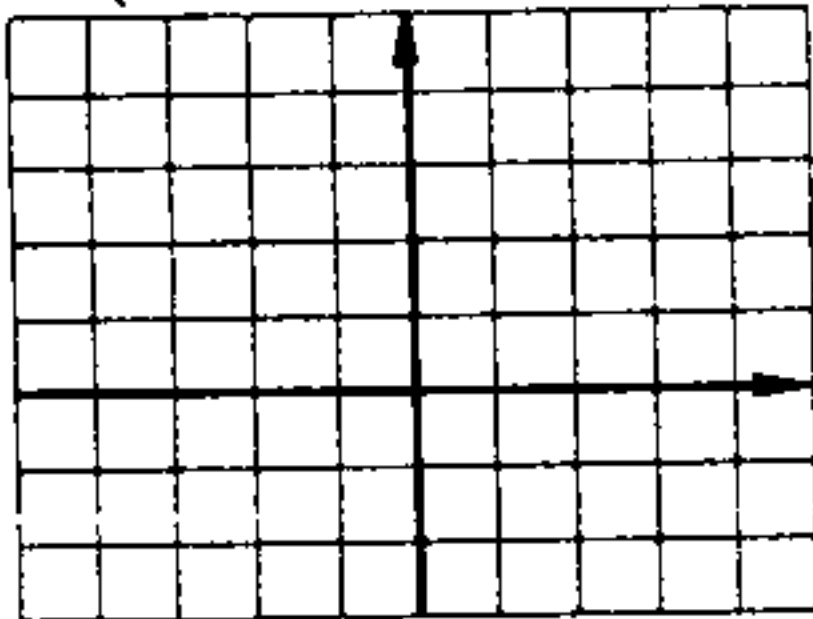
نمودار نقاط هر مجموعه را مشخص کنید.



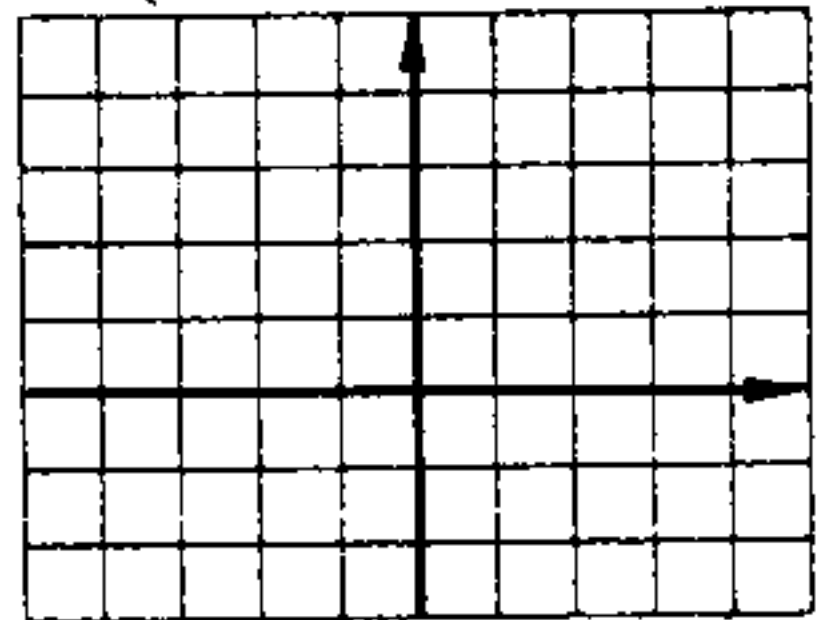
$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$



$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$



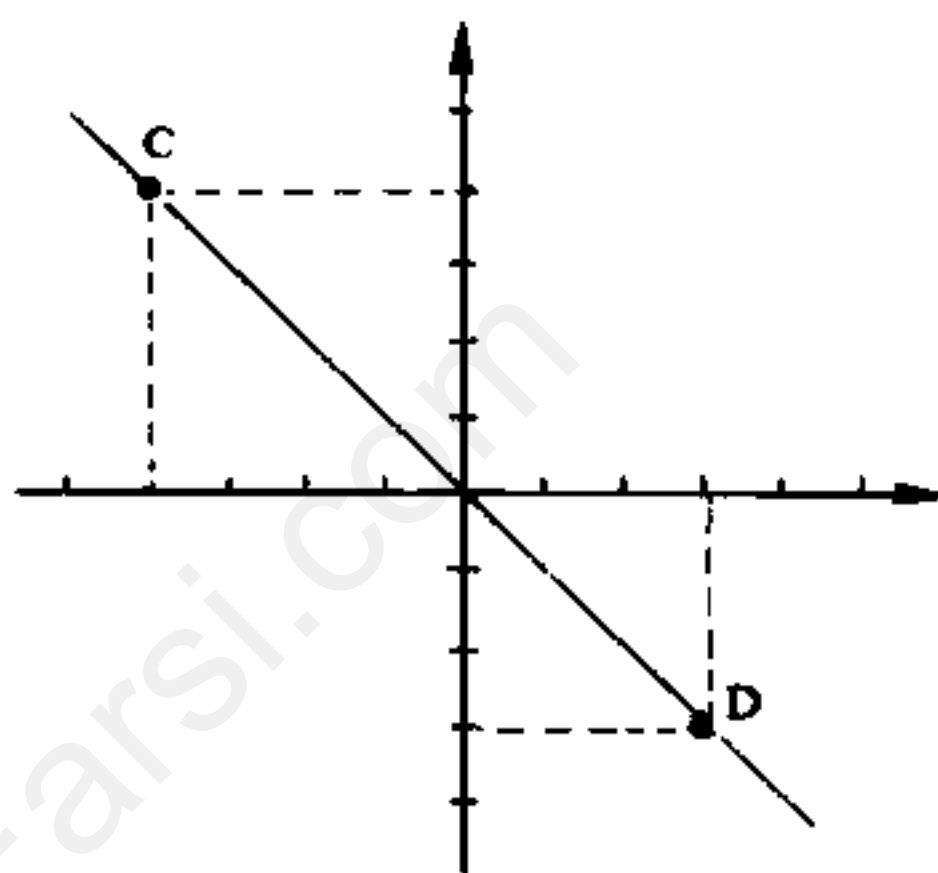
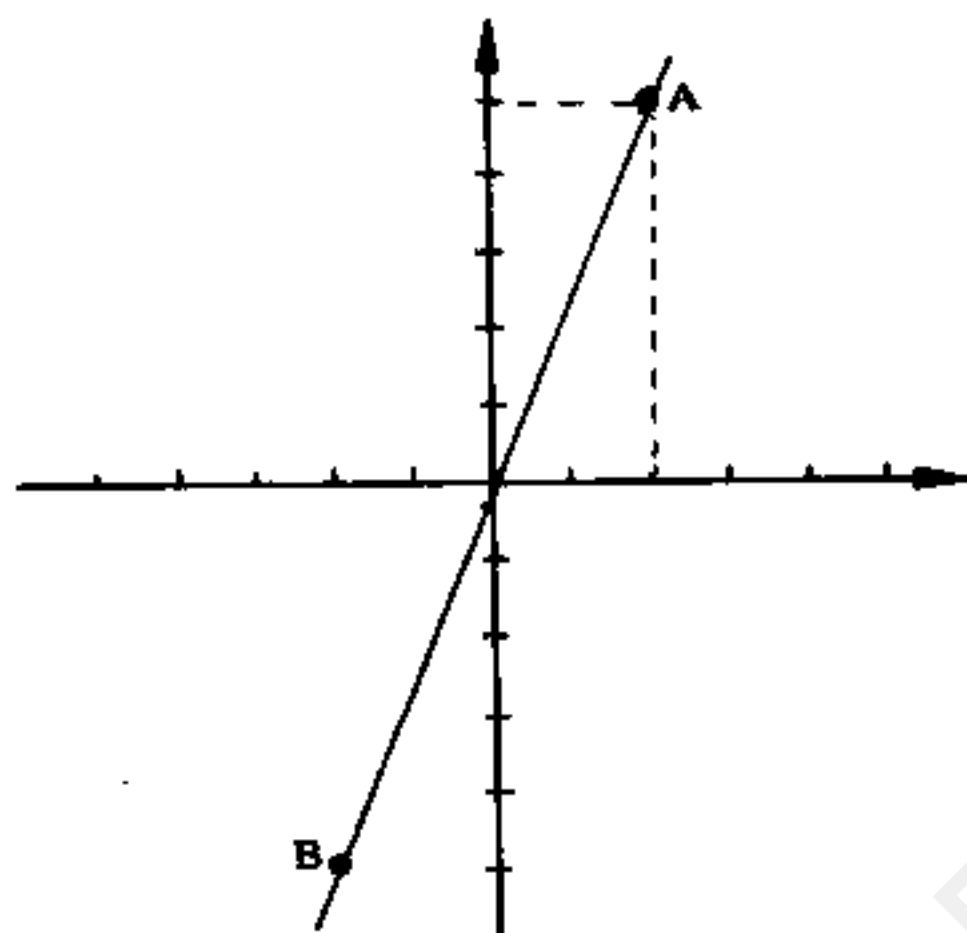
$$C = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$



$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

تمرین

۱. در مورد هریک از نمودارهای زیر،
 آ. مختصات نقاط تعیین شده را بنویسید.
 ب. رابطه بین طول و عرض نقاط خط را پیدا کنید.



۲. محورهای مختصات و خط به معادله $y = -4x$ را رسم کنید.

۳. محورهای مختصات و خطهای به معادلههای زیر را رسم کنید.

$$y = x \quad , \quad y = \frac{3}{4}x \quad , \quad y = -\frac{2}{3}x \quad , \quad y = -\frac{2}{3}x$$

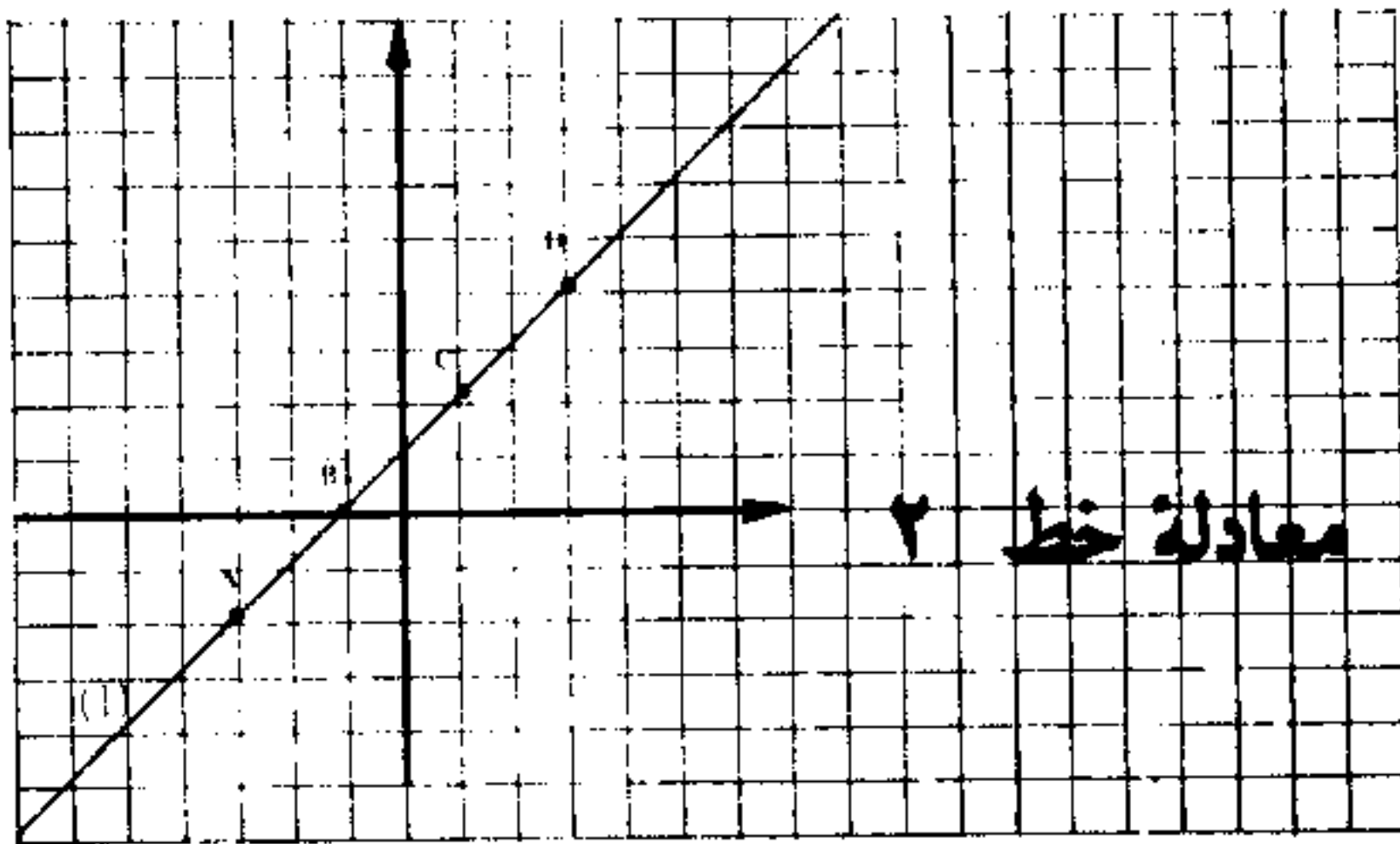
۴. معادله خطی که از مبدأ مختصات و نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرد چیست؟

۵. از نقاط زیر آنهایی را که روی خط $y = -\frac{2}{3}x$ قرار دارند نام ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶. نمودار هر یک از مجموعه‌های زیر را رسم کنید.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$



به خط ۱ توجه کنید. نقاط

$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

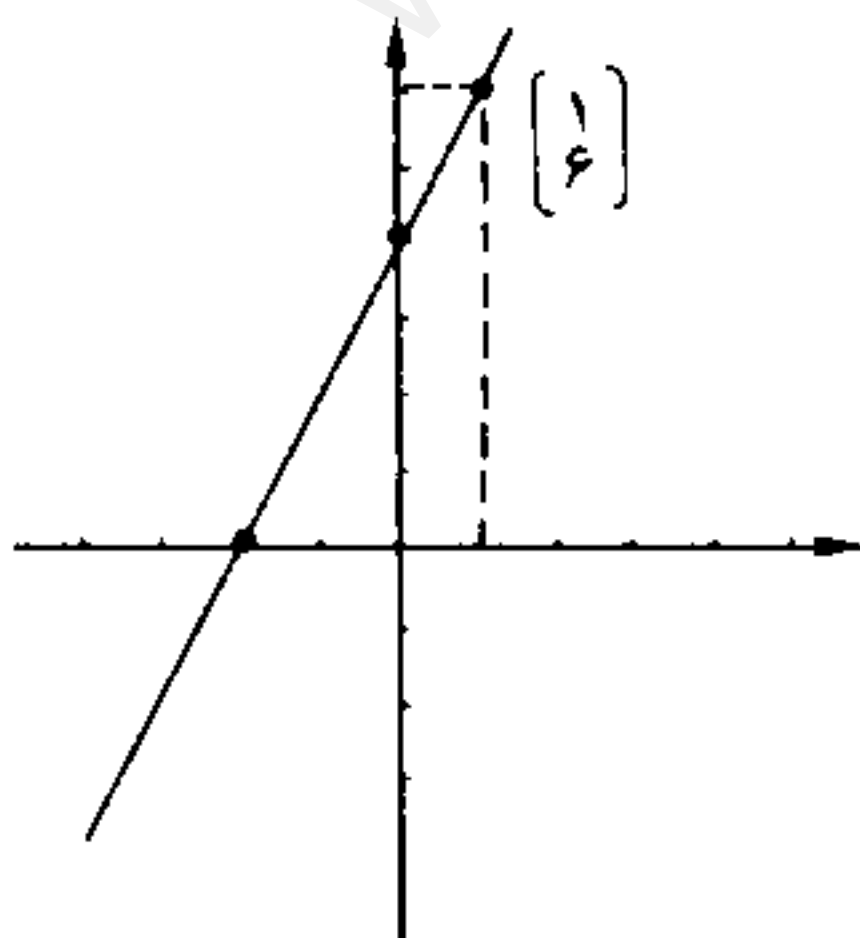
روی این خط قرار دارند. با توجه به مختصات این نقاط، متوجه می‌شویم که عرض هر نقطه از طول آن یکی بیشتر است. اگر طول نقاط را x و عرض آنها را y بنامیم، طول و عرض نقاط در رابطه $y = x + 1$ صدق می‌کنند.

معادله خط ۱ عبارت است از $y = x + 1$.

رسم خط به معادله $y = 2x + 4$

با توجه به این که هر خط راست با دو نقطه‌اش مشخص می‌شود، کافی است مختصات دو نقطه از خط را بدست آوریم:

x	۰	۱
$y = 2x + 4$	$2(0) + 4 = 4$	$2(1) + 4 = 6$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

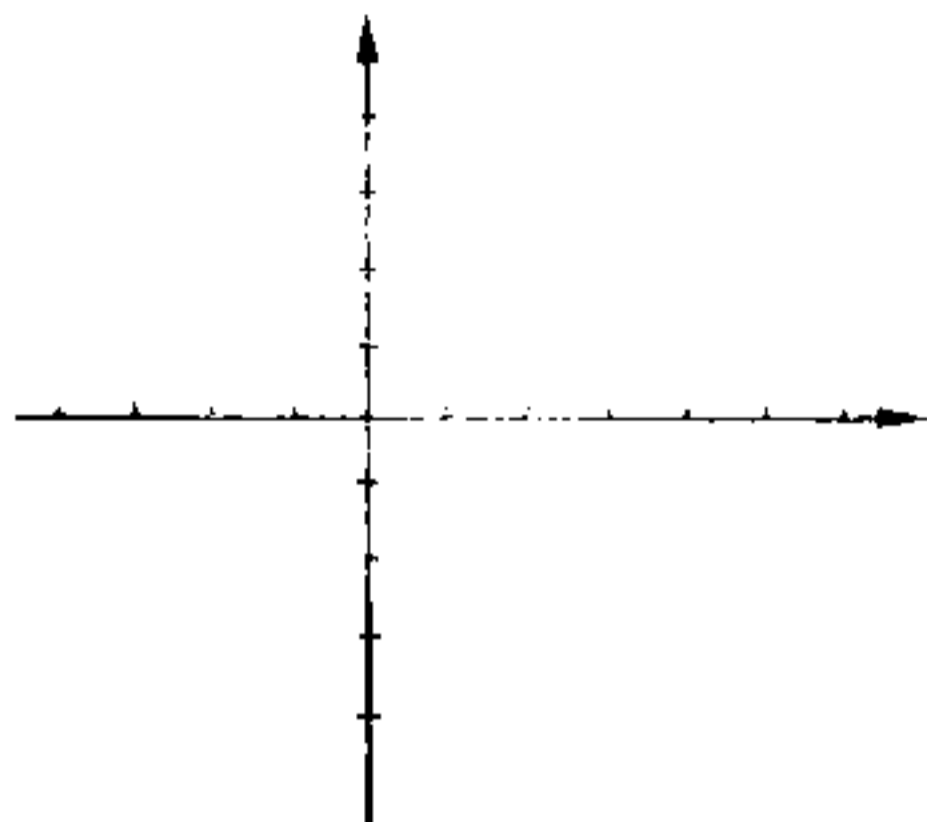


اگر در معادله خط به جای y صفر بگذاریم، مقدار x مساوی -2 بدست می‌آید، بنابراین

نقطه $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ نیز یک نقطه از خط است.



۱. خط l به معادله $y = -2x + 1$ را رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

با توجه به معادله خط مختصات نقاط زیر از خط را کامل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

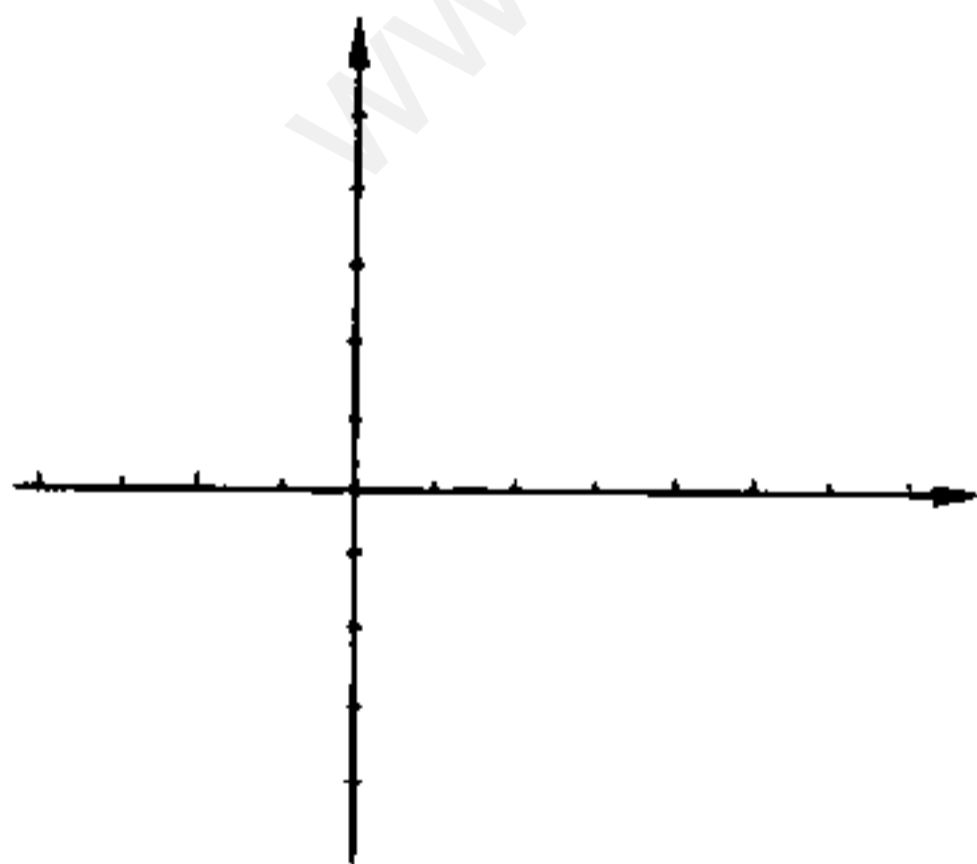
$$B = \begin{bmatrix} ۱ \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \cdot \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \cdot \\ -۳ \end{bmatrix}$$

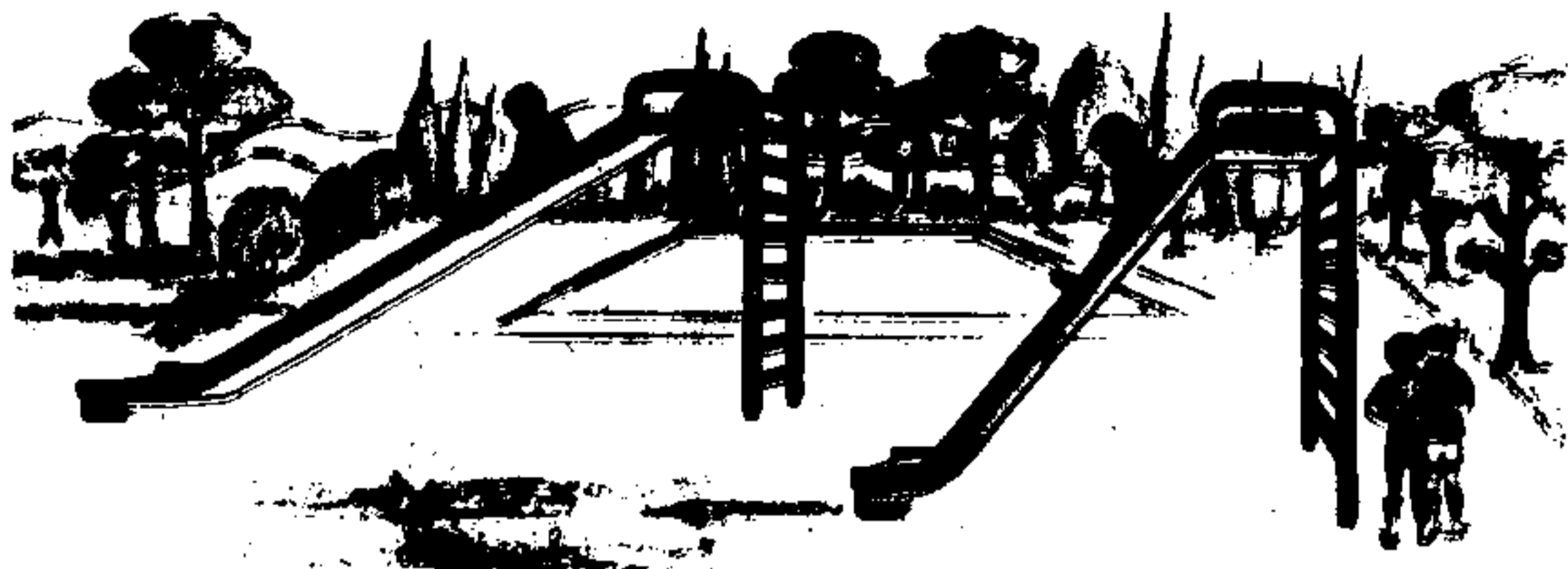
این نقاط را در دستگاه مختصات بالا مشخص کنید.

۲. خطهای l به معادله $y = 3x - 3$ و l' به معادله $y = 3x$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		
x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

آیا این دو خط موازیند



شیب خط

به شکل بالا توجه کنید. شیب کدام سرسره بیشتر است. کدام سرسره با سطح افق زاویه بزرگتری را می‌سازد؟

اینک به شکل مقابل توجه کنید.

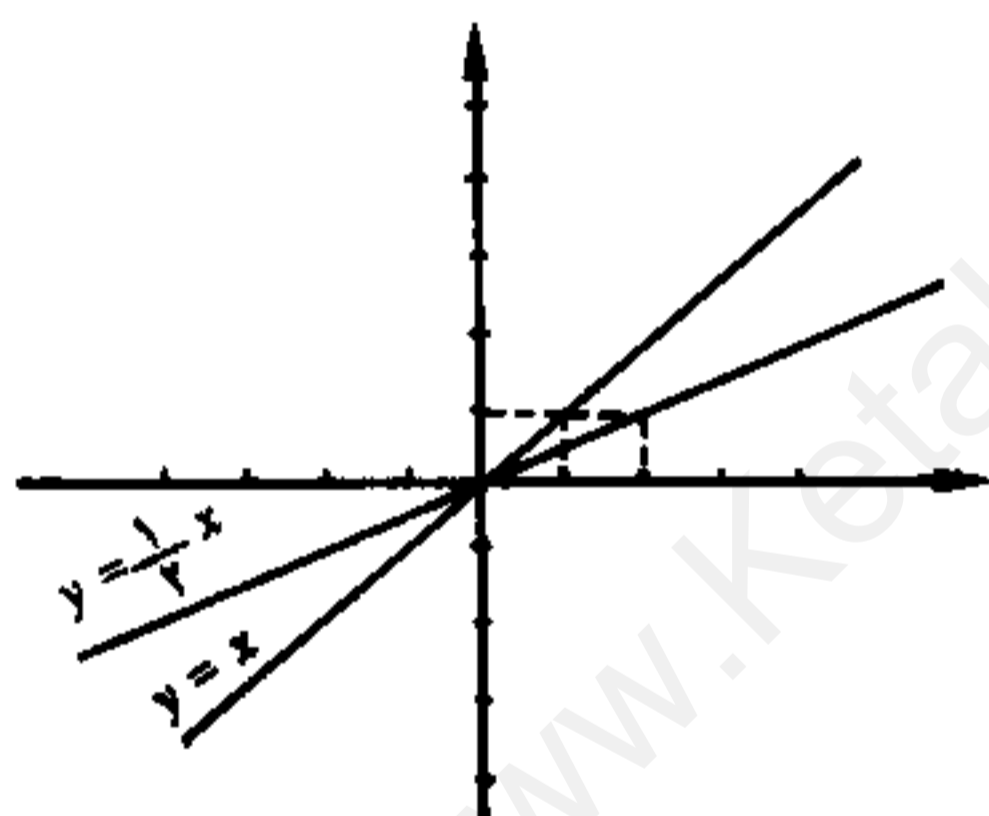
شیب خط $y = x$ از شیب خط $y = \frac{1}{4}x$ زیادتر است.

به طور کلی، اگر معادله خطی به صورت

$$y = ax + b$$

نوشته شود، ضریب x یعنی a شیب آن خط نامیده می‌شود. مثلاً شیب خط $y = x$ مساوی

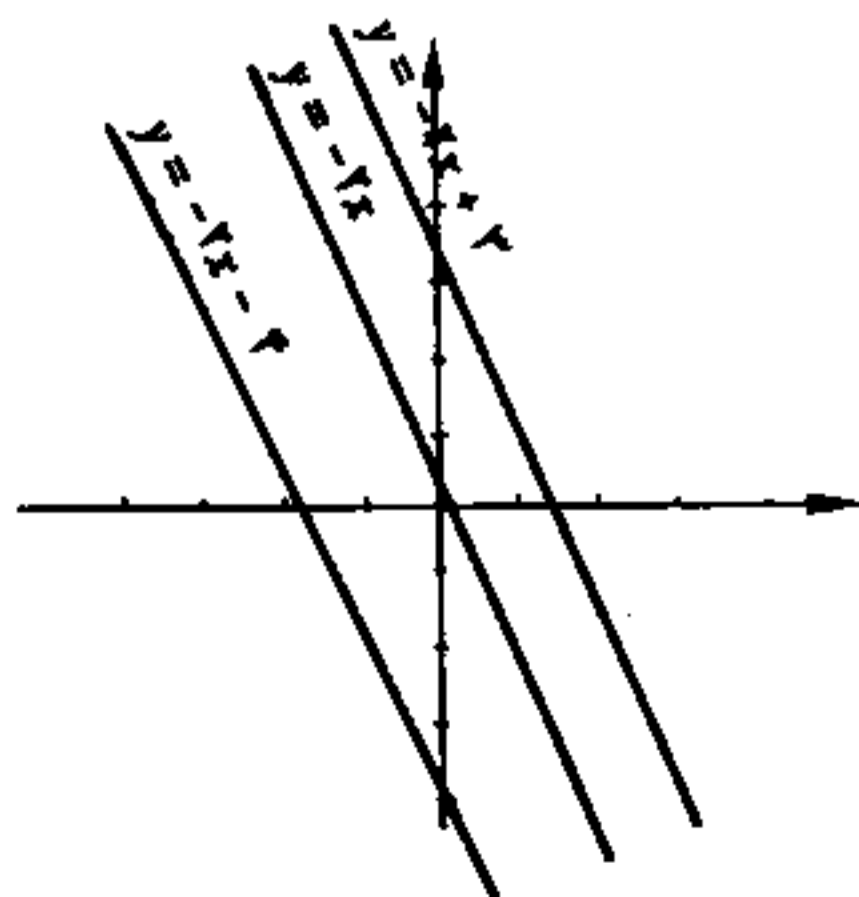
۱ است و شیب خط $y = \frac{1}{4}x$ مساوی $\frac{1}{4}$.



حالا به شکل مقابل توجه کنید. خطهای رسم شده موازی و دارای شیب یکسان هستند. ضریب x در هر سه معادله یکی است.

به طور کلی هر دو خط که دارای شیب

مساوی باشند موازی هستند.





کاردر کلاس

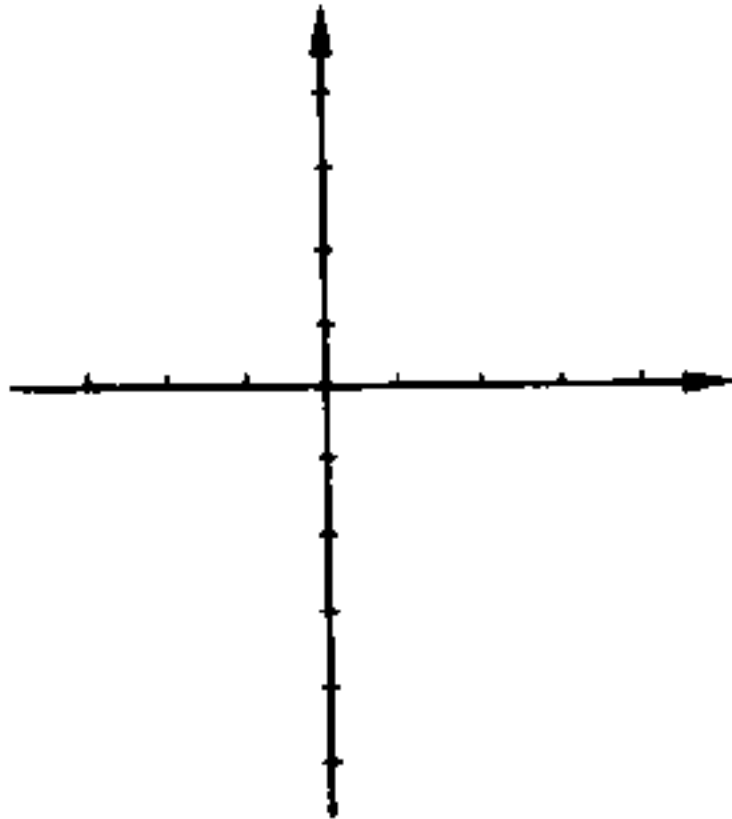
۱. خط $y = 8x - 5$ با کدام یک از خطهای زیر موازی است؟

$$y = -8x + 5$$

$$y = 8x - 3$$

$$y = 3x - 5$$

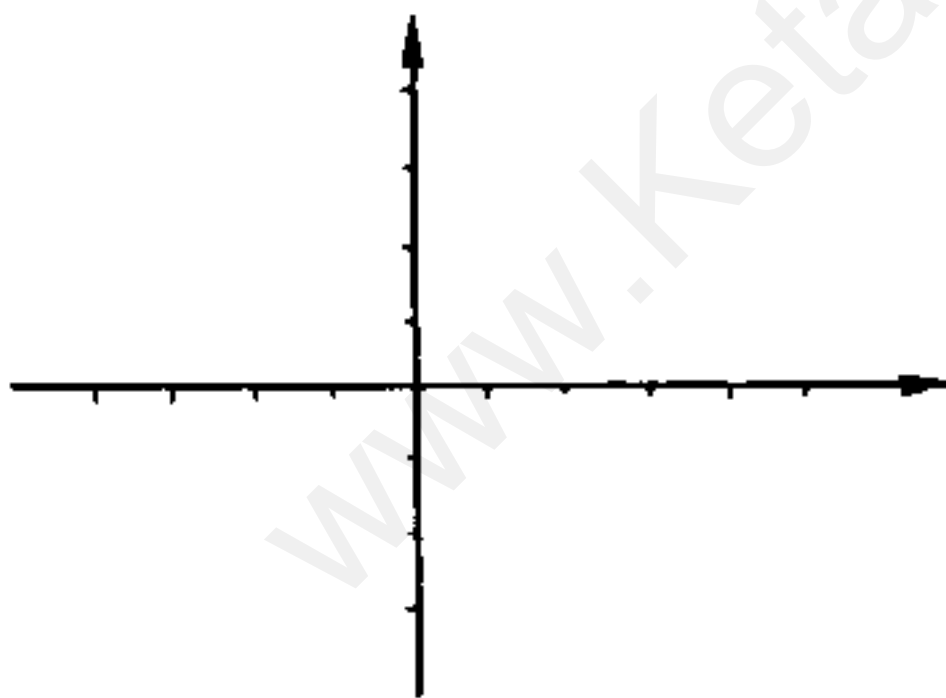
۲. خط $y = -3x + 4$ را رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

شیب این خط چند است؟
این خط محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۳. خط $y = 2x - 5$ را رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

شیب این خط چند است؟
این خط محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴. معادله خطی را بنویسید که شیب آن ۳ باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع کند.

۵. معادله خطی را بنویسید که شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کند.

۶. معادله خطی را بنویسید که با خط $y = 3x + 4$ موازی باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۵- قطع کند.

در صفحه قبل دیدید که اگر معادله خطی را به صورت $y = ax + b$ بنویسیم، شیب این خط مساوی a است و محور y را در نقطه‌ای به عرض b قطع می‌کند، یعنی از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

عدد b در معادله $y = ax + b$ را عرض از مبدأ این خط می‌نامیم.



کاردرکلاس

۱. در کدام یک از قسمتهای زیر، دو خط داده شده متوازیند؟

$$y = 3x$$

$$y = -x + 5$$

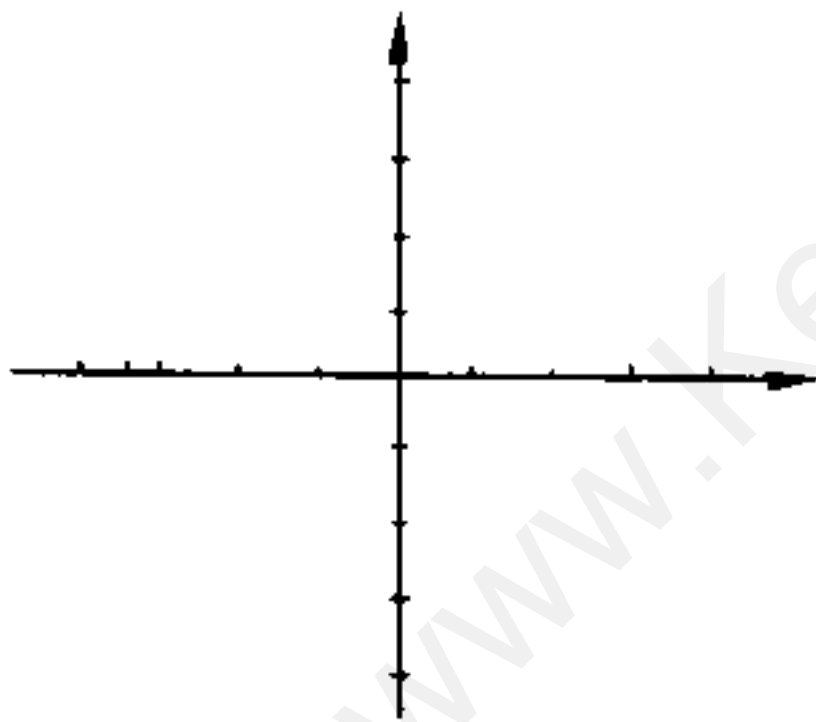
$$y = 2x - 3$$

$$y = 3x - 3$$

$$y = -x - 1$$

$$y = x - 3$$

۲. خط $y = 3x - 3$ را رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

شیب این خط چند است؟

این خط محورهای مختصات را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

$$A = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

۳. معادله خطی را بنویسید که شیب آن $-\frac{3}{5}$ باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۴. معادله خطی را بنویسید که با خط $y = \frac{1}{3}x - 1$ موازی باشد و عرض از مبدأ آن $+1$ باشد.

۵. معادله خطی را بنویسید که با خط $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ موازی باشد و از نقطه $A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد. این

دو خط را در دفترتان رسم کنید و نقطه A را مشخص کنید.

تمرین

۱. خط l به معادله $y = -4x + 7$ را رسم کنید.
 شیب این خط چند است؟ این خط محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟
۲. خطهای $y = 2x$ و $y = 2x - 4$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. آیا این دو خط موازیند؟
۳. معادله خطی را بنویسید که شیب آن -3 باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض 2 قطع کند.
 معادله خطی را بنویسید که شیب آن -3 باشد و از مبدأ مختصات بگذرد. هر دو خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.
 آیا این دو خط موازی هستند؟

۴. معادله خطی را بنویسید که با خط $y = \frac{1}{4}x - 1$ موازی باشد و از نقطه $A = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \right]$ بگذرد. این دو خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نقطه A را مشخص کنید.
۵. از نقطه‌های زیر کدام یک روی خط $y = -3x + 1$ قرار دارند؟

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۶. عدد b را تعیین کنید به طوری که نقطه $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط $y = \frac{3}{4}x + b$ واقع باشد.
۷. عدد b را تعیین کنید به طوری که نقطه $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی خط $y = -5x + b$ واقع باشد.



--

در شکل روبه‌رو ۳ مستطیل می‌بینید.
 خطی در این شکل رسم کنید که تعداد مستطیلها ۶ تا شود.

صورت دیگر معادله خط

خط l به معادله $y = \frac{2}{5}x + 2$ را در نظر بگیرید. می‌دانید که معادله خط رابطه‌ای است که بین طول و عرض نقاط خط برقرار است. معادله این خط را می‌توان به صورتی دیگر هم نوشت.

$$5y = 2x + 10$$

$$(۱) \quad 5y - 2x = 10$$

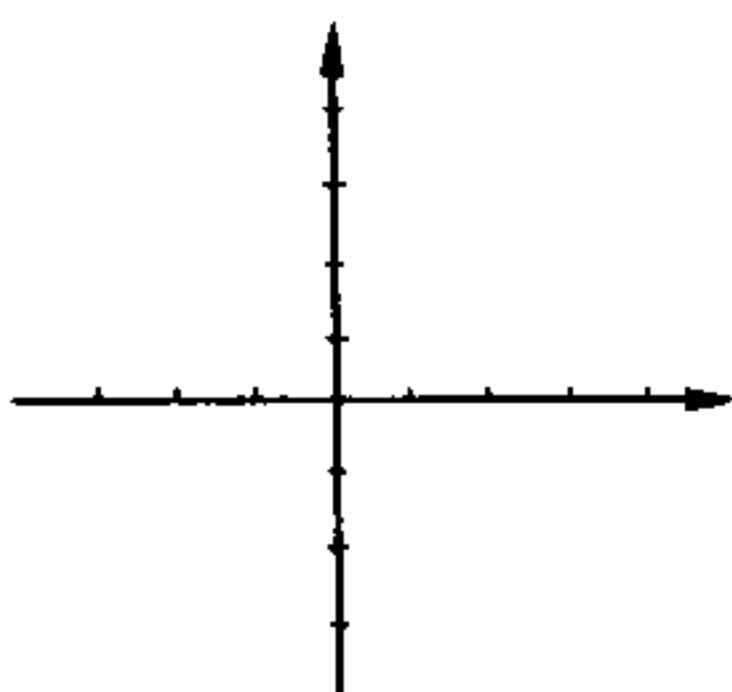
هر معادله به صورت (۱) معادله یک خط است. از این نظر چنین معادله‌ای را یک معادله خطی می‌نامیم.



کاردر کلاس

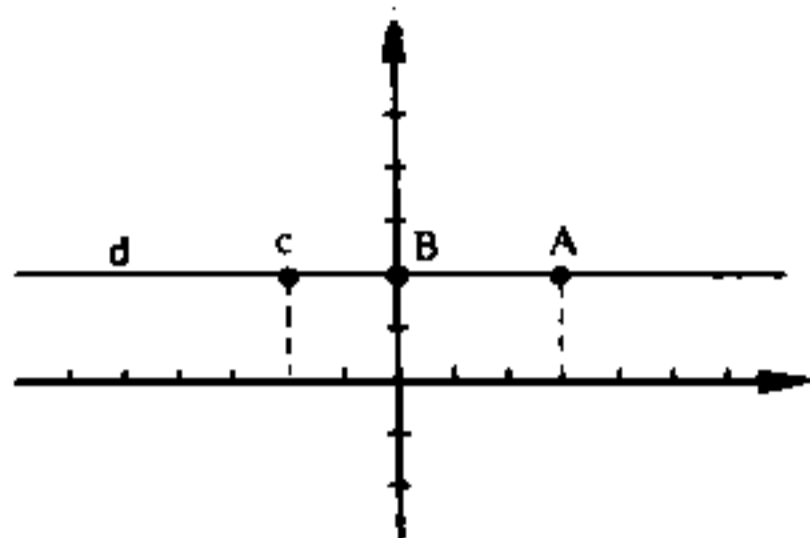
برای هر یک از معادله‌های خطی زیر جدول را کامل کنید و خط مربوطه را رسم کنید.

$$2x - 5y = 10$$



x	\cdot
y	-2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cdot \\ -2 \end{bmatrix}$
$2x + 2y = 6$	
x	
y	
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	

خطهای موازی با محورها



به خط d از شکل مقابل توجه کنید. نقاط

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

روی این خط قرار دارند. عرض هر سه نقطه مساوی ۰ است.

هر نقطه دیگری هم روی این خط بگیریم، عرض آن مساوی ۰ است. مختصات این نقاط در معادله $y + 0x = 0$ یا $y = 0$ صدق می‌کند. معادله این خط $y = 0$ است.

اینک به خط l توجه کنید. نقاط

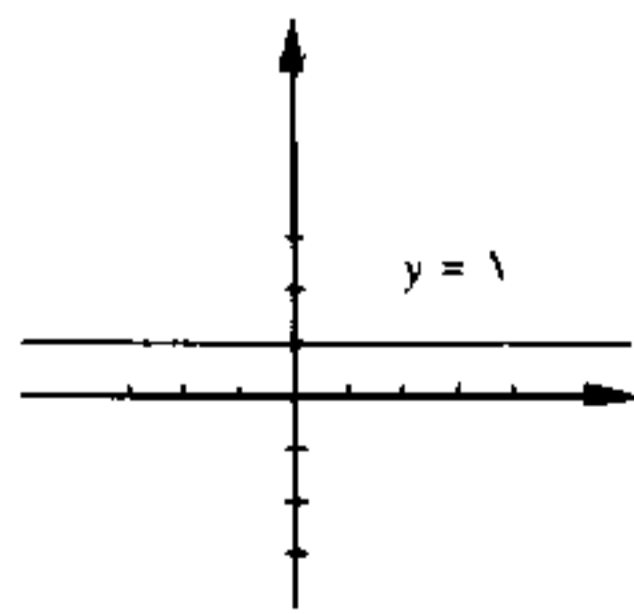
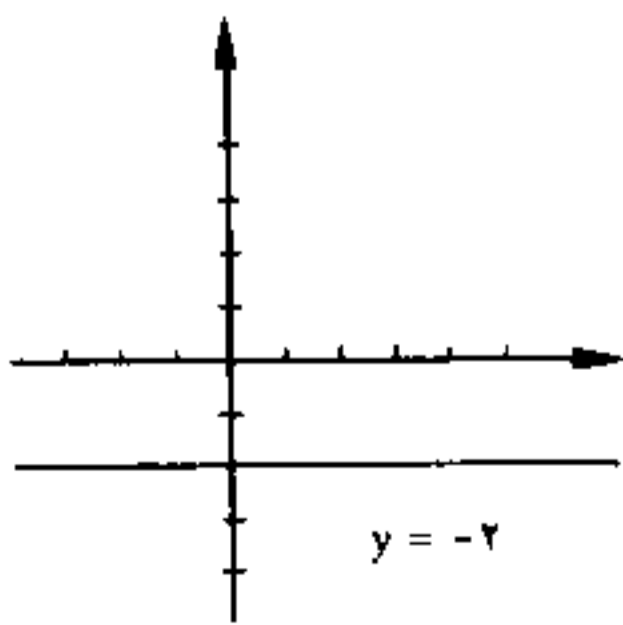
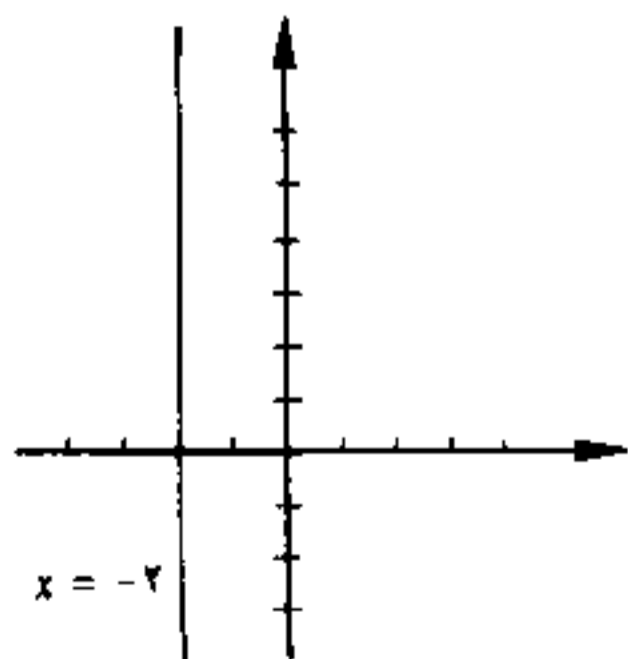
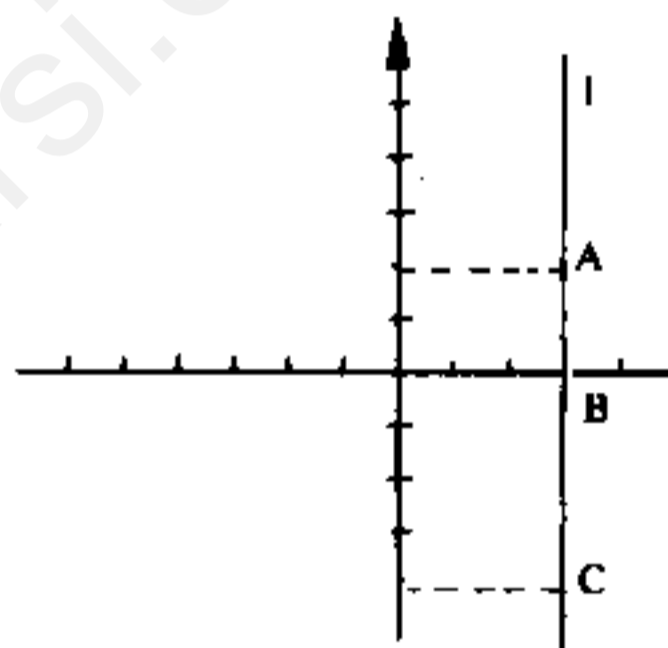
$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

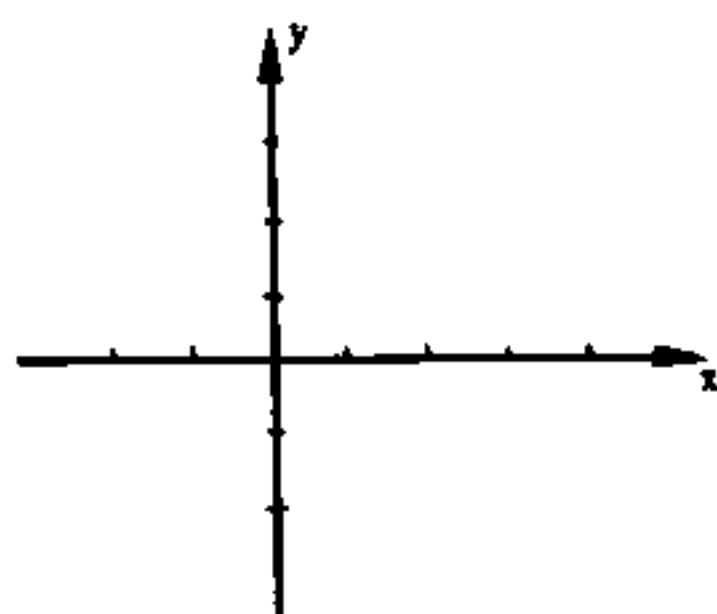
روی این خط قرار دارند. طول هر سه نقطه مساوی ۳ است.

هر نقطه دیگری روی این خط بگیریم، طول آن مساوی ۳ خواهد بود.

مختصات نقاط این خط در معادله $0y + x = 3$ یا $x = 3$ صدق می‌کند. معادله این خط $x = 3$ است.

به خطهای زیر و معادله هر یک از آنها توجه کنید.





۱. معادله خط d بصورت $4x - 2y = 8$ داده شده است. ابتدا جدول زیر را کامل کنید.

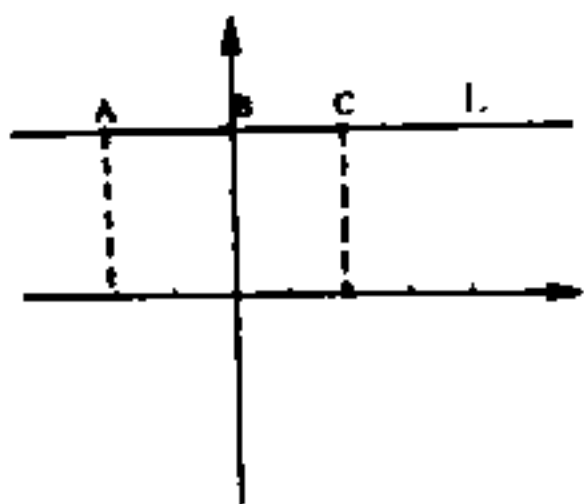
x	.
y	.
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	

سپس خط d را رسم کنید.

با نوشتن معادله خط به صورت $y = ax + b$ شیب خط را پیدا کنید.

۲. مختصات نقاط A , B و C از خط l را

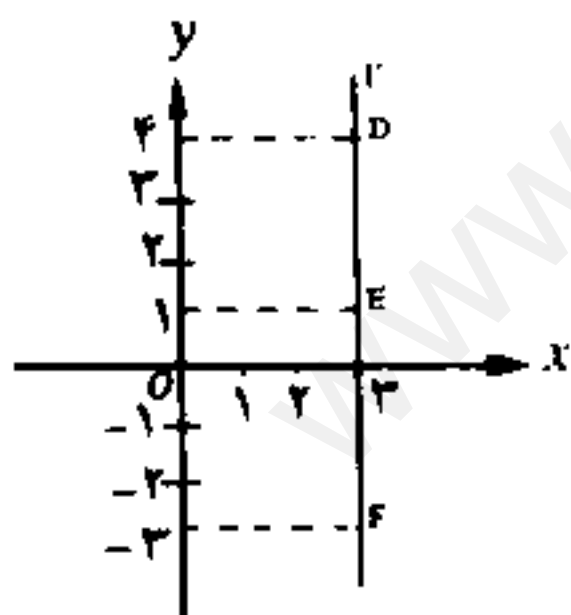
بنویسید.



$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

معادله خط l را بنویسید.

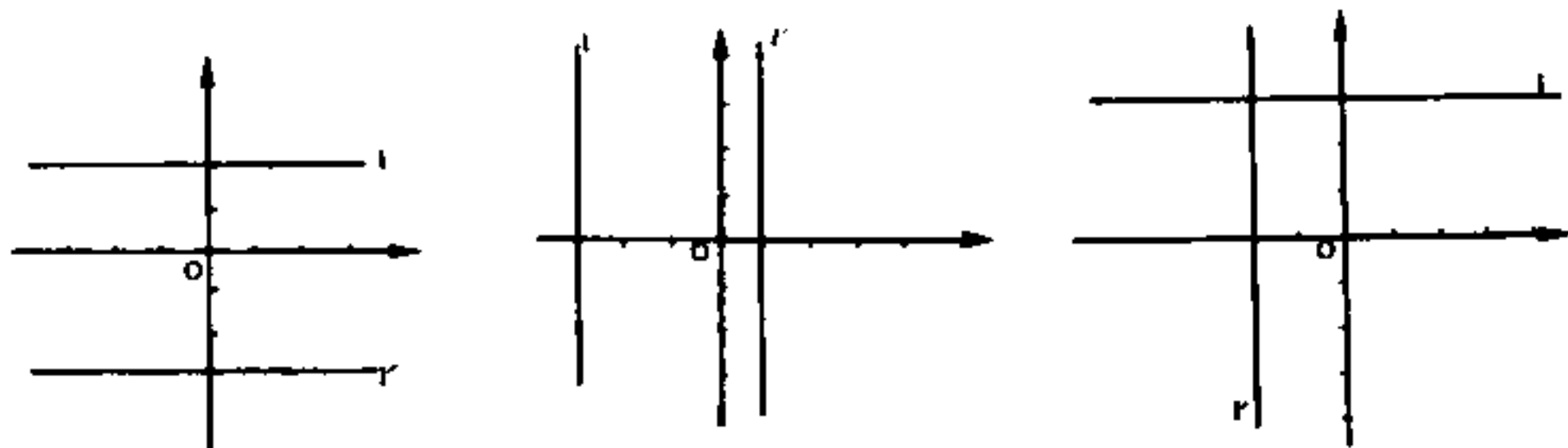
۳. مختصات نقاط D , E و F از خط l را بنویسید.

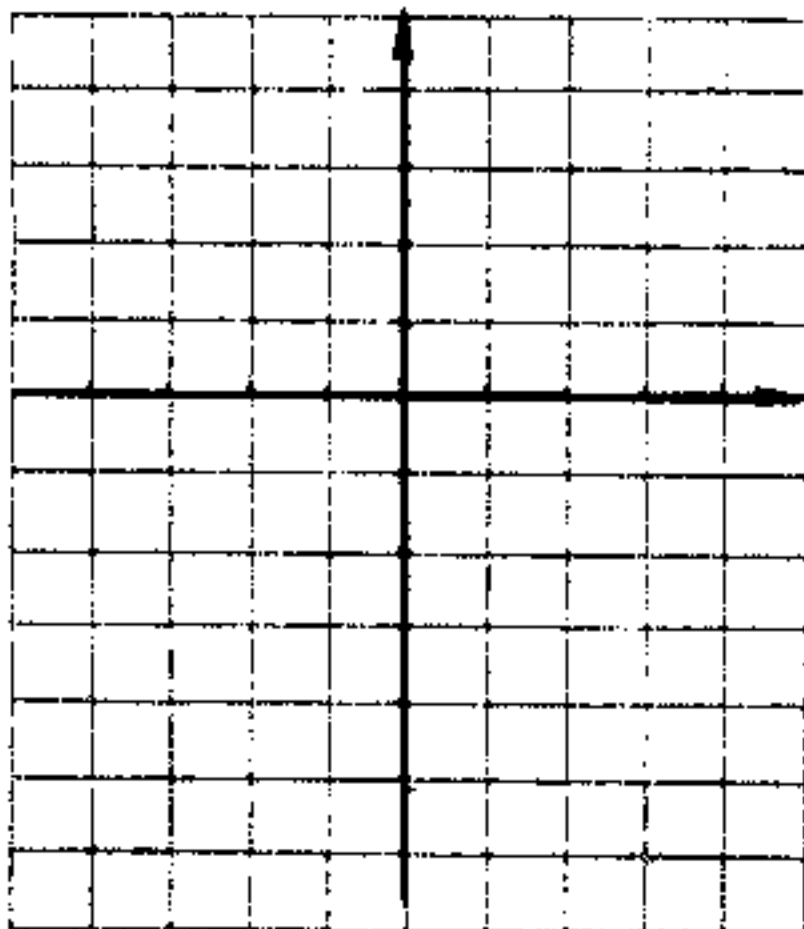


$$D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

معادله خط l را بنویسید.

۴. معادله هر یک از خطهای زیر را روی آنها بنویسید.





۵. نقاط $A = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

را در دستگاه مختصات مقابل مشخص کنید.
معادله خطی که از این نقاط می‌گذرد چیست؟

۶. نقاط $D = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

را مشخص کنید. معادله خطی که از این نقاط می‌گذرد چیست؟

تمرین

۱. نقاط $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید و خط AB را رسم

کنید. معادله خط AB را بنویسید. (معادله خطی که از A و B می‌گذرد)

۲. نقاط $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید و خط CD را رسم

کنید. معادله این خط چیست؟ (معادله خطی که از C و D می‌گذرد)

۳. هر یک از خطهای زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{array}{l} 2x - 4y = 12 \quad , \quad 2x + 3y = -12 \quad , \quad x = -5 \\ x = 2/5 \quad , \quad y = \frac{3}{4} \quad , \quad y = -6 \end{array}$$

۴. هر دسته از خطهای زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{cases} 2x + 5y = -20 \\ -5x + 2y = 10 \end{cases} \quad \text{ب.} \quad \begin{cases} 4x - 5y = 20 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \quad \text{آ.}$$

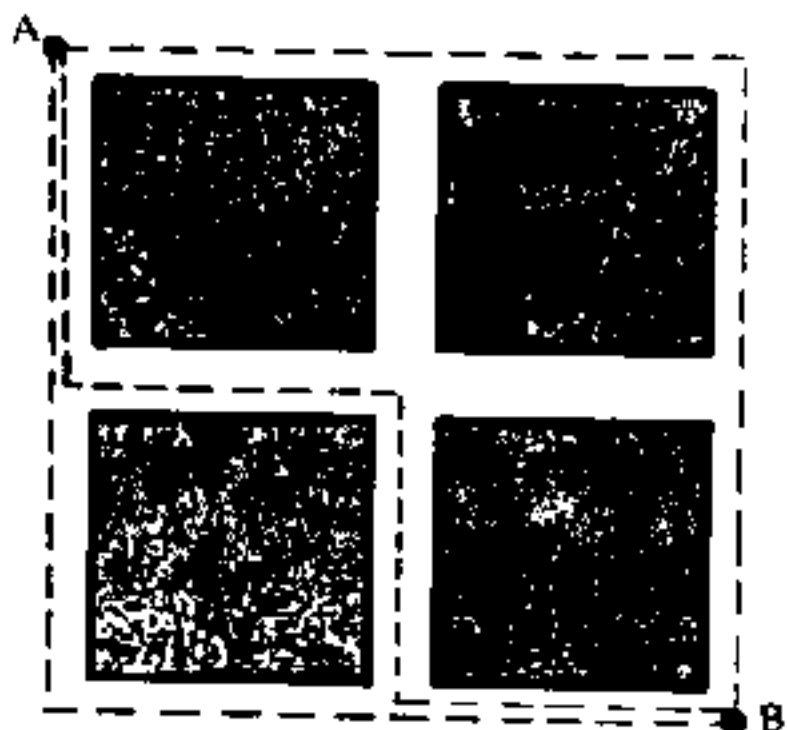


ابوریحان بیرونی (۳۶۲ - ۴۴۰ هـ. ق)

«با وجود گذشت ایام، ابوریحان وجودی است که هنوز از لحاظ فکر جوان و تازه می نماید و چنین به نظر می رسد که از دانشمندان هم عصر ما است. در وسعت فکر، انتقاد، ریشه یابی علت های حوادث و عشق عمیق به تحقیق صاحب مقامی ممتاز است. او نظیر لئوناردو داوینچی و لایب نیتز در حکمت، تاریخ، ریاضیات، نجوم و جغرافیا استاد بوده است و به چندین زبان تسلط داشته است. تألیفات مهمی داشته است از جمله کتاب «الفهیم» در مقدمات علم هیأت، هندسه و نجوم که به شکل سؤال و جواب تنظیم یافته است و خود آن را در دو نسخه عربی و فارسی، که یکی ترجمه دیگری نیست تنظیم کرده است.»

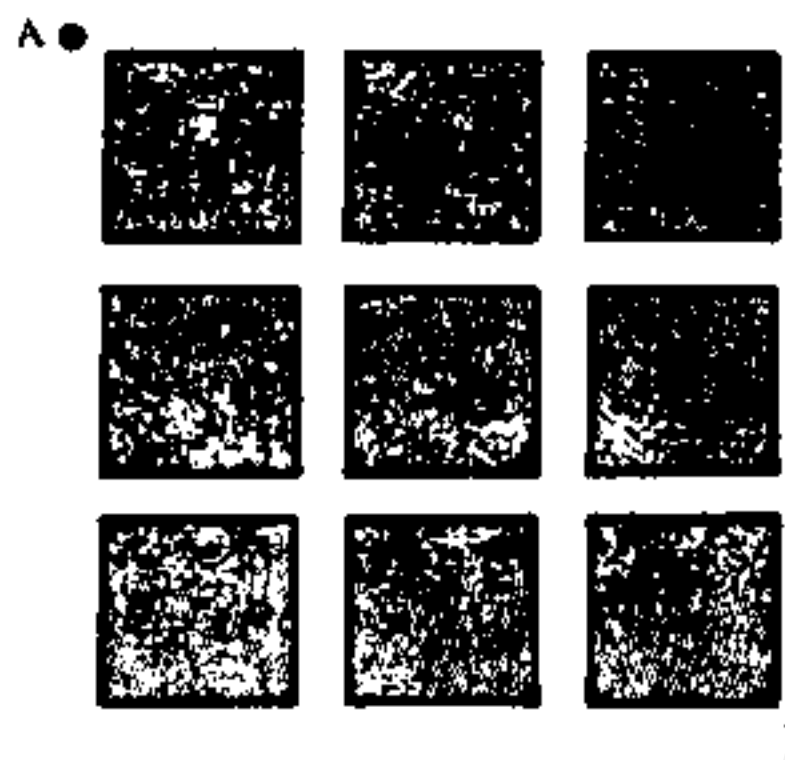
نقل از کتاب «دانشمندان اسلامی» (Les Penseuse del, Islam)

ابوریحان به حرکت وضعی زمین معتقد بوده است و با اشاره به قوه جاذبه و با استدلال علمی حرکت زمین را ثابت کرده است. تحقیقاتی در باره انتشار نور داشته است. ابوریحان معاصر و مصاحب ابن سینا بوده است و مانند سایر دانشمندان آزاده مورد بغض و کینه سلطان محمود غزنوی بوده است. سلطان محمود وی را به خاطر فضیلت علمی و فلسفی، آزادگی و مناعت طبع و امتناع وی از تملق و چاپلوسی به مرگ محکوم کرده بود، ولی با میانجیگری اطرافیان سلطان محمود از مرگ نجات یافت.



در زمینی ۴ ساختمان به صورت شکل مقابل ساخته شده است. یک نفر می‌خواهد از نقطه A به نقطه B برود. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد در صورتی که مسافت طی شده حداقل باشد؟

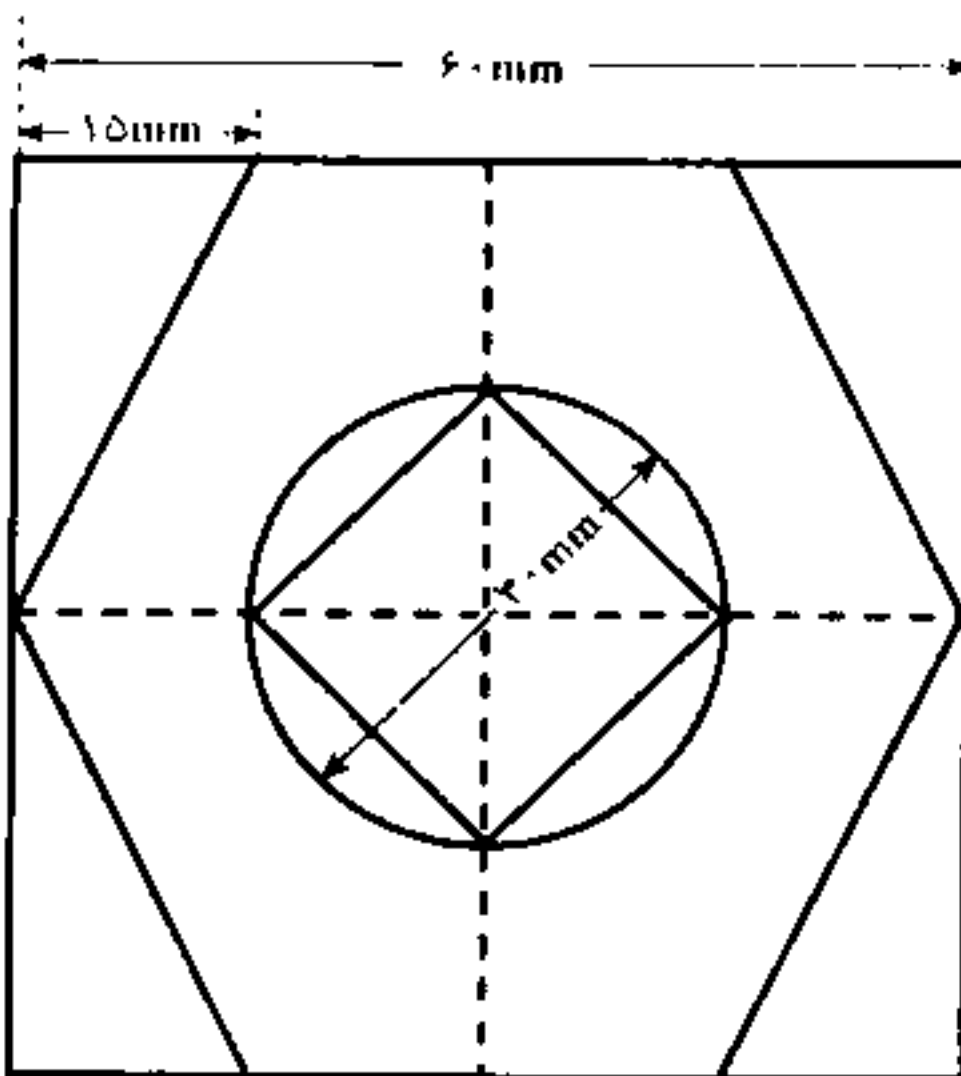
در شکل سه تا از راههایی که می‌تواند انتخاب کند نشان داده شده است. به راحتی



می‌توان فهمید که ۶ راه مختلف را می‌توان برای رفتن از A به B طی کرد و همه این راهها کوتاه‌ترین راه ممکنه هستند. حالا فکر کنید که اگر تعداد ساختمانها ۹ عدد و به شکل مقابل باشند به چند طریق می‌توان از نقطه A به B رفت، به شرط آن که مسافت طی شده حداقل باشد. سعی کنید یک قاعده بدست آورید.

رسم

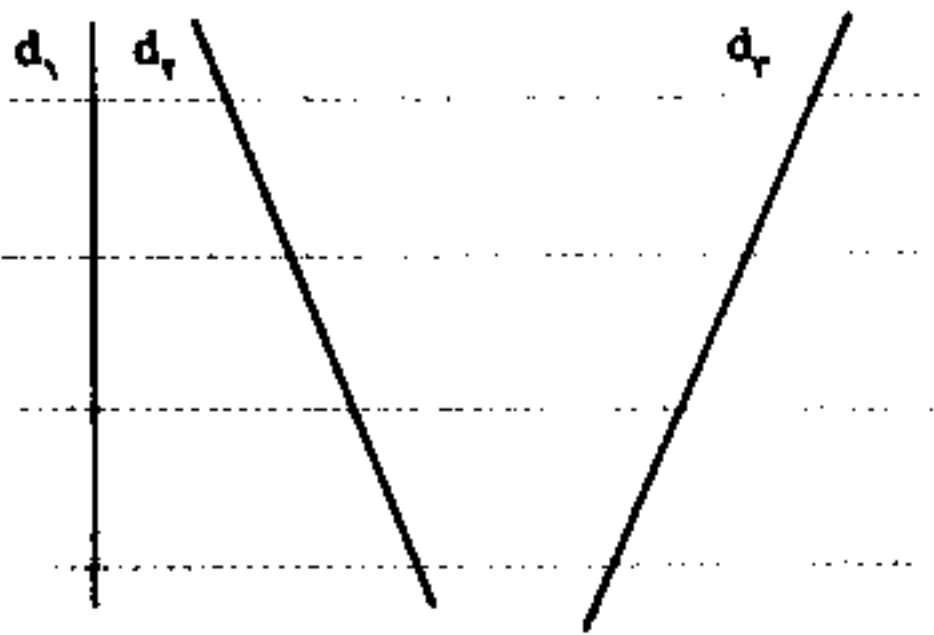
شکل زیر را با مقیاس ۲، در کاغذ رسم بکشید.



هندسه ۲

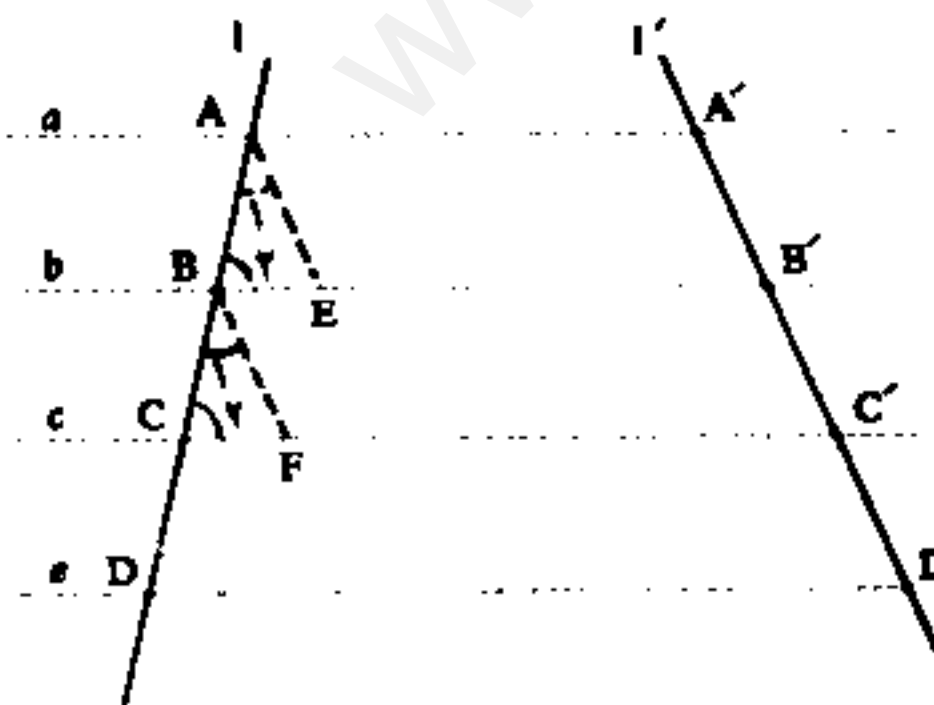
خطهای متوازی با فاصله‌های متساوی

اگر چند خط متوازی دارای فاصله‌های متساوی باشند و خطی را قطع کنند، روی آن پاره‌خطهای متساوی ایجاد می‌کنند. در شکل مقابل خطهای متوازی و متساوی-الفاصله سه خط d_1 ، d_2 و d_3 را قطع کرده‌اند. پاره‌خطهایی را که روی هر یک از آنها بوجود آمده است، با هم مقایسه کنید و متساوی بودن آنها را تحقیق کنید.



به طور کلی:

اگر چند خط متوازی خطی را قطع کنند و بر روی آن پاره‌خطهای متساوی به وجود آورند، این خطها هر خط دیگری را قطع کنند، بر روی آن نیز پاره‌خطهای متساوی جدا می‌کنند.



خطهای متوازی a, b, c و e بر روی خط l پاره‌خطهای متساوی AB, BC, CD را جدا کرده‌اند. این خطهای متوازی خط l' را هم در A', B', C', D' قطع کرده‌اند. ثابت می‌کنیم که پاره‌خطهای AB و $B'C'$ متساویند.

برای این کار AE و BF را موازی با l رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که این دو خط با هم موازیند و l قاطع آنها است.

پس، $\angle A_1 = \angle B_1$
 همچنین خطهای b و c متوازیند و l قاطع آنها است. پس،

$$\angle B_2 = \angle C_2$$

$$AB = BC$$

و میدانیم که

$$\triangle ABE = \triangle BCF$$

بنابراین، (ضضز)

$$AE = BF \quad (۱)$$

در نتیجه

چون چهار ضلعیهای $AAB'E$ و $BB'CF$ متوازی الاضلاعند. پس،

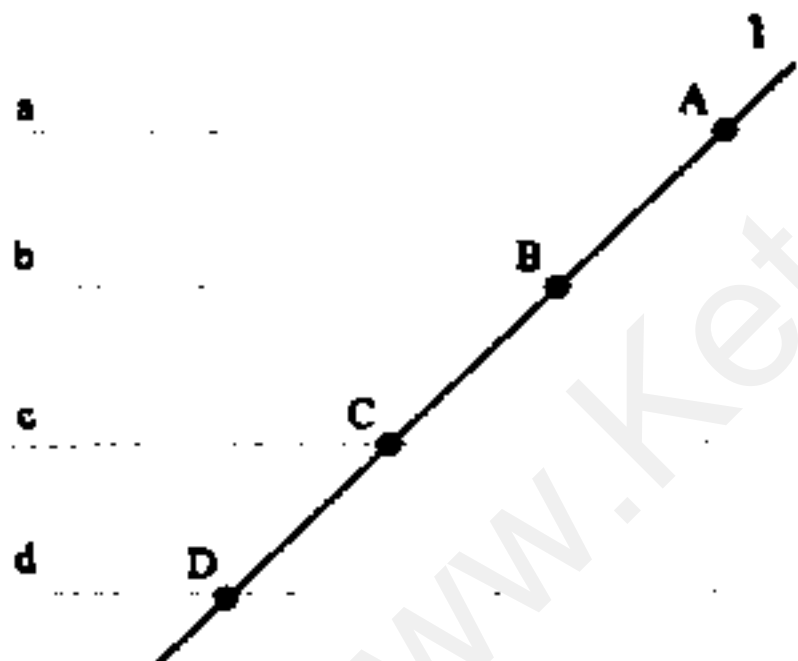
$$BF = BC' \quad (۳) \quad \text{و} \quad AE = AB' \quad (۲)$$

$$(۳)، (۲)، (۱) \Rightarrow AB' = BC'$$

به همین ترتیب می توان ثابت کرد که $BC' = CD'$ بنابراین پاره خطهایی که روی l جدا شده اند متساویند.



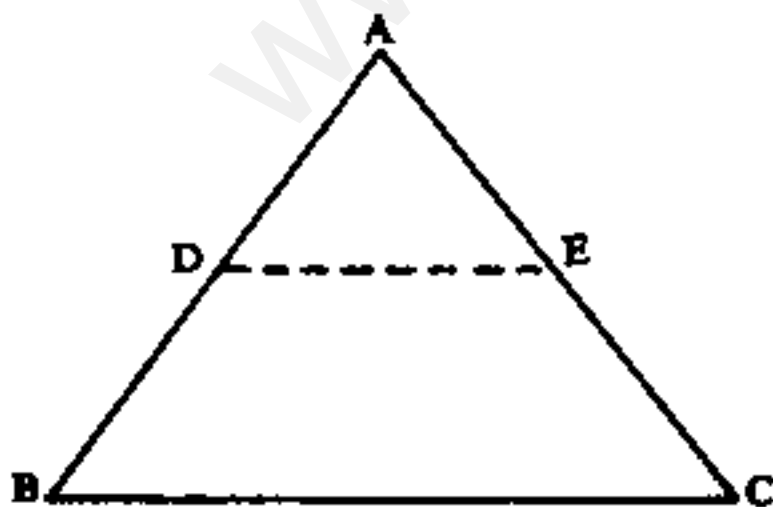
کاردرکلاس



۱ - خطهای a, b, c, d متوازی و متساوی الفاصله اند و $AB = ۲\text{cm}$. تساویهای زیر را کامل کنید.

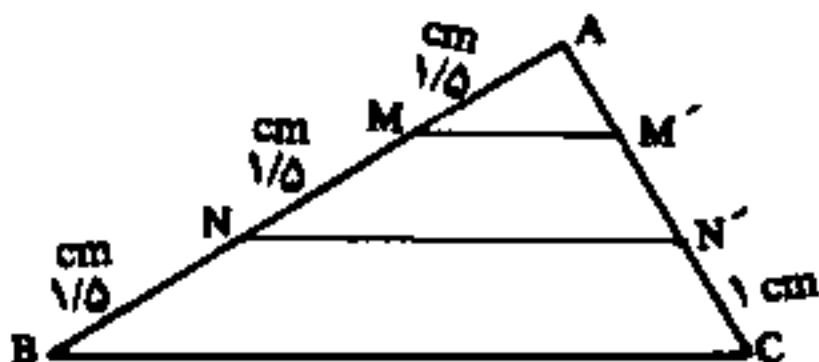
$$BC = \text{cm} \quad , \quad CD = \text{cm}$$

$$AC = \text{cm} \quad , \quad BD = \text{cm}$$

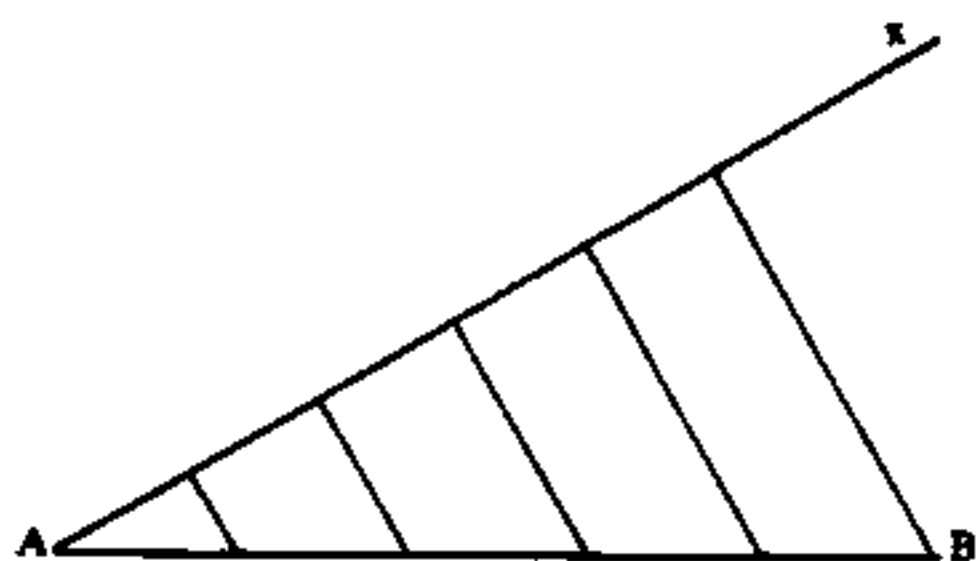


۲ - نقطه D وسط ضلع AB و $DE \parallel BC$ چرا E وسط ضلع AC است؟
 (راهنمایی: از A خطی موازی با BC رسم کنید).

به طور کلی، خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی با ضلع دیگر رسم شود، از وسط ضلع سوم هم می گذرد.



۳ - $MM' \parallel NN' \parallel BC$ اندازه های AM' و MN چقدر است؟



تقسیم پاره‌خط به قطعات متساوی
اگر بخواهیم پاره خط AB را به قسمتهای
متساوی مثلاً به پنج قسمت متساوی تقسیم
کنیم، چنین عمل می‌کنیم. ابتدا نیمخط AX
را رسم می‌کنیم و با شروع از نقطه A پنج
پاره‌خط متساوی به دنبال هم روی آن

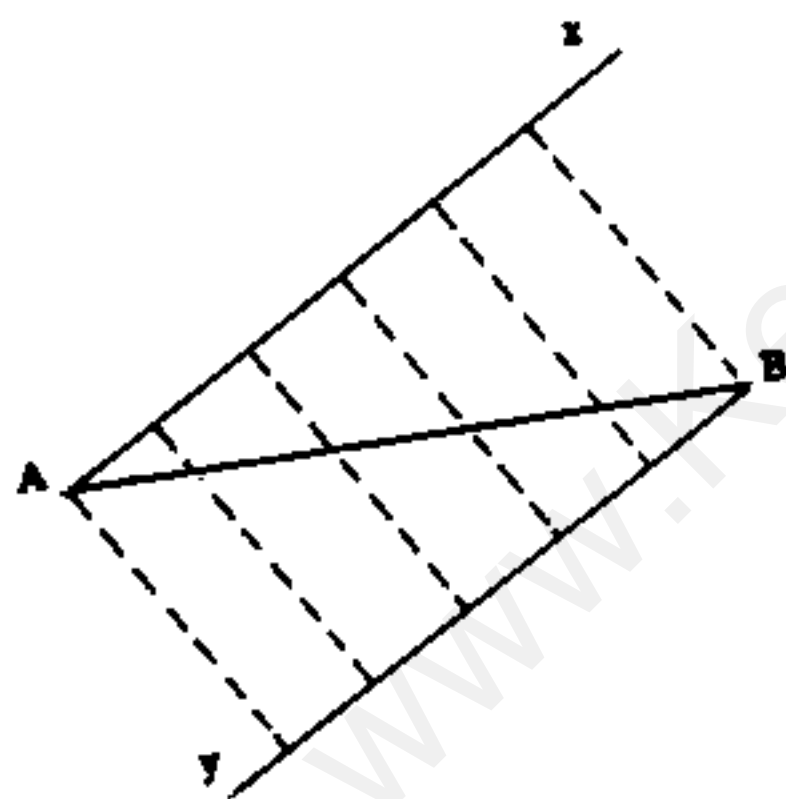
جدا می‌کنیم. سپس، آخرین نقطه را به B وصل می‌کنیم و از سایر نقاط خطوطی موازی
با آن رسم می‌کنیم. این پاره‌خطها، AB را به پنج قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.



کاردرکلاس

۱. با روش دیگری هم می‌توان یک پاره‌خط را به قسمتهای متساوی تقسیم کرد. مثلاً، برای تقسیم

پاره‌خط AB به پنج قسمت متساوی، به صورت
زیر عمل می‌کنیم.

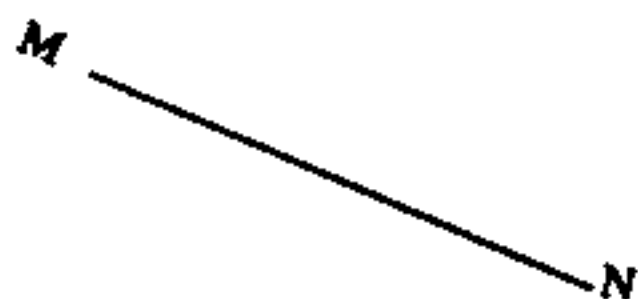


از A و B دو نیمخط متوازی رسم می‌کنیم و با
شروع از A و B به دنبال هم پنج پاره‌خط
متساوی روی هریک از آنها جدا می‌کنیم. سپس،
نقاط بدست آمده روی دو نیمخط را به ترتیب
وصل می‌کنیم. خطهای رسم شده متوازی‌اند.

چرا توسط این خطهای متوازی، پاره‌خط AB
به قسمتهای متساوی تقسیم می‌شود؟



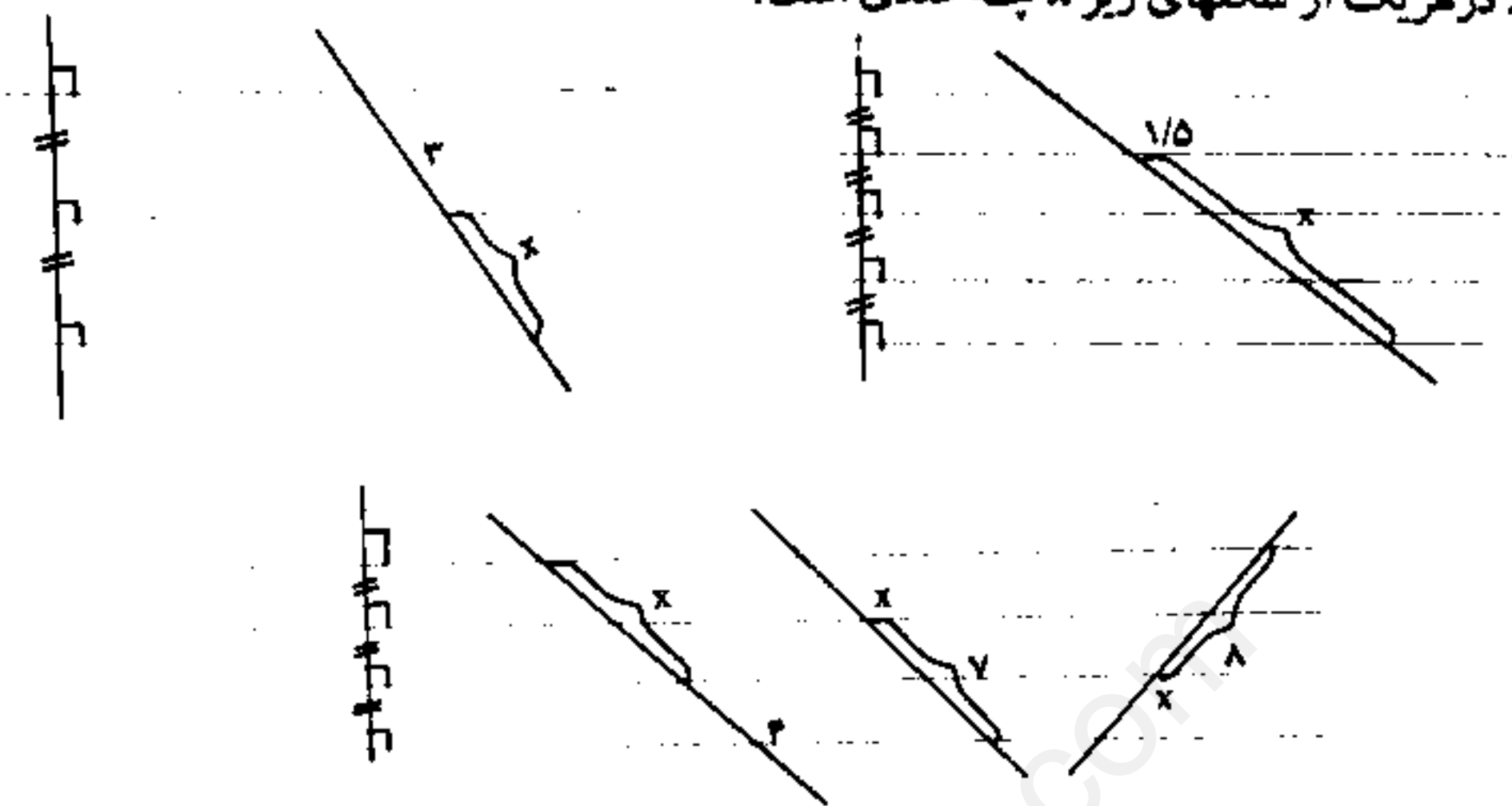
۲. AB را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.



۳. پاره‌خط MN را به دو قسمت کنید به طوری
که یکی از قسمتها دو برابر قسمت دیگر باشد.

تمرین

۱. در هر یک از شکل‌های زیر x چه عددی است؟



۲. در هر یک از شکل‌های زیر a چه عددی است؟

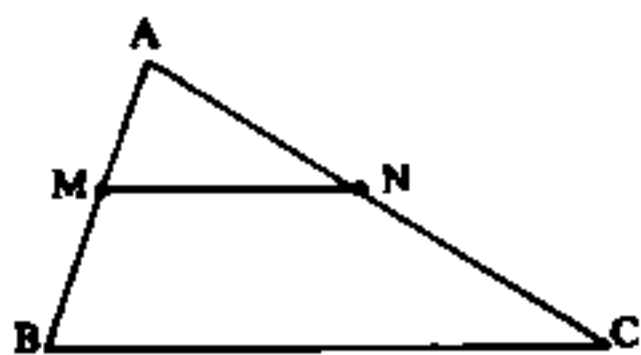


۳. دو پاره‌خط رسم کنید. سپس، یکی از آنها را به دو قسمت و دیگری را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.

۴. پاره‌خطی به طول ۷ سانتیمتر رسم کنید و آنرا به ۶ قسمت متساوی تقسیم کنید.

۵. پاره‌خطی به طول ۳ سانتیمتر رسم کنید و آنرا به ۷ قسمت متساوی تقسیم کنید.

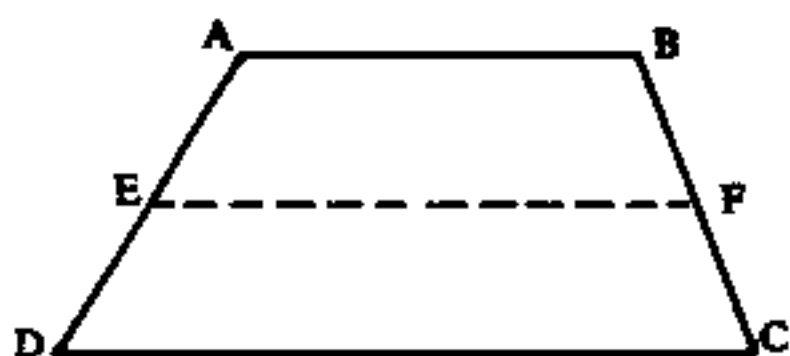
۶. در شکل مقابل M وسط AB است و $MN \parallel BC$.



آیا نقطه N وسط AC است؟

نسبت $\frac{AN}{NC}$ چقدر است؟

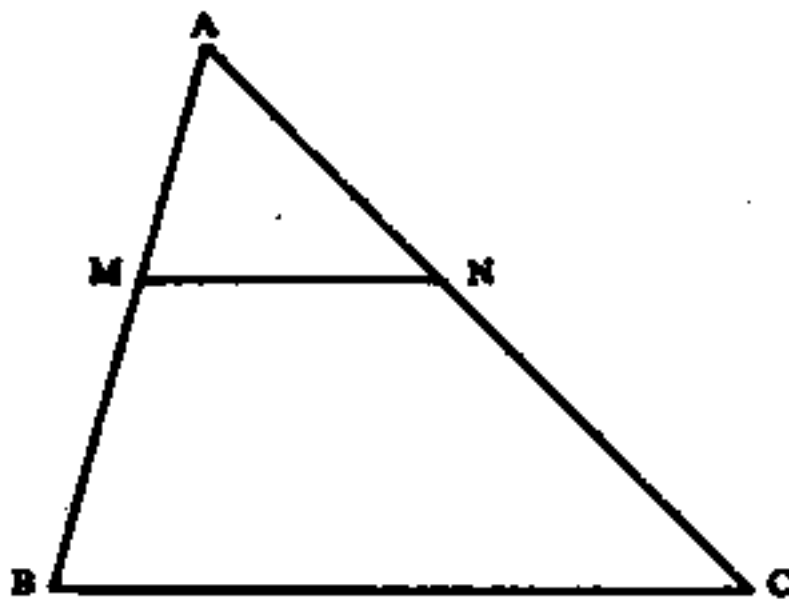
نسبت $\frac{AN}{AC}$ چقدر است؟



۷. نقطه E وسط ساق AD و EF با دو قاعده دوزنقه موازی است.

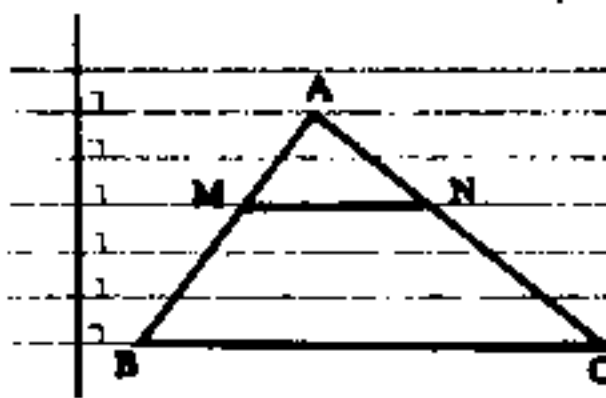
چرا نقطه F وسط ساق BC است؟

قضیه تالس



در شکل مقابل خط MN با ضلع BC موازی است و خطهای آبی متوازی و متساوی الفاصله اند. مشاهده می کنید که نسبت AM به MB برابر با $\frac{3}{4}$ و نسبت AN به NC هم برابر با $\frac{3}{4}$ است. می بینید که از موازی بودن MN با BC تناسب زیر حاصل می شود.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



۱. به شکل روبرو توجه کنید.

حالا مقدار هر یک از نسبتهای زیر را بنویسید و با توجه به نتیجه بدست آمده در هر سطر یک تساوی بنویسید.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \dots$$

$$\frac{AN}{AC} = \dots$$

$$\frac{MB}{AB} = \dots$$

$$\frac{NC}{AC} = \dots$$

۲. با توجه به شکل، تساویهای زیر را کامل کنید.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{\dots}$$

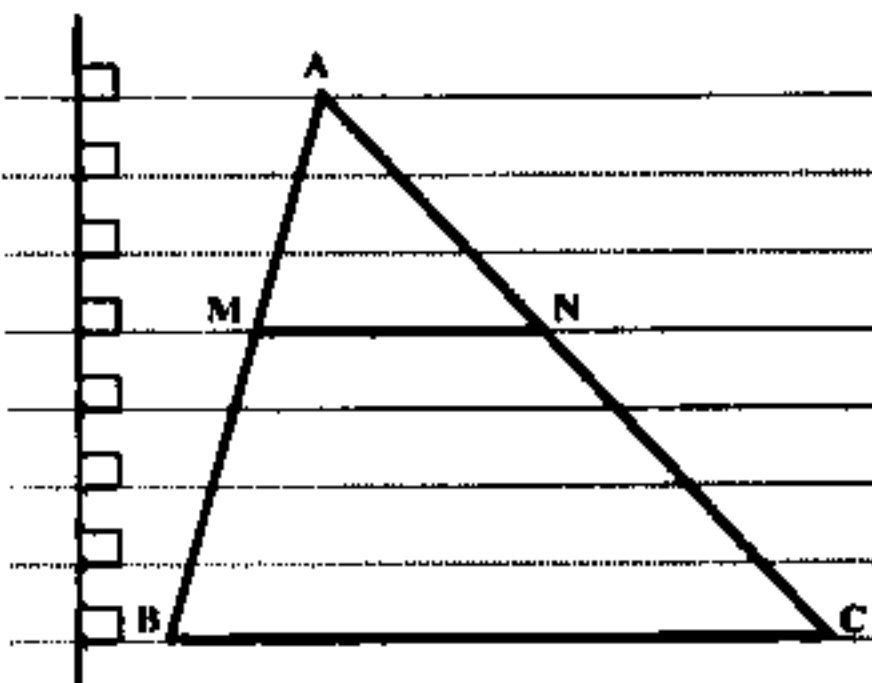
$$\frac{\dots}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{\dots} = \frac{AN}{AC}$$

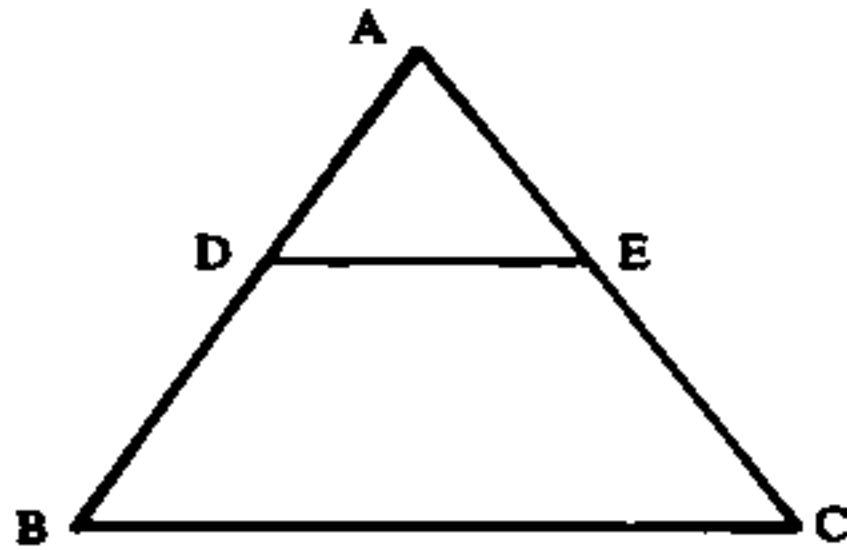
$$\frac{AM}{AB} = \frac{\dots}{AC}$$

$$\frac{MB}{AB} = \frac{\dots}{AC}$$

$$\frac{MB}{\dots} = \frac{NC}{AC}$$



این خاصیت که اگر خطی به موازات یکی از ضلعهای مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، روی آنها پاره‌خطهای متناسب جدا می‌کند. به قضیه تالس مشهور است.



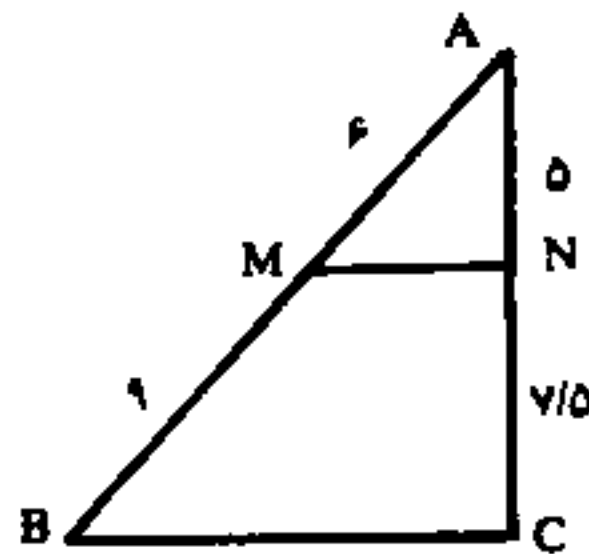
«تالس ریاضی‌دان یونانی (۶۲۴ - ۵۴۸ ق م)

برای اولین بار به این خاصیت پی برده است.» در شکل مقابل خط DE با ضلع BC

موازی است. در نتیجه:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

عکس قضیه تالس نیز درست است. یعنی، اگر خطی چنان رسم شود که دو ضلع مثلثی را قطع کند و روی آنها پاره‌خطهای متناسب جدا کند، آن خط با ضلع سوم موازی است.



مثلاً در شکل روبرو می‌بینیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ و

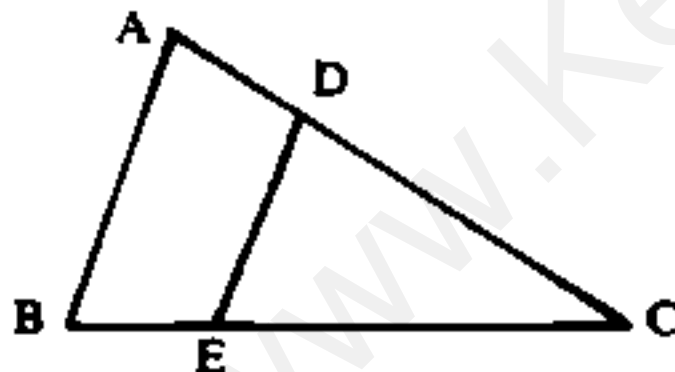
$$\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$$

از این تساوی نتیجه می‌گیریم که MN با

BC موازی است.



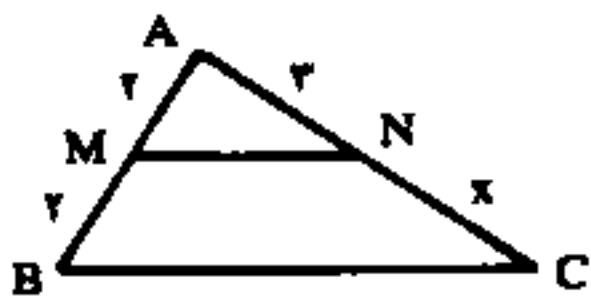
کلاس درس



۱. $AB \parallel DE$ و $\frac{CD}{DA} = \frac{5}{7}$. نسبت $\frac{CE}{EB}$ برابر با

چه عددی است؟

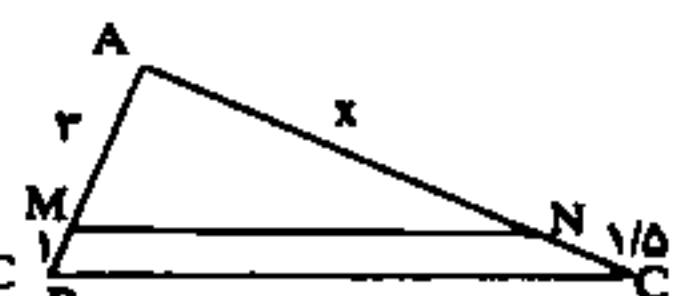
۲. در هر شکل، MN با BC موازی است. به کمک رابطه تالس تعیین کنید که x چه عددی است.



$x =$

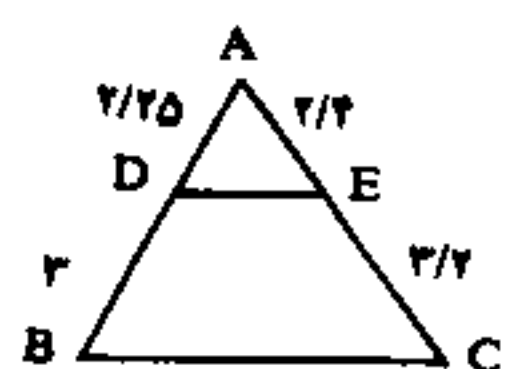
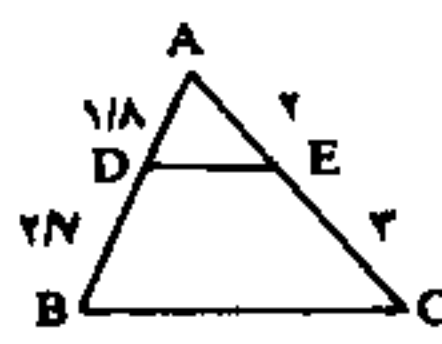
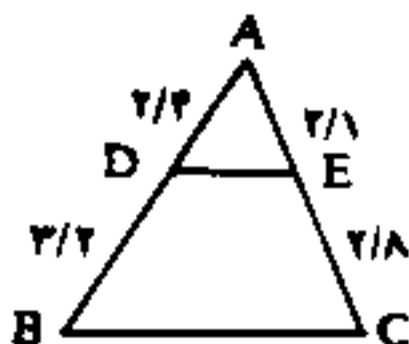


$x =$



$x =$

۳. در کدام شکل DE با BC موازی است؟



در شکل روبرو خط DE با ضلع BC موازی است. در نتیجه:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (۱)$$

همچنین خط EF با ضلع AB موازی است. پس،

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

و چون چهارضلعی $DEFB$ متوازی‌الاضلاع است پس، $DE = BF$ بنابراین:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

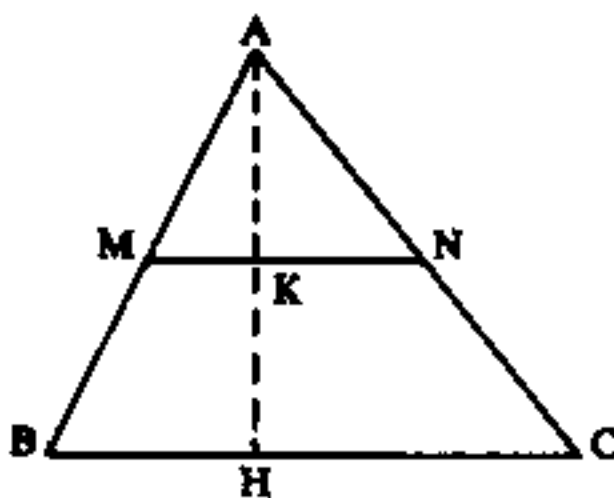
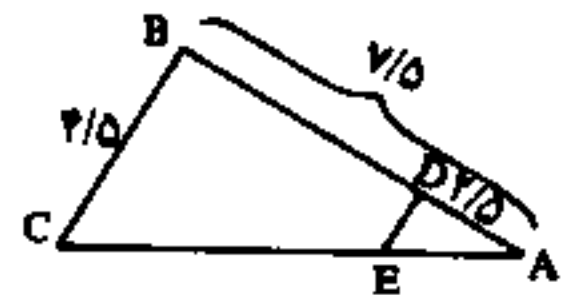
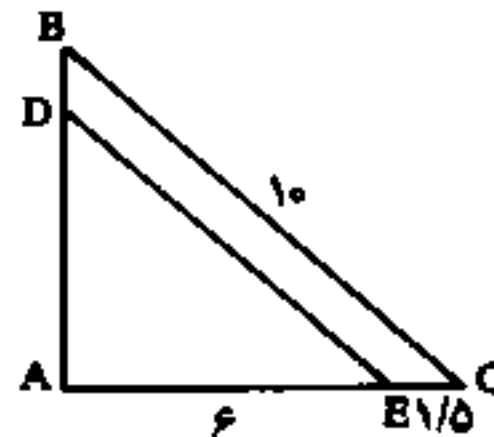
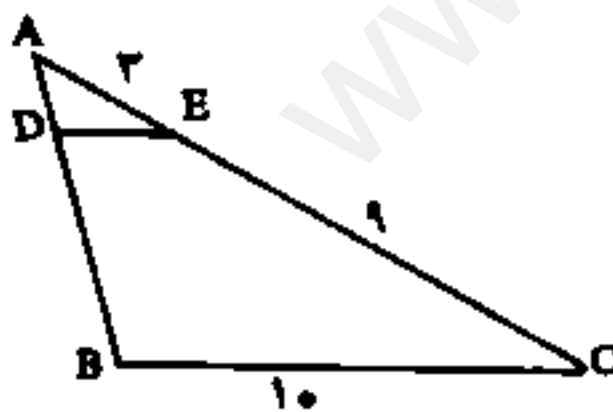
یعنی، اضلاع دو مثلث ABC و ADE نظیر به نظیر متناسبند.

به طور کلی: اگر خطی موازی با یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر آن را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می‌سازد که اضلاعش با اضلاع مثلث اول متناسب است.



کاردرکلاس

۱. در هر شکل DE با BC موازی است. اندازه DE را حساب کنید.



۲. M وسط ضلع AB و $MN \parallel BC$. اگر

اندازه BC برابر با ۱۰ سانتیمتر باشد، اندازه

پاره خط MN چقدر است؟

اگر اندازه ارتفاع AH برابر با ۸ سانتیمتر

باشد، اندازه ارتفاع AK چقدر است؟