

به تساویهای زیر توجه کنید.

$$(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = +8 - 5$$

$$(-9) - (-3) = (-9) + (+3) = -9 + 3$$

همان‌طور که در جمع گفته شد، برای جمع دو عدد صحیح، آنها را به دنبال یکدیگر می‌نویسیم.

از اینجا قاعده‌ای برای برداشتن پرانتز در تفریق بدست می‌آوریم:

$$(+8) - (+5) = +8 - 5$$

$$(-7) - (-4) = -7 + 4$$

$$(-9) - (-3) = -9 + 3$$

$$(+7) - (+4) = +7 - 4$$

با بکاربردن این قاعده، می‌توانید حاصل تفریق را سریعتر حساب کنید.



۱. عبارتهای زیر را با برداشتن پرانتز ساده کنید.

$$(-6) - (-7) =$$

$$(-6) + (+7) =$$

$$(+8) - (+12) =$$

$$(+8) + (-12) =$$

$$(-5) - (+11) =$$

$$(-5) + (-11) =$$

$$(+4) - (-6) =$$

$$(+4) + (+6) =$$

$$(-5) - (-5) =$$

$$(-5) + (+5) =$$

۲. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید. ابتدا با برداشتن پرانتز عبارت را ساده کنید.

$$(-9) - (-3) =$$

$$(+7) + (-5) =$$

$$(-12) + (-18) =$$

$$(+4) - (+18) =$$

$$(-32) + (-28) =$$

$$(+25) + (-36) =$$

$$(-65) - (-145) =$$

$$(-42) - (+58) =$$

۳. عبارتهای زیر را با برداشتن پرانتز ساده کنید.

$$\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{2}{3} - \frac{7}{3}$$

$$\left(+\frac{3}{8}\right) - \left(+\frac{5}{8}\right) =$$

$$\left(+\frac{3}{5}\right) - \left(+\frac{7}{5}\right) =$$

$$\left(+\frac{5}{9}\right) + \left(-\frac{8}{9}\right) =$$

## تمرین

۱. هر یک از عبارتهای زیر را ابتدا با برداشتن پرانتز ساده کنید و سپس حاصل آن را حساب کنید.

$$\begin{array}{lll} (-8) - (+12) & (+13) + (-5) & (+8) - (+17) \\ (-35) - (-15) & (+47) - (-12) & (-9) + (-25) \\ (+82) + (-118) & (+95) + (+35) & (-35) + (-45) \end{array}$$

۲. هر یک از عبارتهای زیر را تا می‌توانید ساده کنید.

$$\left( (+1) - (-8) \right) + \left( (+4) - (+6) \right) \quad \left( (+3) + (-5) \right) - \left( (+7) + (-2) \right)$$

۳. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید.

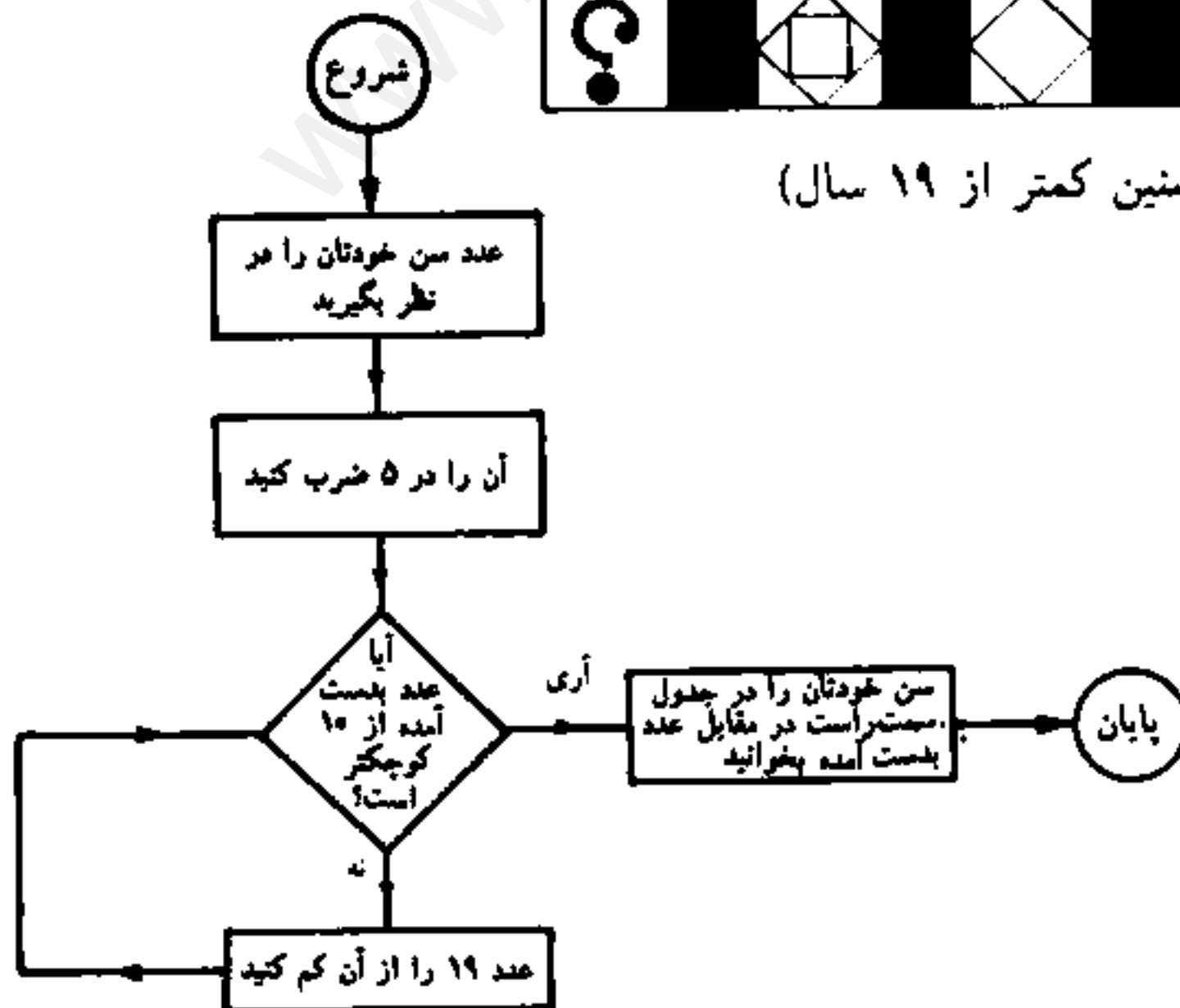
$$\begin{array}{llll} +14 - 9 & 5 + 8 & 5 - 12 & -8 + 17 \\ -8 + 7 & -5 - 12 & -5 - 8 & -9 + 17 \\ -25 - 35 & 82 - 182 & 125 - 275 & -325 + 129 \\ -138 - 62 & -39 + 39 & -25 + 48 & -35 - 25 \end{array}$$

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت‌هایی که قبلاً دیده‌اید بیان کنید. مشخص کنید که هر مجموعه کوچکترین عضو یا بزرگترین عضو دارد یا نه.

ا. مجموعه اعداد صحیح بین ۵- و ۱. ب. مجموعه اعداد صحیح مثبت. ج. مجموعه اعداد صحیح منفی.



(برای سنین کمتر از ۱۹ سال)



سن شما	عدد بدست آمده	سن شما	عدد بدست آمده
۱۵	-۱	۴	۱
۱۱	-۲	۸	۲
۷	-۳	۱۲	۳
۳	-۴	۱۶	۴
۱۸	-۵	۱	۵
۱۴	-۶	۵	۶
۱۰	-۷	۹	۷
۶	-۸	۱۳	۸
۲	-۹	۱۷	۹

## مجموعه اعداد گویا

در سال گذشته با کسرهایی به صورت  $\frac{2}{5}$ ،  $-\frac{7}{3}$ ،  $\frac{4}{-5}$  و نظایر آنها آشنا شدید. به طور کلی هر عددی به صورت  $\frac{a}{b}$  را که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی صحیح باشند و  $b \neq 0$ ، یک کسر می‌نامیم. هر عددی را که بتوان به شکل یک کسر نوشت یک عدد گویا است. ممکن است این سؤال برای شما پیش بیاید که مگر اعدادی هم هستند که نتوان آنها را به صورت یک کسر نوشت. می‌توان ثابت کرد که مثلاً  $\sqrt{2}$  را نمی‌توان به صورت یک کسر نوشت، یعنی کسری مساوی  $\sqrt{2}$  وجود ندارد. بعداً در این مورد صحبت بیشتری خواهیم داشت.

مجموعه اعداد گویا را با حرف  $\mathbb{Q}$  نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$5 \in \mathbb{Q}$  و  $-8 \in \mathbb{Q}$  و  $0/3 \in \mathbb{Q}$  و  $-4/25 \in \mathbb{Q}$  و  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$



۱. هر یک از اعداد زیر را به صورت یک کسر علامت‌دار بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

$$5 = \quad -8 = \quad -4/25 = \quad -0/3 =$$

۲. می‌دانیم  $\sqrt{2}$  عددی گویا نیست. کدام یک از اعداد زیر گویا هستند؟

$$\sqrt{4} \quad \sqrt{8} \quad \sqrt{50} \quad \sqrt{4/5} \quad \sqrt{2+1}$$

۳. درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$$

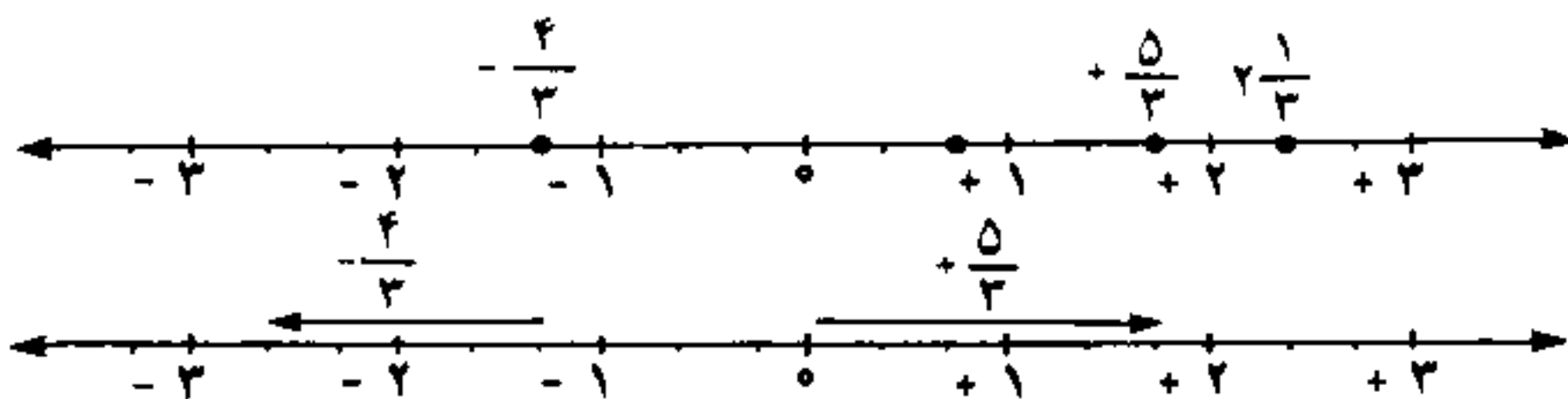
هر عدد صحیح یک عدد گویا است.

هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر متعارفی مثبت نوشت.

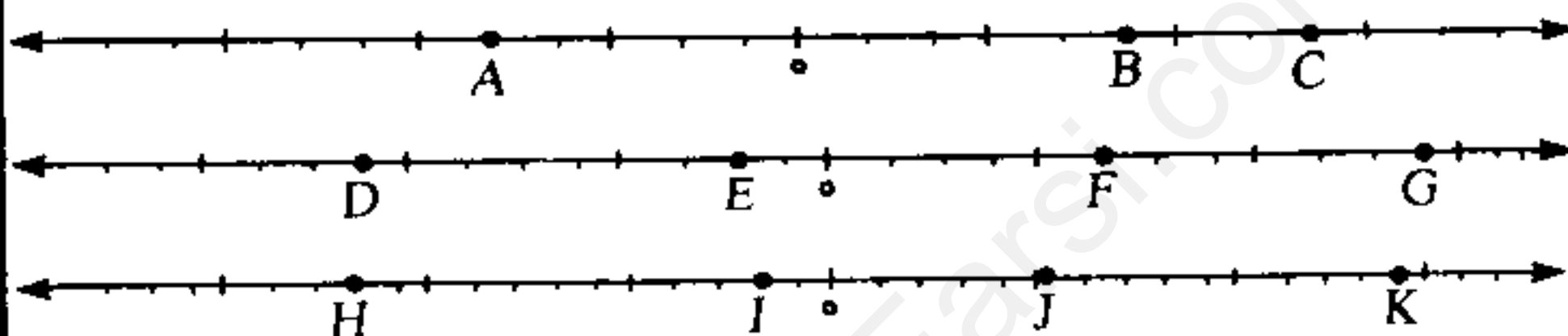
هر عدد گویای غیرصفر را می‌توان به صورت یک کسر متعارفی علامت‌دار نوشت.

غیر از اعداد گویا عددی وجود ندارد.

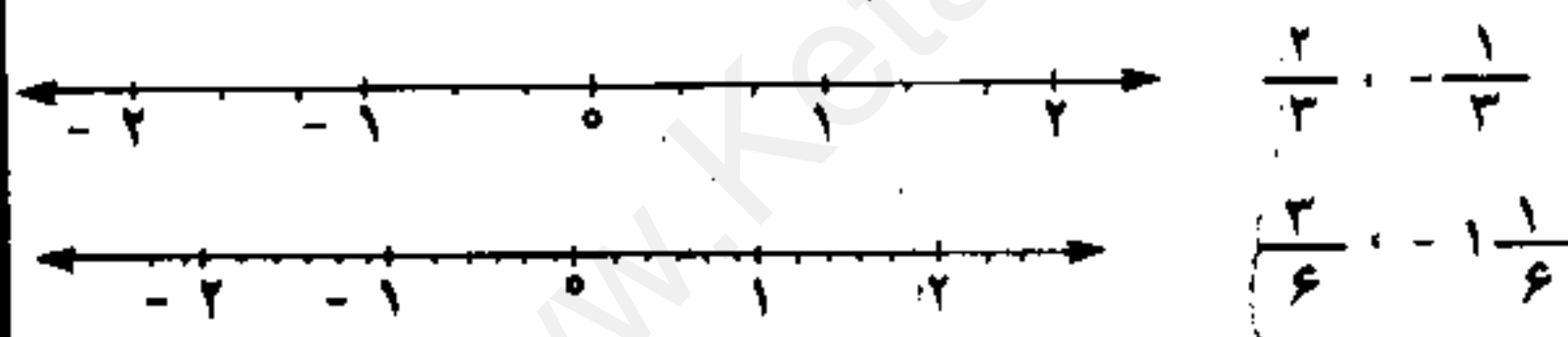
هر عدد گویا را می‌توان با نقطه‌ای روی محور یا با یک بردار مشخص ساخت.



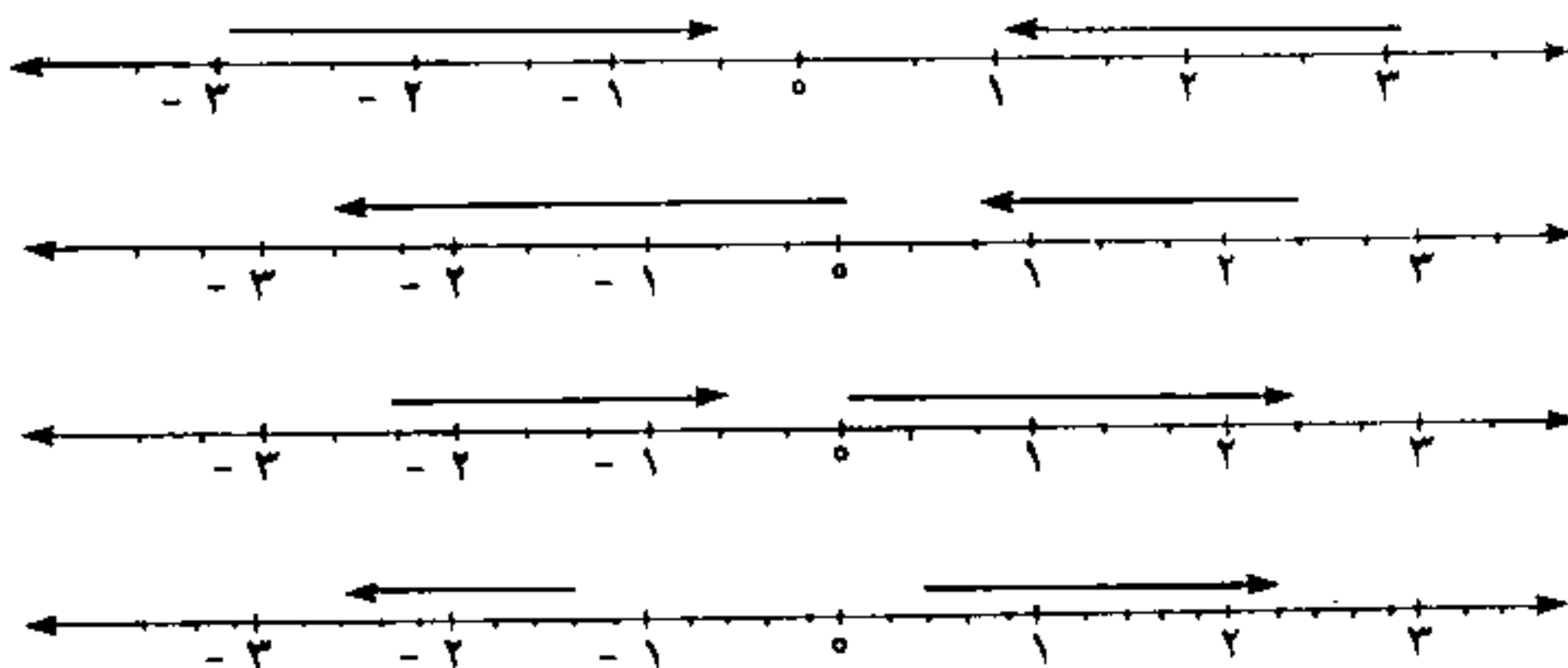
۱. عدد گویای متناظر با هر یک از نقاط مشخص شده را بنویسید.



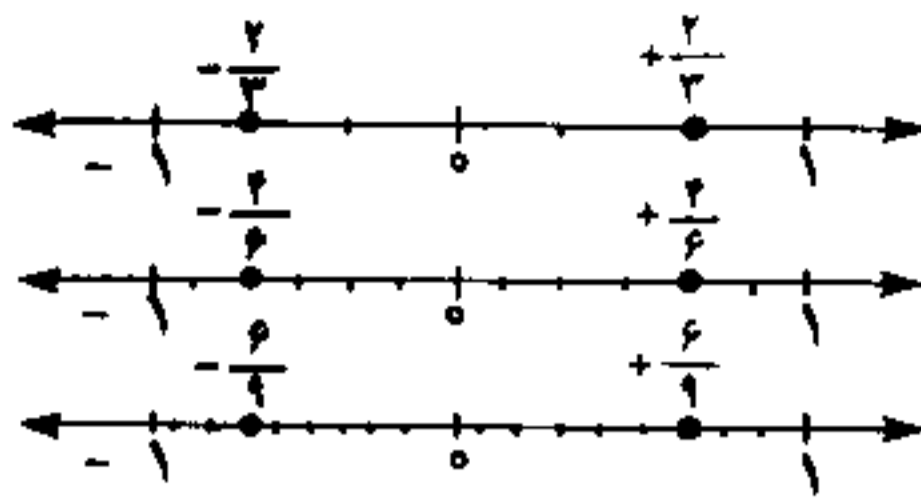
۲. نقطه نمایش هر عدد را روی محور کنار آن مشخص کنید.



۳. عدد متناظر با هر بردار را بنویسید.



## تساوی کسرها



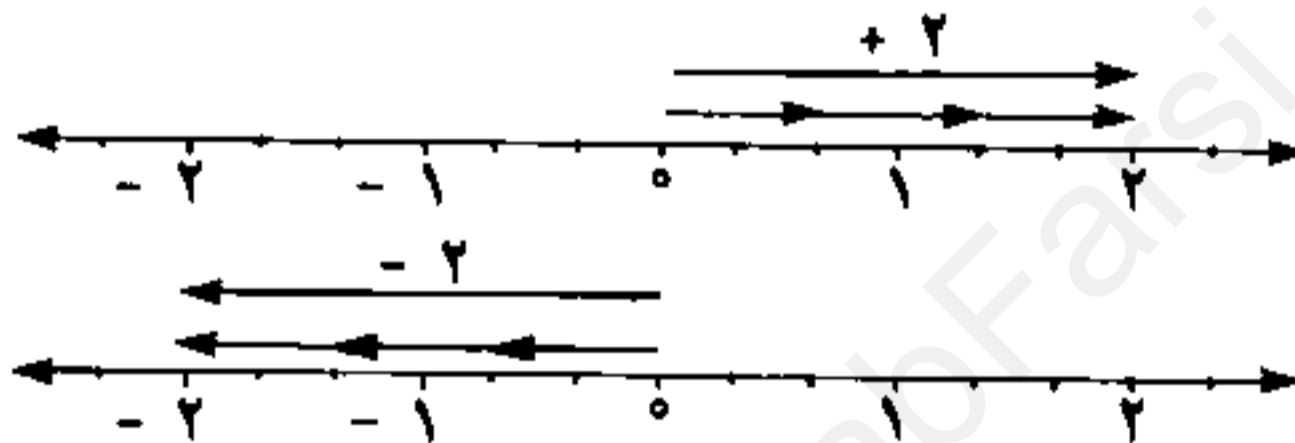
$$+\frac{2}{3} = +\frac{4}{6} = +\frac{6}{9} = \dots$$

$$-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6} = -\frac{6}{9} = \dots$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید می‌توان صورت و مخرج یک کسر (مثبت یا منفی) را در یک عدد ناصفر ضرب و یا در صورت امکان بر یک عدد تقسیم کرد.

$$-\frac{3}{5} = -\frac{12}{20} \quad , \quad +\frac{1}{2} = +\frac{6}{12}$$

اکنون با توجه به شکل‌های زیر نوعی دیگر از تساوی کسرها را می‌توان نوشت.



$$+\frac{2}{3} = \frac{+2}{3}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{-2}{3}$$

۱. هر یک از تساویهای زیر را با نوشتن سه کسر دیگر ادامه دهید.

$$-\frac{4}{7} = -\frac{8}{14} = \dots$$

$$+\frac{2}{5} = +\frac{4}{10} = \dots$$

$$+\frac{8}{3} = +\frac{16}{6} = \dots$$

$$-\frac{17}{11} = -\frac{34}{22} = \dots$$

۲. تساویهای زیر را کامل کنید.

$$-\frac{12}{15} = -\frac{\quad}{5}$$

$$\frac{8}{30} = \frac{4}{\quad}$$

$$-\frac{7}{21} = -\frac{1}{\quad}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{\quad}{3}$$

$$\frac{-4}{11} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$-\frac{5}{8} = \frac{\quad}{8}$$

$$\frac{-25}{42} = \frac{\quad}{6}$$

$$\frac{18}{63} = \frac{2}{\quad}$$

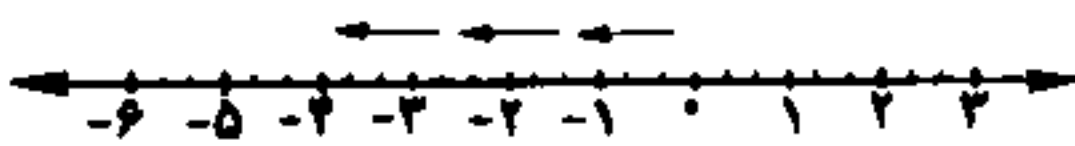
$$\frac{-6}{12} = \frac{\quad}{\quad}$$

تمرین

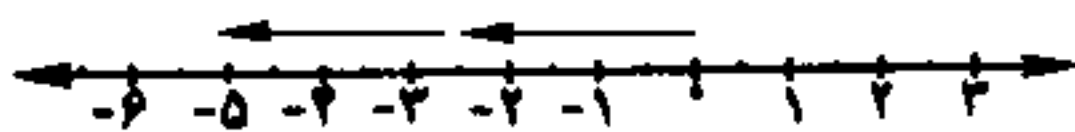
۱. یک محور رسم کنید و هر واحد آن را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنید. حالا نقطه نمایش هر یک از اعداد زیر را روی آن مشخص و نامگذاری کنید.

$$-\frac{8}{5} \quad -2\frac{3}{5} \quad +3\frac{1}{5} \quad -\frac{4}{5} \quad -3 \quad +2$$

۲. عدد متناظر با هر بردار را روی آن بنویسید و تساوی مربوطه را کامل کنید.



$$-\frac{4}{3} =$$



$$-\frac{5}{2} =$$

۳. تساویهای زیر را کامل کنید.

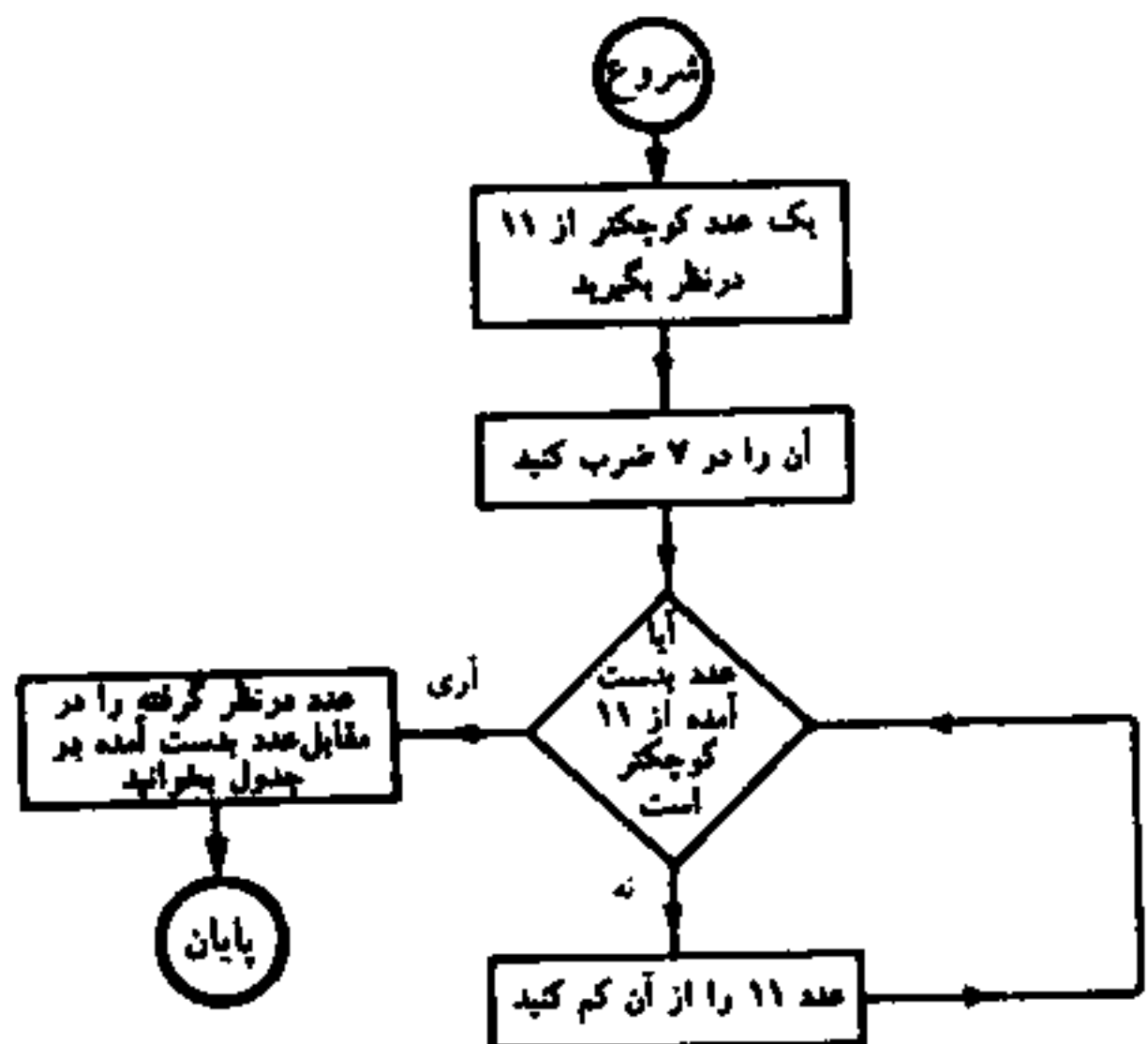
$$-\frac{4}{9} = -\frac{\quad}{27} \quad -\frac{8}{5} = \quad \quad -\frac{22}{56} = -\frac{6}{\quad}$$

۴. کسرهای زیر را با استفاده از بزرگترین مقسوم علیه مشترک صورت و مخرج ساده کنید.

$$\frac{25}{75} \quad -\frac{22}{56} \quad -\frac{90}{126} \quad \frac{85}{187}$$



عدد در نظر گرفته	عدد بدست آمده
۸	۱
۵	۲
۲	۳
۱۰	۴
۷	۵
۴	۶
۱	۷
۹	۸
۶	۹
۳	۱۰



## جمع و تفریق اعداد گویا

در جمع و تفریق کسرهای علامت‌دار، ابتدا با برداشتن پرانتز عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} (+\frac{5}{8}) - (-\frac{7}{8}) &= +\frac{5}{8} + \frac{7}{8} & (+\frac{5}{8}) + (-\frac{7}{8}) &= +\frac{5}{8} - \frac{7}{8} \\ (-\frac{3}{5}) + (-\frac{4}{5}) &= -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} & (-\frac{3}{5}) - (-\frac{4}{5}) &= -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

سپس حاصل عبارت ساده شده را با توجه به آنچه در مورد اعداد صحیح دیدید، بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} +\frac{5}{8} + \frac{7}{8} &= \frac{+5 + 7}{8} = +\frac{12}{8} \\ +\frac{5}{8} - \frac{7}{8} &= \frac{+5 - 7}{8} = -\frac{2}{8} \\ -\frac{3}{5} + \frac{4}{5} &= \frac{-3 + 4}{5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

در صورتی که مخرجها مساوی نباشند، مانند جمع و تفریق کسرهای متعارفی، ابتدا کسرها را به یک مخرج تحویل می‌کنیم و سپس حاصل عبارت بدست آمده را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} +\frac{5}{7} - \frac{3}{4} &= +\frac{20}{28} - \frac{21}{28} = \frac{+20 - 21}{28} = -\frac{1}{28} \\ +\frac{6}{5} + \frac{7}{8} &= +\frac{48}{40} + \frac{35}{40} = \frac{+48 + 35}{40} = \frac{83}{40} \end{aligned}$$

جمع و تفریق اعدادی که به صورت اعشاری نوشته شده‌اند، مانند اعداد صحیح است.

$$\begin{aligned} +0/5 - 0/85 &= -(0/85 - 0/5) = -0/35 \\ -2/3 - 5/8 &= -(2/3 + 5/8) = -8/1 \\ -12/3 + 7 &= -(12/3 - 7) = -5/3 \\ 25 - 18/4 &= 6/4 \end{aligned}$$



۱. هر یک از عبارتهای زیر را با برداشتن پرانتز ساده کنید.

$$\left(+\frac{7}{9}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) =$$

$$\left(\frac{7}{9}\right) - \left(-\frac{4}{9}\right) =$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) + \left(+\frac{8}{11}\right) =$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) - \left(+\frac{8}{11}\right) =$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{5}{9}\right) =$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) =$$

$$\left(+\frac{4}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) =$$

$$\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(+\frac{4}{15}\right) =$$

۲. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید. در صورت امکان جواب را ساده کنید.

$$+\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$$

$$-\frac{6}{11} - \frac{8}{11}$$

$$+\frac{3}{17} + \frac{9}{17}$$

$$+\frac{9}{13} - \frac{5}{13}$$

$$-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{15}{8}$$

۳. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را حساب کنید. از کوچکترین مخرج مشترک استفاده کنید.

$$-\frac{4}{15} + \frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{5}{12}$$

$$+\frac{6}{35} - \frac{5}{22}$$

$$+\frac{15}{28} - \frac{1}{4}$$

$$-2 - \frac{5}{3}$$

$$-2 + \frac{3}{5}$$

۴. حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید. در هر مورد که لازم است از قرینه‌یابی استفاده کنید.

$$-0/25 + 0/75 =$$

$$-0/9 + 0/3 =$$

$$12/8 - 15/4 =$$

$$-25 + 7/2 =$$

$$-0/37 + 0/42 =$$

$$-0/52 - 2/7 =$$



## ضرب و تقسیم

×	+	-
+	+	-
-	-	+

برای بدست آوردن حاصلضرب دو عدد، ابتدا علامت حاصلضرب را تعیین می‌کنیم.

$$(+۲) \times (-۳) = -۶$$

$$(-۵) \times (-۴) = +۲۰$$

$$(+۰/۲) \times (-۰/۸) = -۰/۱۶$$

$$(-۰/۵) \times (-۰/۴) = + ۰/۲۰$$

$$\left(+\frac{۲}{۵}\right) \times \left(-\frac{۴}{۷}\right) = -\frac{۱۲}{۳۵}$$

$$\left(-\frac{۳}{۴}\right) \times \left(-\frac{۴}{۵}\right) = +\frac{۳}{۵}$$

برای محاسبه حاصل تقسیم دو عدد، عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب می‌کنیم، ولی می‌توانیم ابتدا علامت حاصل را تعیین کنیم.

$$\left(+\frac{۲}{۳}\right) \div \left(-\frac{۵}{۷}\right) = -\frac{۲}{۳} \times \frac{۷}{۵} = -\frac{۱۴}{۱۵}$$

$$\left(-\frac{۶}{۳۵}\right) \div \left(-\frac{۸}{۲۱}\right) = +\frac{۶}{۳۵} \times \frac{۲۱}{۸} = +\frac{۹}{۲۰}$$

$$(-۹) \div (+۵) = -۹ \times \frac{۱}{۵} = -\frac{۹}{۵}$$

$$(-۰/۸) \div (-۰/۳) = +\frac{۰/۸}{۰/۳} = +\frac{۸}{۳}$$

اکنون با توجه به تقسیم، می‌توان کسرهایی را که صورت یا مخرج آنها منفی است

به صورت ساده‌تر نوشت:

$$\frac{-۳}{۵} = (-۳) \div ۵ = -\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{۳}{-۵} = ۳ \div (-۵) = -\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{-۴}{-۷} = (-۴) \div (-۷) = \frac{۴}{۷}$$



$$\frac{-۳}{۵} = \frac{۳}{-۵} = -\frac{۳}{۵}$$



$$\frac{-۴}{-۷} = \frac{۴}{۷}$$



۱. حاصل ضربهای زیر را بدست آورید.

$$(+ 5) \times (- 8)$$

$$(+ 12) \times (+ 6)$$

$$(- 9) \times (- 4)$$

$$(- 7) \times (+ 3)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$\left(+\frac{4}{9}\right) \times \left(-\frac{6}{8}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \times (+ 14)$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right) \times \left(+\frac{11}{6}\right)$$

$$(+ 0/4) \times (- 8)$$

$$(- 0/25) \times (- 4)$$

۲. حاصل تقسیمهای زیر را حساب کنید.

$$\left(-\frac{2}{5}\right) \div \left(+\frac{3}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{5}{7}\right)$$

$$\left(-\frac{1}{9}\right) \div (- 8)$$

$$(+ 3) \div (- 4)$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right) \div \left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$1 \div \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$(+ 0/4) \div (- 5)$$

$$(- 0/84) \div 4$$

۳. هر یک از عددهای زیر را به صورت یک کسر علامتدار بنویسید.

$$\frac{- 8}{5}$$

$$\frac{4}{- 9}$$

$$\frac{- 3}{- 7}$$

$$-\left(\frac{- 1}{- 6}\right)$$

$$-\left(\frac{- 2}{+ 11}\right)$$

$$-\left(\frac{12}{- 13}\right)$$

۴. حاصل ضربهای زیر را بدست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

$$(- 2) \times (+ 15)$$

$$45 \times (- 12)$$

$$35 \times (- 12)$$

$$(- 25) \times (- 18)$$

$$\left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$\left(-\frac{12}{35}\right) \times \left(+\frac{5}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{9}{5}\right) \times \left(+\frac{14}{3}\right)$$

$$(+ 8) \times \left(-\frac{1}{28}\right)$$

## تمرین

۱. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید. ابتدا با برداشتن پرانتز عبارتها را ساده کنید.

$$\begin{array}{lll} (+\frac{3}{8}) + (-\frac{7}{8}) & (-\frac{4}{9}) + (-\frac{1}{9}) & (+\frac{5}{11}) - (-\frac{2}{11}) \\ (-\frac{6}{17}) + (-\frac{-8}{17}) & (+\frac{2}{13}) + (-\frac{9}{13}) & (-\frac{8}{15}) + (-\frac{7}{15}) \\ (-\frac{1}{4}) + (-\frac{5}{6}) & (-\frac{2}{8}) + (+\frac{5}{12}) & (-\frac{9}{15}) + (-\frac{5}{18}) \\ (-\frac{12}{35}) - (+\frac{11}{32}) & (-\frac{2}{63}) - (-\frac{5}{72}) & (+\frac{5}{77}) + (+\frac{7}{55}) \\ (-\frac{7}{12}) + (-3) & (-\frac{7}{12}) + (+3) & (+\frac{2}{5}) - (+2) \end{array}$$

۲. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$\begin{array}{lll} (-7) \times (-8) & (+5) \times (-9) & (-2) \times (+6) \\ (-\frac{2}{5}) \times (-\frac{2}{7}) & (+\frac{2}{11}) \times (-\frac{6}{9}) & (-\frac{1}{10}) \times (+\frac{8}{12}) \\ (-12) \div (+2) & (-15) \div (-5) & (+65) \div (-13) \\ (-8) \div (+5) & (+2) \div (-17) & (-12) \div (-28) \\ (-\frac{2}{5}) \div (+\frac{2}{5}) & (-\frac{7}{9}) \div (-\frac{28}{27}) & (+8) \div (-\frac{1}{2}) \end{array}$$

۳. هر یک از عددهای زیر را به صورت یک کسر علامتدار بنویسید.

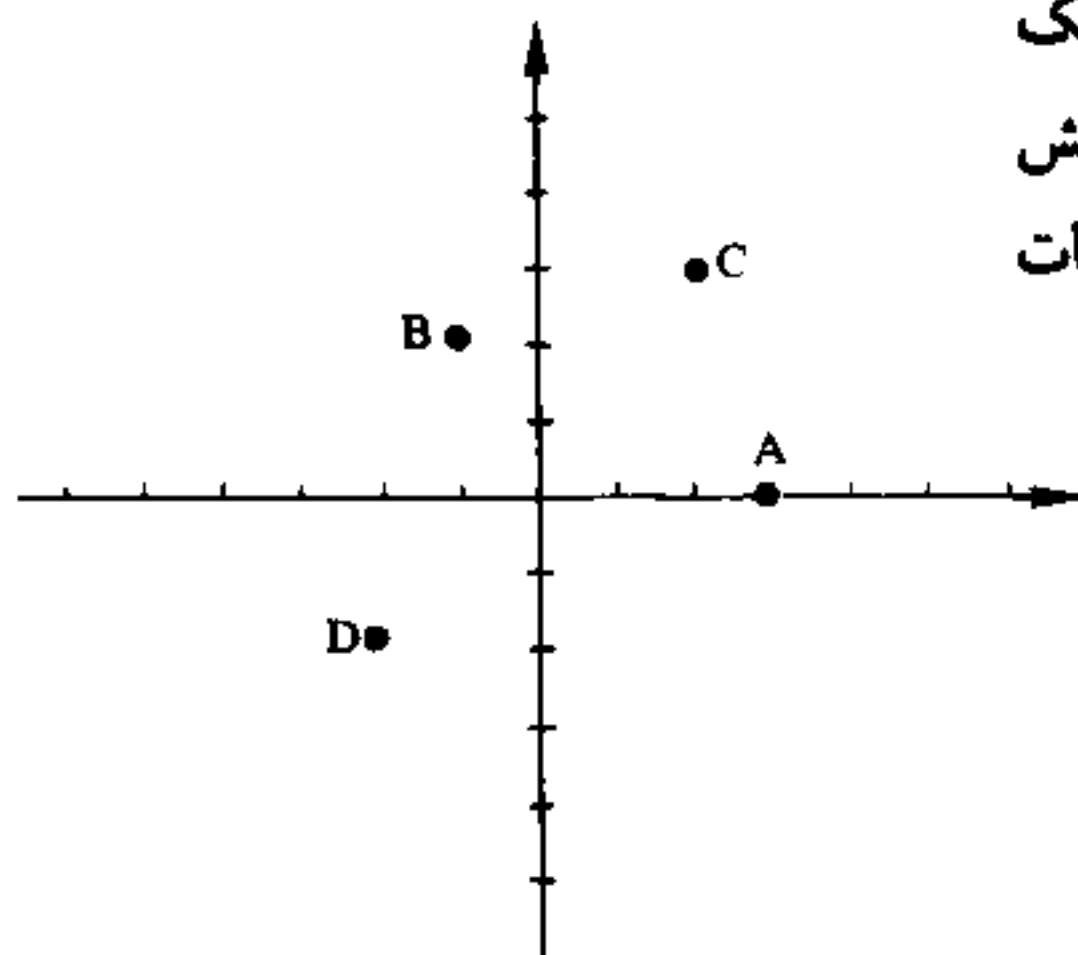
$$-(\frac{-5}{8}) \quad -(\frac{12}{-19}) \quad -(\frac{-5}{-13}) \quad -(\frac{2}{5})$$

۴. حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} [(+\frac{2}{5}) - (+\frac{2}{5})] \times \frac{5}{12} & (-\frac{2}{5}) \div (-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} - \frac{7}{5} + \frac{4}{5} & -\frac{2}{8} + \frac{1}{6} - \frac{8}{9} + 1 \end{array}$$

## بردار

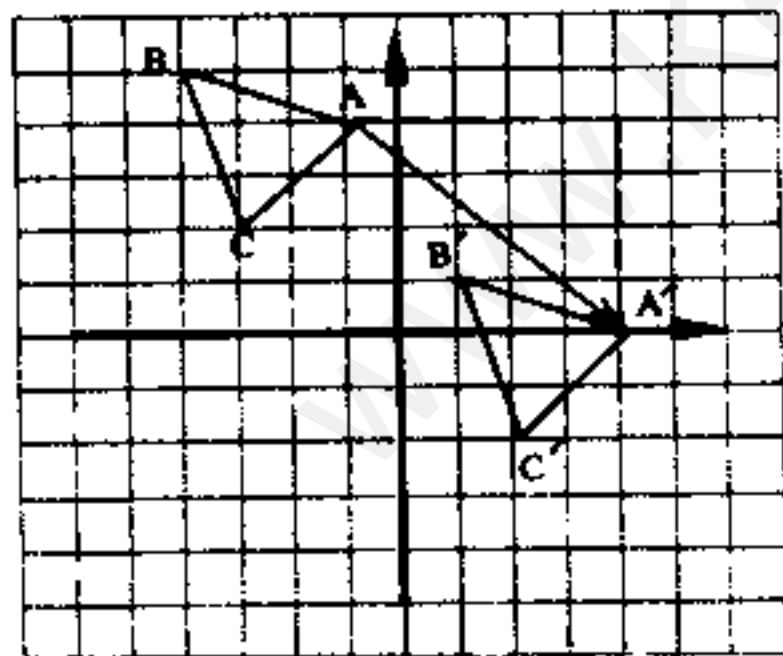
در سال گذشته دیدید که، برای مشخص کردن نقاط صفحه، می‌توانیم دو محور عمود بر هم با مبدأ مشترک در صفحه رسم کنیم. این دو محور را یک دستگاه مختصات می‌نامیم. با داشتن یک دستگاه مختصات، هر نقطه با مختصاتش مشخص می‌شود. در شکل مقابل مختصات نقطه‌های  $A$  و  $B$  به صورت زیر است:



$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مختصات نقطه‌های  $C$  و  $D$  را بنویسید.

نقطه‌های  $E = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$  و  $F = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  را در دستگاه مختصات بالا مشخص کنید.

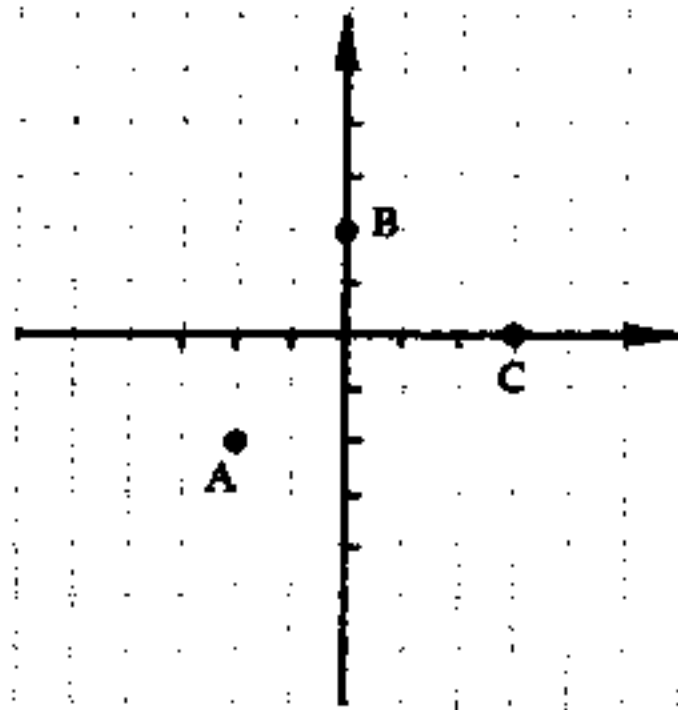


در شکل روبرو، مثلث  $ABC$  با بردار  $\vec{AA'}$  انتقال داده شده است.

برای رسیدن از  $A$  به  $A'$ ، باید ۵ واحد در جهت مثبت محور  $x$ ها و ۴ واحد در جهت منفی محور  $y$ ها برویم، یعنی طول نقطه  $A$  را با  $(+5)$  و عرض آن را با  $(-4)$  جمع کنیم:

$$\vec{AA'} = \begin{bmatrix} +5 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ است؛}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$



۱. با استفاده از شکل مقابل:

آ. مختصات نقاط  $A$ ،  $B$  و  $C$  را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}.$$

ب. نقاط با مختصات زیر را در شکل مشخص کنید.

$$D = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

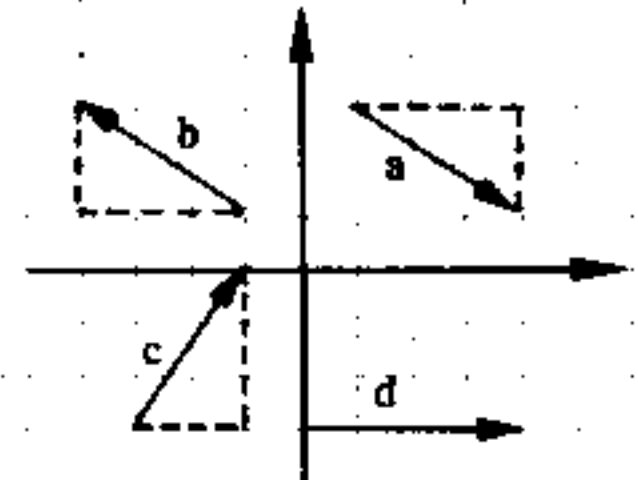
ج. بردارهای  $\overrightarrow{AB}$ ،  $\overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{AC}$  را رسم کنید و مختصات آنها را پیدا کنید.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}.$$

۲. مختصات هریک از بردارهای زیر را بدست آورید.

$$a = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad d = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$



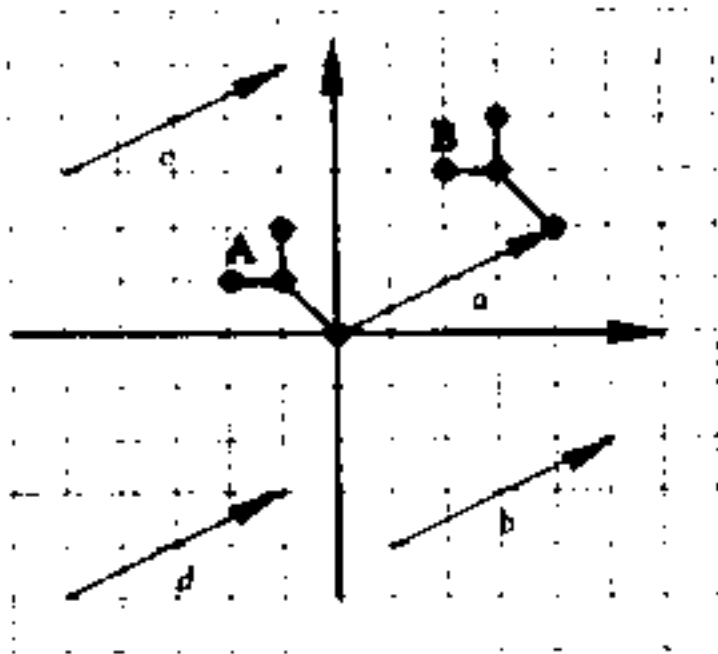
۳. مختصات ابتدا و انتهای هریک از بردارهای تمرین ۲ را پیدا کنید و متناظر با هر بردار یک جمع بنویسید.

۴. در هریک از قسمتهای زیر، مختصات نوشته نشده را بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

## تساوی بردارها



در شکل مقابل بردارهای رسم شده موازی، هم اندازه و هم جهت هستند. اگر شکل A را با بردار a انتقال دهید، شکل B بدست می آید. از انتقال شکل A با هر یک از بردارهای دیگر هم همان شکل B نتیجه می شود. این بردارها همه یک انتقال را انجام می دهند. این بردارها باهم مساویند.

$$a = b = c = d$$



کاردکلاس

۱. مختصات بردارهای شکل بالا را بدست آورید.

$$a = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

۲. جمع متناظر با هر بردار را بنویسید.

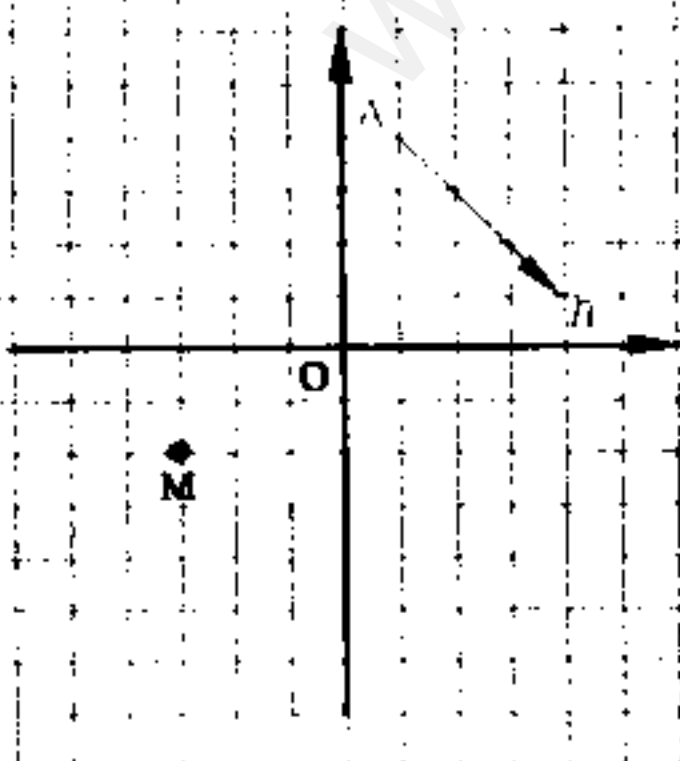
۳. مختصات بردار انتقال  $\overrightarrow{AB}$  را بدست آورید.

$$\overrightarrow{AB} =$$

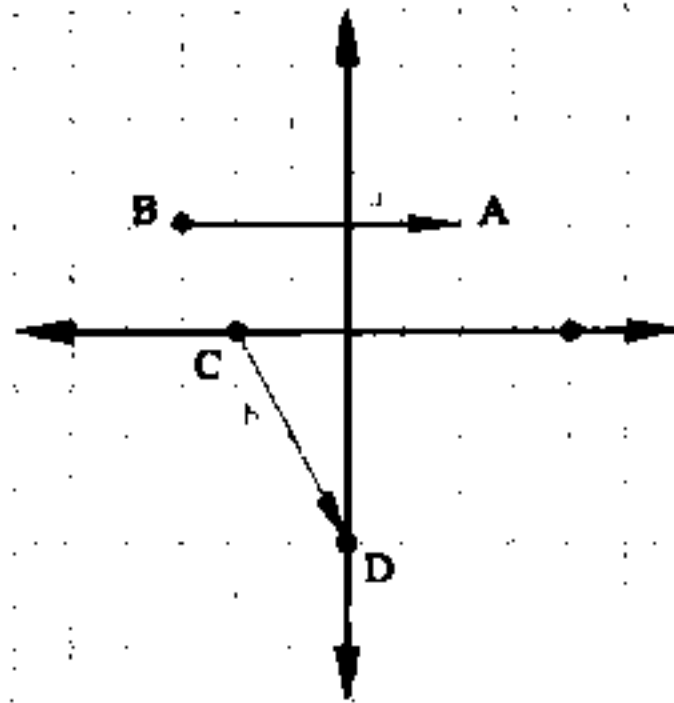
۴. از نقطه O، بردار  $\overrightarrow{OC}$  را مساوی  $\overrightarrow{AB}$  رسم کنید و تساویهای زیر را کامل کنید.

$$\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

۵. از نقطه M بردار  $\overrightarrow{MN}$  را مساوی  $\overrightarrow{AB}$  رسم کنید و با توجه به این بردار یک تساوی جمع بنویسید.



## تمرین



۱. با استفاده از شکل روبرو؛

آ. مختصات نقاط داده شده را بنویسید.

ب. مختصات بردارهای رسم شده را بنویسید.

ج. متناظر با هر بردار، و با استفاده از مختصات

ابتدا و انتهای آن، یک جمع بنویسید.

۲. محورهای مختصات را رسم کنید و نقاط زیر را روی آن مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حالا بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  را رسم کنید و مختصات آنها را بدست آورید.

آیا این دو بردار مساویند؟ چهار ضلعی  $ACDB$  چه نوع چهار ضلعی است؟

۳. یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید و نقاط  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

را مشخص کنید. سپس بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  را رسم کنید و مختصاتشان

را بدست آورید. متناظر با هریک از بردارهای  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  یک جمع بنویسید.

۴. حاصل جمعها و تفریقهای زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} =$$

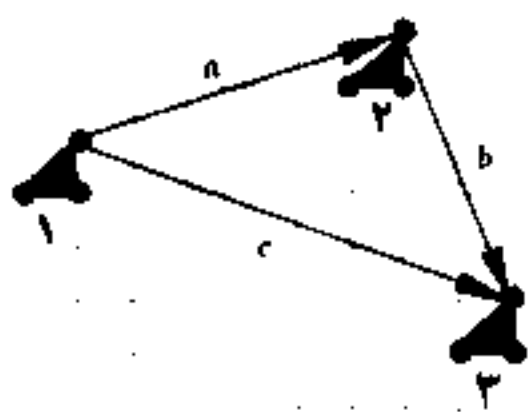
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \quad \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

۵. در شکل مربوط به تمرین ۱، از مبدأ مختصات، بردار  $\vec{OM}$  را مساوی بردار  $\vec{CD}$  رسم کنید.

مختصات بردار  $\vec{OM}$  و نیز مختصات نقطه  $M$  را حساب کنید.

## جمع بردارها



به شکل مقابل توجه کنید. اگر مثلث ۱ را توسط بردار  $a$  و سپس توسط بردار  $b$  انتقال دهیم مثلث ۳ بدست می‌آید. مشاهده می‌کنید که نتیجه با انتقال ۱ توسط بردار  $c$  یکی است. بنابراین

$$a + b = c$$

این نتیجه، با توجه به مختصات بردارها هم واضح است.

$$a = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

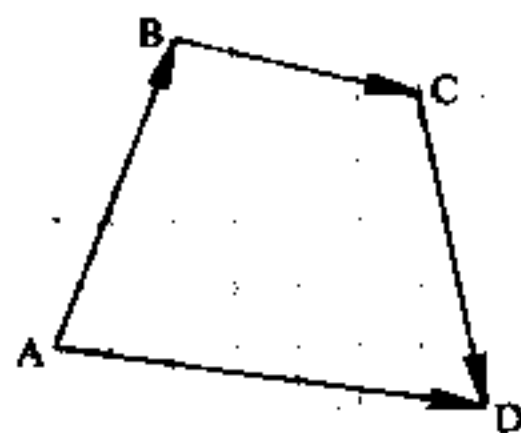
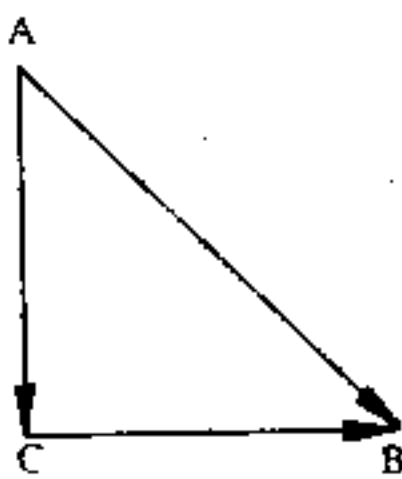
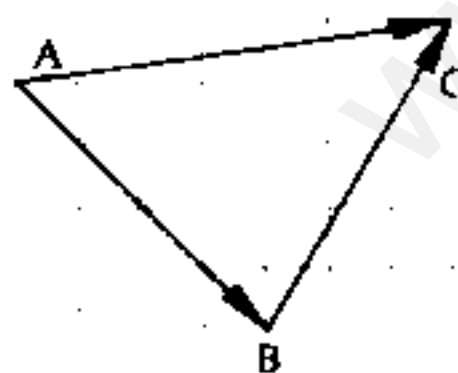
$$c = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \end{bmatrix}$$



کارد کلاس

۱. با توجه به هر یک از شکل‌های زیر، ابتدا یک تساوی جمع برداری بنویسید. سپس با بدست آوردن مختصات بردارها، تساوی متناظر را برای مختصاتشان بنویسید.



۲. حاصل جمعهای زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} =$$





برای بدست آوردن حاصلجمع دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$ ، ابتدا از نقطه  $A$  برداری مساوی  $\vec{OB}$  رسم می‌کنیم و آن را  $\vec{AC}$  می‌نامیم. اینک حاصلجمع دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$  با حاصلجمع دو بردار  $\vec{OA}$  و  $\vec{AC}$  یکی است.

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

چهار ضلعی  $OACB$  یک متوازی‌الاضلاع است (چرا؟). بنابراین برای بدست آوردن حاصلجمع دو بردار با ابتدای مشترک، می‌توانیم قطر متوازی‌الاضلاعی را که روی آن دو بردار رسم می‌شود بدست آوریم. این قاعده، روش متوازی‌الاضلاع نامیده می‌شود.

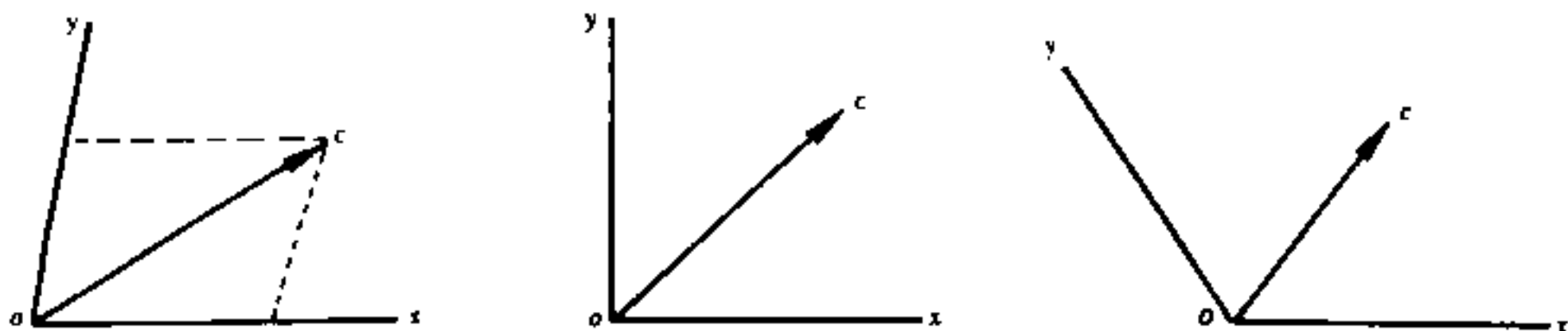


کاردرکلاس

۱. در هر یک از حالت‌های زیر، بردار حاصلجمع دو بردار  $a$  و  $b$  را رسم کنید و یک تساوی جمع برداری بنویسید. بردار حاصلجمع را  $c$  بنامید.



۲. در هر شکل، روی نیم‌خط‌های  $OY$  و  $OX$  دو بردار  $OA$  و  $OB$  را طوری مشخص کنید که حاصلجمع آنها مساوی بردار  $OC$  شود.



## ضرب یک عدد در یک بردار

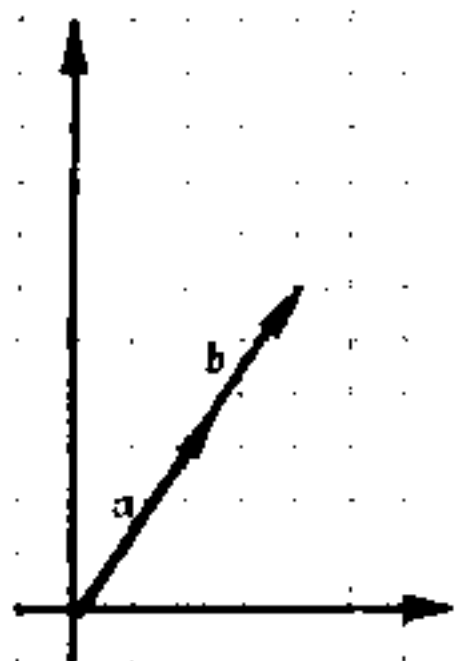
بردارهای  $a$  و  $b$  در یک امتداد هستند و همجهت، اما طول  $b$  دو برابر طول  $a$  است.

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b = 2a \quad \text{و}$$



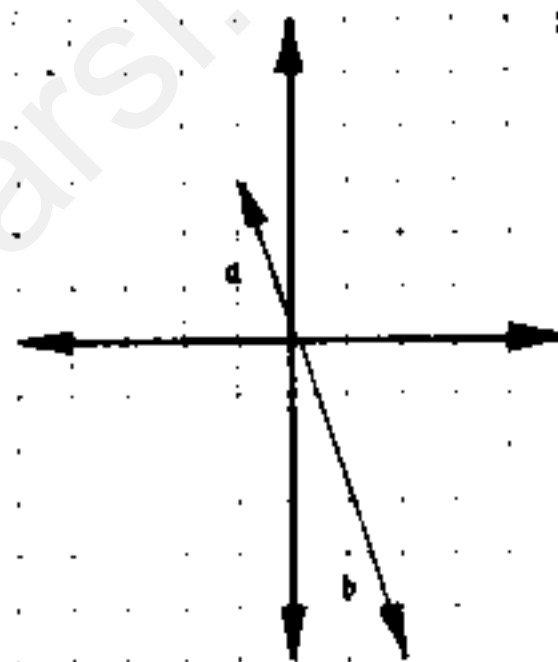
در شکل روبه‌رو، بردار  $b$  در امتداد بردار  $a$  است، ولی در خلاف جهت آن. طول  $b$  دو برابر طول  $a$  است. با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنید که

$$a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

بنابراین،

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$b = (-2)a \quad \text{و}$$



در شکل مقابل، بردار  $b$  قرینه  $a$  است؛

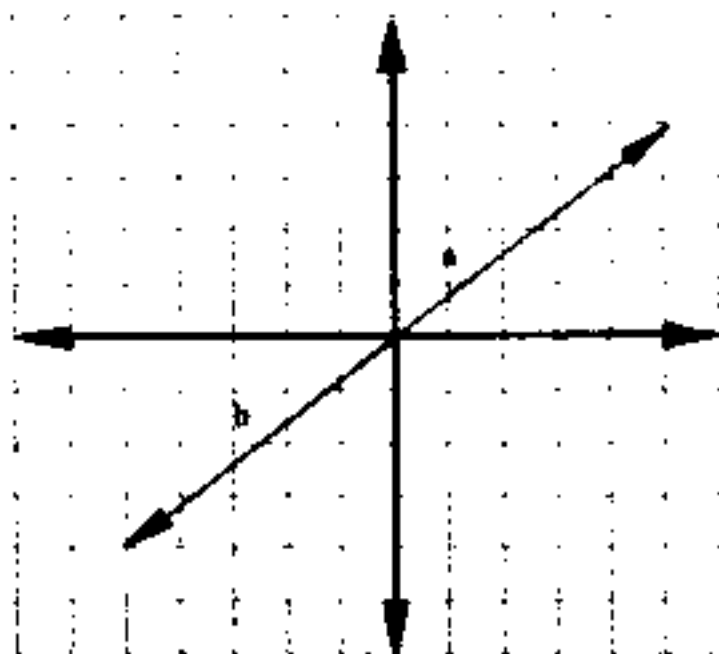
$$b = -a$$

با توجه به مختصات بردارها همین نتیجه بدست می‌آید.

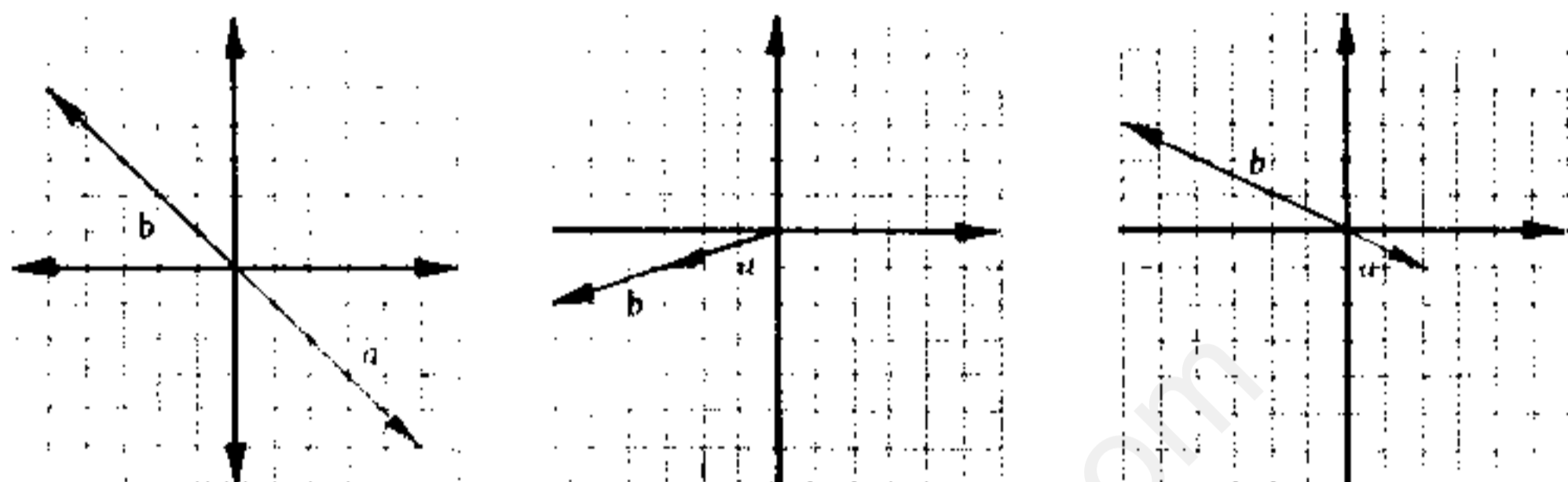
$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$b = -a$$



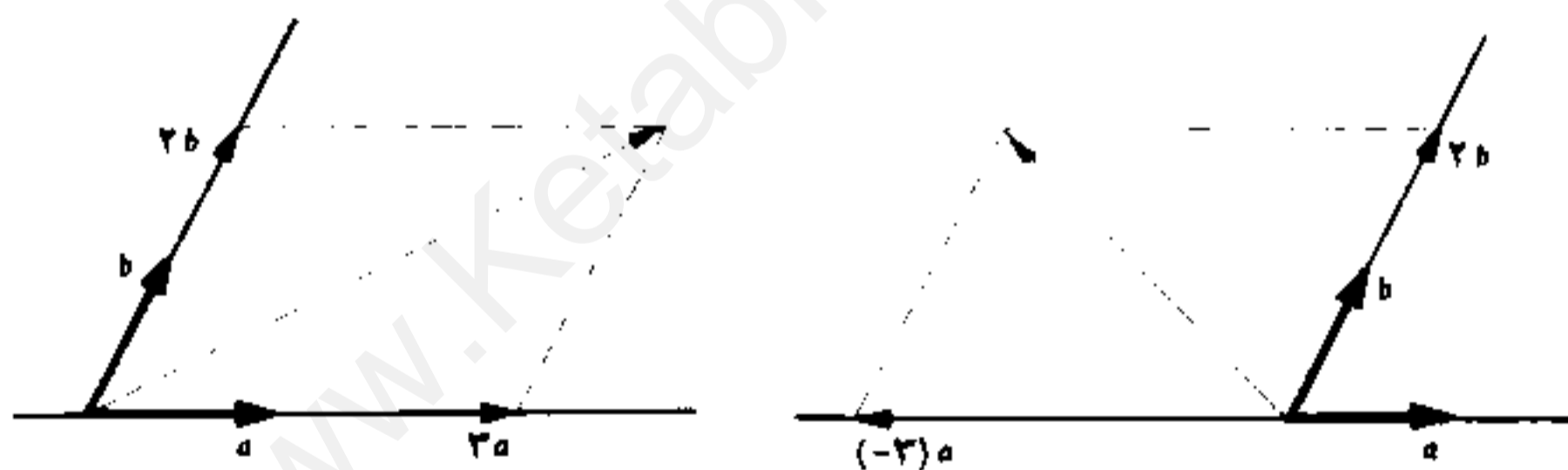
۱. با توجه به هر شکل، ابتدایک تساوی برداری بنویسید. سپس بجای هر بردار مختصاتش را قرار دهید و تساوی متناظر مختصاتی را بنویسید.



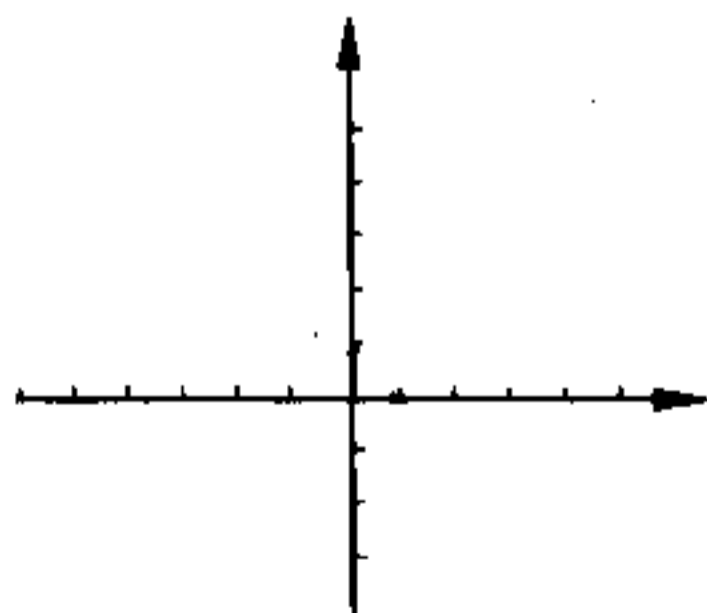
$$b = -a$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

۲. در هر یک از شکلهای زیر، بردار  $c$  را بر حسب بردارهای  $a$  و  $b$  بنویسید.

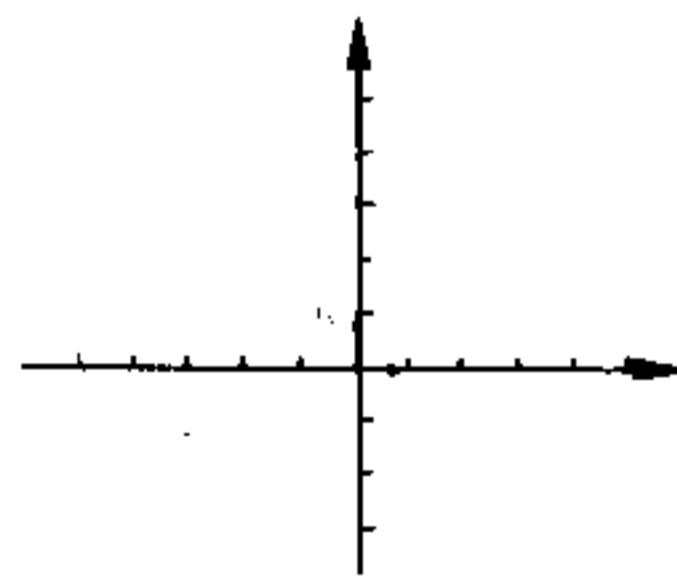


۳. با توجه به تمرین ۲ در هر قسمت بردارهای داده شده را رسم کنید.



$$c = 3a + 2b$$

$$d = (-2)a + 3b$$



$$c = 2a + (-2)b$$

$$d = (-2)a + b$$

## تمرین

۱. حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$- \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (-2) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad (-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix} + (-5) \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \quad (-2) \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲. در هر یک از موارد زیر، مختصات بردار  $b$  و بردار  $a + b$  را حساب کنید.

$$.b = (-4)a \text{ و } a = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{آ. } .b = 4a \text{ و } a = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$.b = -a \text{ و } a = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب. } .b = -a \text{ و } a = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$.b = 8a \text{ و } a = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ج. } .b = \frac{1}{2}a \text{ و } a = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

۳. در هر یک از قسمتهای زیر، بردارهای  $a, b, c, d, e$  را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و مختصات بردار  $c$  را حساب کنید.

$$.c = a + b \quad , \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad a = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{آ.}$$

$$.c = a + b \quad , \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ب.}$$

$$.c = 5d + 4e \quad , \quad e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ج.}$$

$$.c = 7d + (-3)e \quad , \quad e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{د.}$$

$$.c = (-6)d + 2e \quad , \quad e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ه.}$$

۴. در هر یک از معادله‌های زیر، مختصات بردار  $x$  را تعیین کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{آ.} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(-3)x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \text{ب.} \quad 4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} \quad \text{ج.}$$

## بردارهای واحد مختصات

بردارهای  $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  را بردارهای واحد مختصات می‌نامیم.

هر برداری از صفحه را می‌توانیم برحسب این بردارها بدست آوریم.

مثلاً در شکل مقابل:  $a = 5i + 3j$

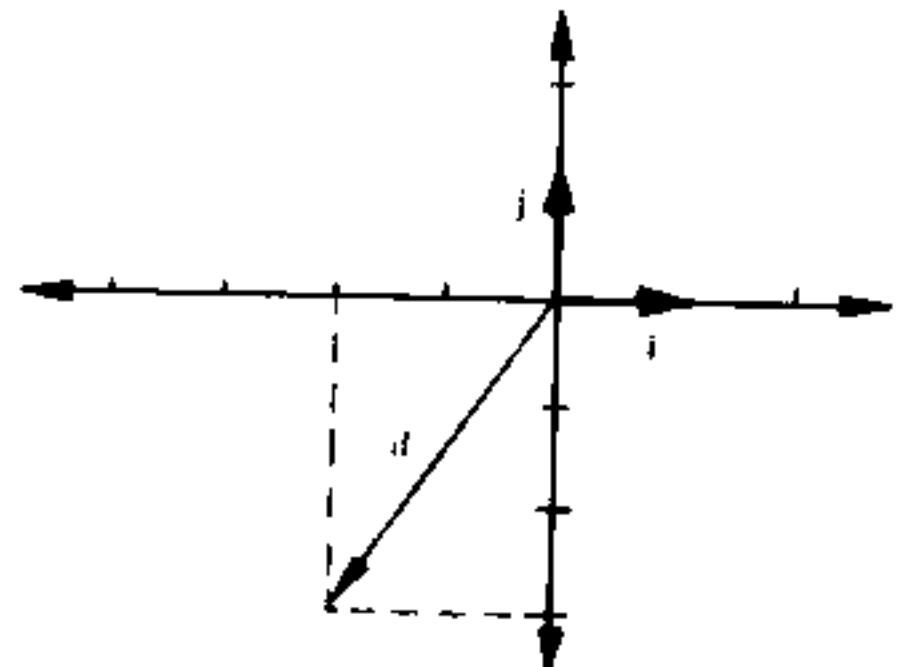
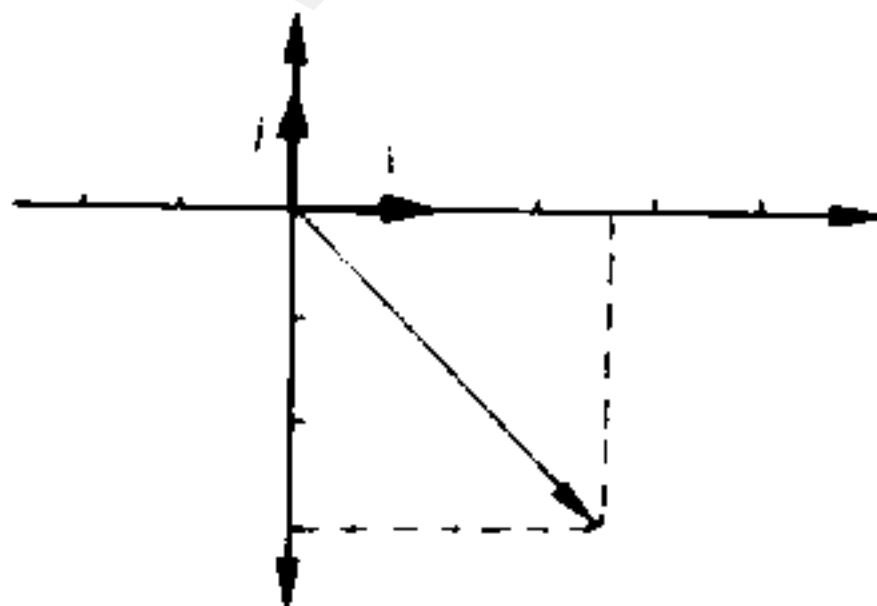
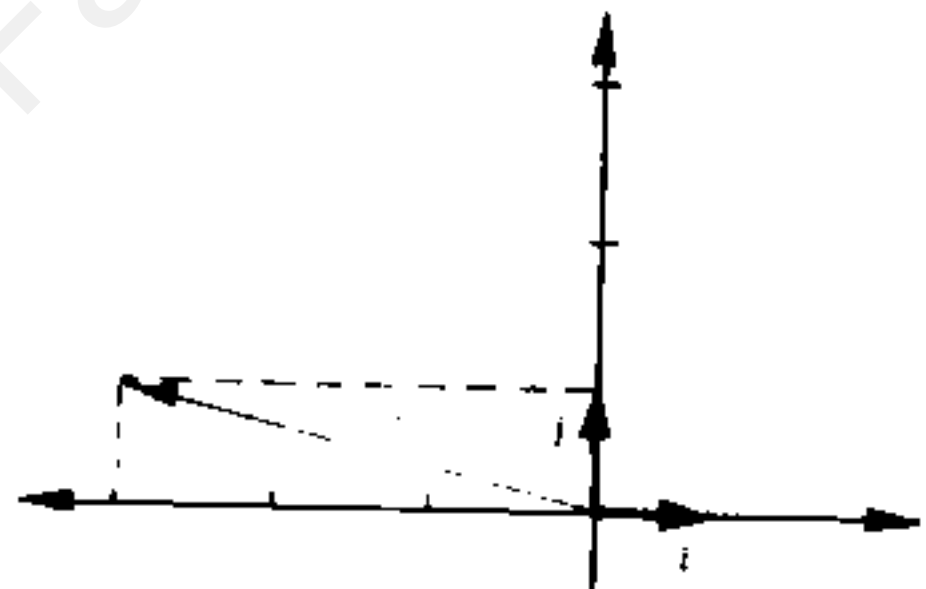
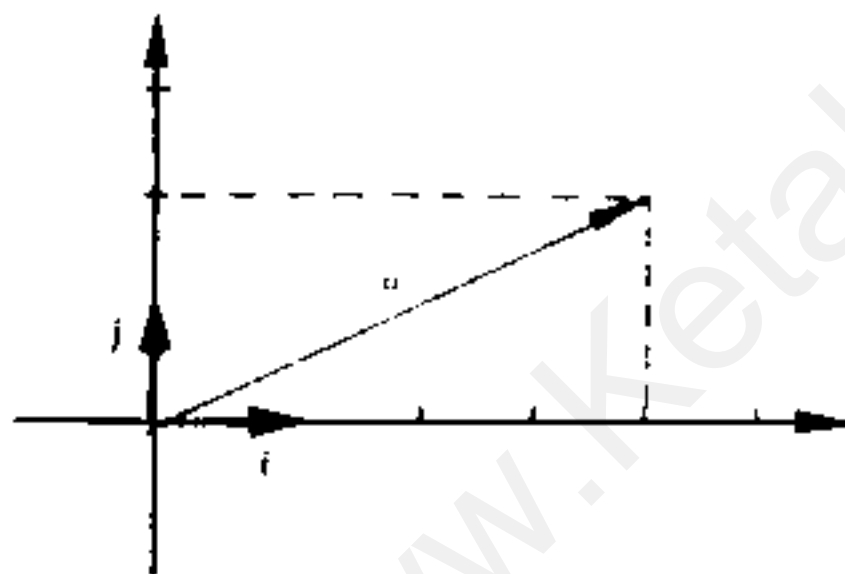
با استفاده از مختصات نیز می‌توان این رابطه را بدست آورد.

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5i + 3j$$



کاردرکلاس

در هر قسمت، بردار داده شده را برحسب بردارهای واحد  $i$  و  $j$  بنویسید.





کاردر کلاس

۱. بردارهای زیر را بر حسب بردارهای واحد  $i$  و  $j$  بیان کنید.

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۲. با مراجعه به کاردر کلاس صفحه قبل، ابتدا مختصات هر یک از بردارهای  $a, b, c$  و  $d$  را بدست آورید، سپس با استفاده از مختصات، آن بردارها را بر حسب  $i$  و  $j$  بیان کنید.

۳. مختصات هر یک از بردارهای زیر را بدست آورید.

$$u = 5i + 2j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$y = 3i - 2j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$v = (-3i) + 4j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

$$z = -8i - 9j = \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}$$

تمرین

۱. دو محور عمود برهم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. حالا بردارهای زیر را رسم کنید و هر بردار را بر حسب  $i$  و  $j$  بیان کنید.

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۲. مختصات بردارهای زیر را بدست آورید و آنها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$u = 3i + 2j$$

$$v = 7i - 2j$$

$$x = -3i + j$$

۳. فرض کنیم  $a = 3i + (-2)j$  و  $b = 2i + j$ . ابتدا مختصات بردارهای  $a$  و  $b$ ، و سپس مختصات بردارهای  $x$  و  $y$  و  $z$  را حساب کنید.

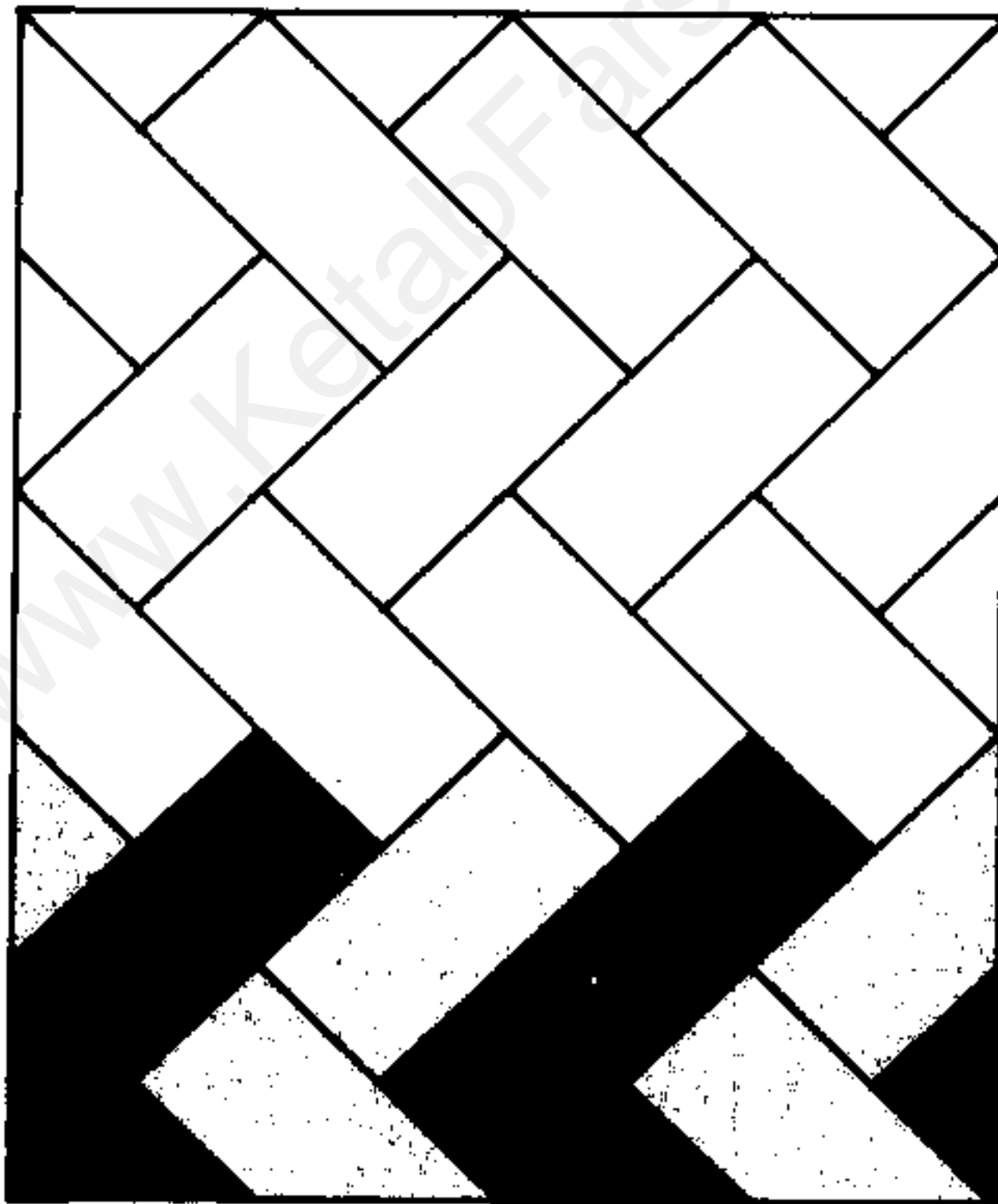
$$x = 5a + 3b$$

$$y = 4a - 2b$$

$$z = -3a + 5b$$

### فرش کف اتاق با مستطیلهای چوبی

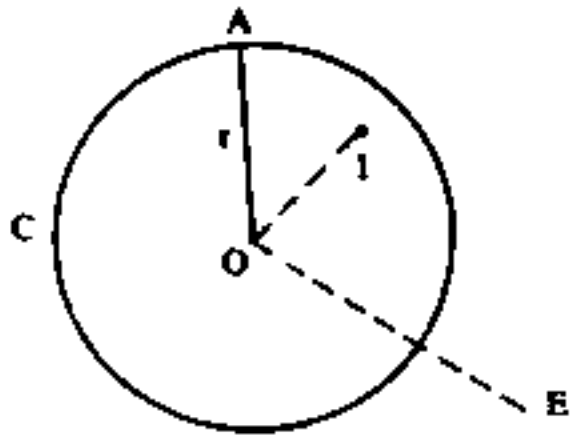
۱. مستطیلی به طول ۲۰ سانتیمتر و عرض ۱۶ سانتیمتر بکشید (تکرار رسم).
۲. مستطیل را با مربعهایی به ضلع ۲ سانتیمتر خانه‌بندی کنید (نقطه‌چینهای شکل).  
خانه‌بندی را با مداد بکشید.
۳. با استفاده از شکل ابتدا مستطیلهای داخل کادر را با مداد بکشید.
۴. کادر و مستطیلهای داخل آن را با مرکب بکشید.
۵. بقیه خطهای مدادی را پاک کنید (نقطه‌چینها را).
۶. اگر بخواهید می‌توانید رسم را با مداد یا ماژیک یا آبرنگ، رنگ کنید.





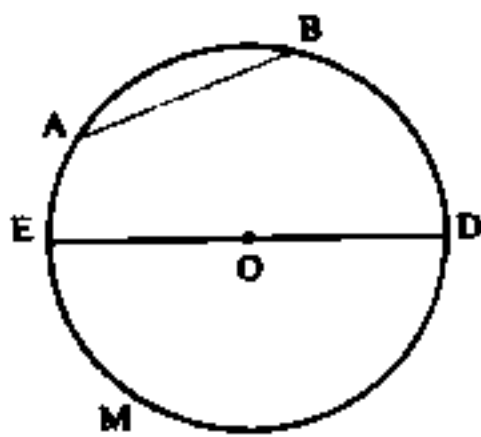
# هندسه ۱

## دایره



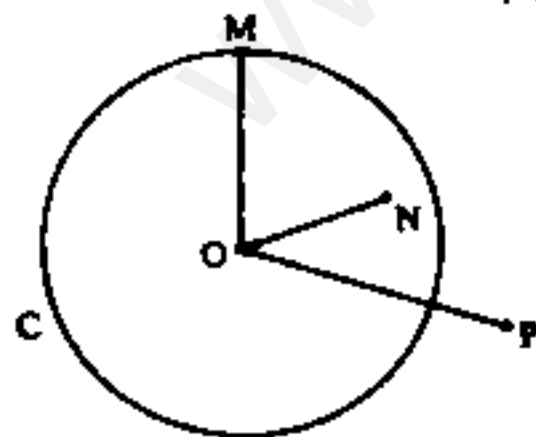
در دایره  $C$  نقطه  $O$  مرکز و پاره خط  $OA$  یک شعاع است.  
 نقطه  $A$  روی دایره  $C$ ، نقطه  $I$  در داخل و نقطه  $E$  در خارج آن قرار دارد. اگر اندازه شعاع این دایره را با حرف  $r$  نشان دهیم، داریم:

$$OA = r, OI < r, OE > r$$



در شکل روبرو دو نقطه  $A$  و  $B$  کمانهای  $\widehat{AB}$  و  $\widehat{AMB}$  روی دایره جدا کرده اند. پاره خط  $AB$  وتر نظیر هر یک از این دو کمان است. وتر  $ED$  که از مرکز دایره گذشته

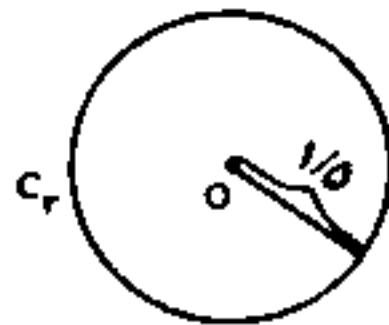
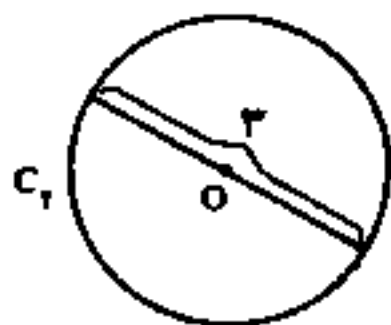
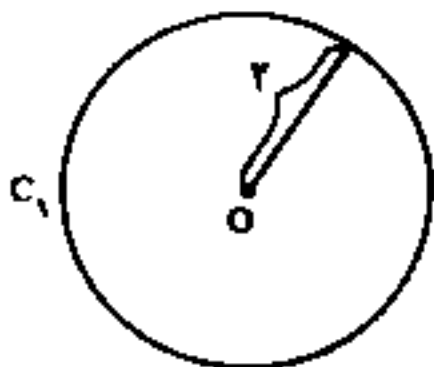
است یک قطر دایره و هر یک از کمانهای  $\widehat{EAD}$  و  $\widehat{EMD}$  یک نیمدایره است.



۱. شعاع دایره  $C$  برابر با  $r$  است در جای خالی یکی از نمادهای  $>$ ،  $=$ ،  $<$  را که مناسب است بنویسید.

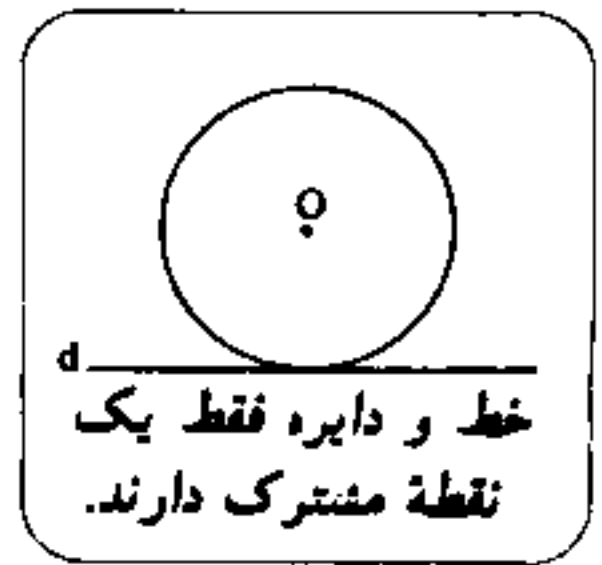
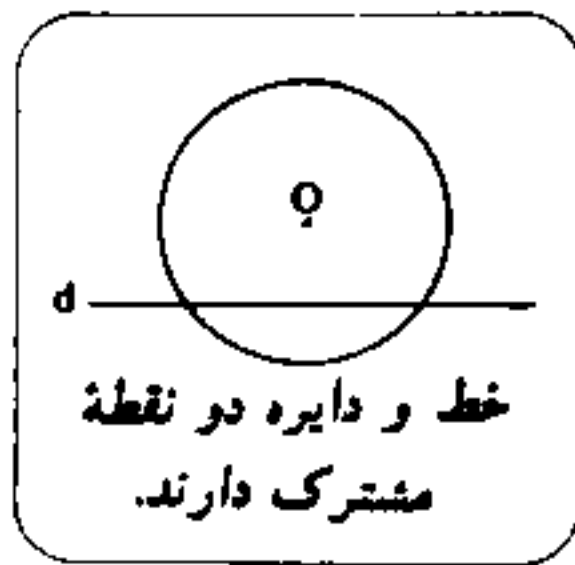
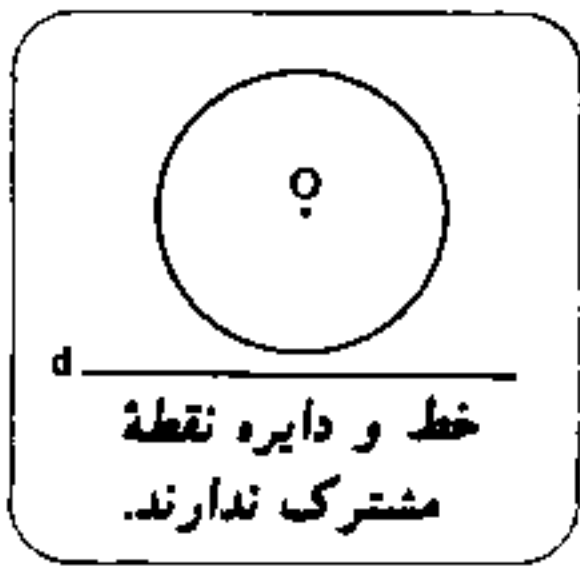
$$OM \dots r, ON \dots r, OP \dots r$$

۲. کدام دو دایره باهم مساویند؟

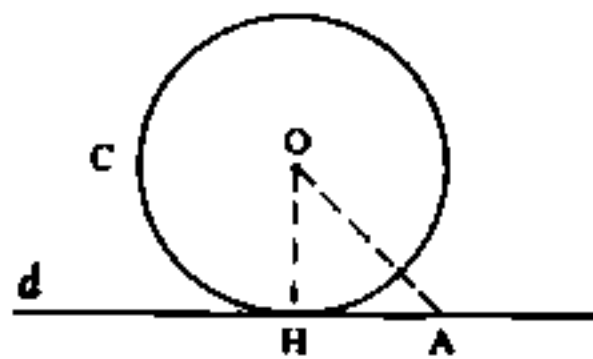




### وضع یک خط و یک دایره نسبت به هم



در حالتی که خط و دایره یک نقطه مشترک دارند، خط بر دایره مماس است. در شکل روبرو خط  $d$  بر دایره  $C$  مماس است.

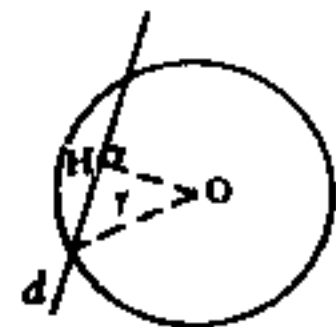
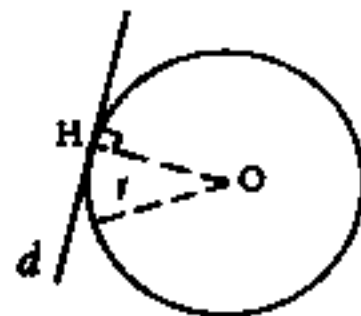
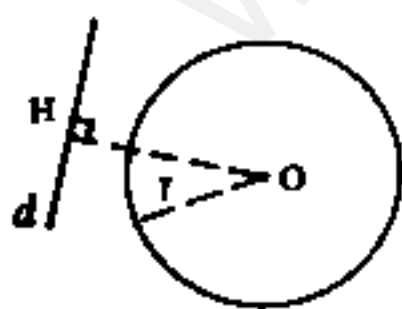


نقطه  $H$  نقطه تماس آنها است. اگر نقطه‌ای دیگر مثلاً  $A$  را روی خط  $d$  بگیریم؛  
 $OA > r$

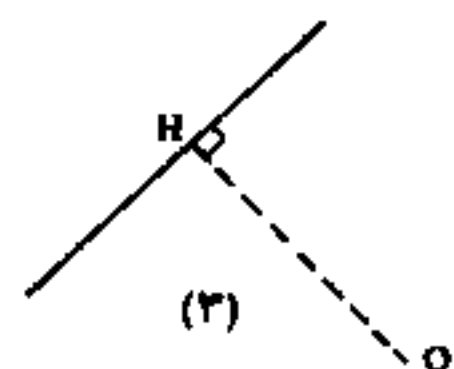
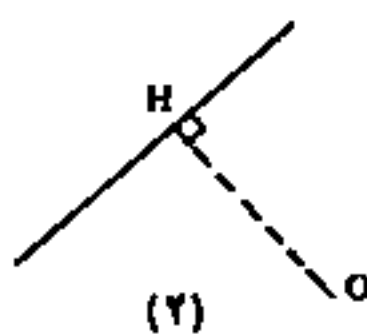
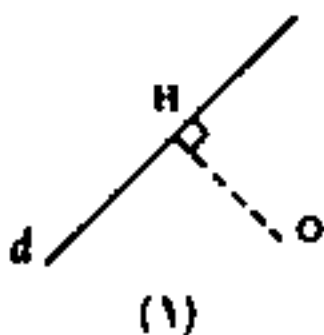
بنابراین،  $OH$  کوتاهترین پاره خطی است که مرکز دایره  $C$  را به نقاط خط  $d$  وصل می‌کند. پس،  $OH \perp d$  و فاصله مرکز دایره  $C$  از خط  $d$  برابر با شعاع این دایره است. بنابراین، اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، فاصله مرکز دایره از آن خط برابر با شعاع دایره است. همچنین شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.



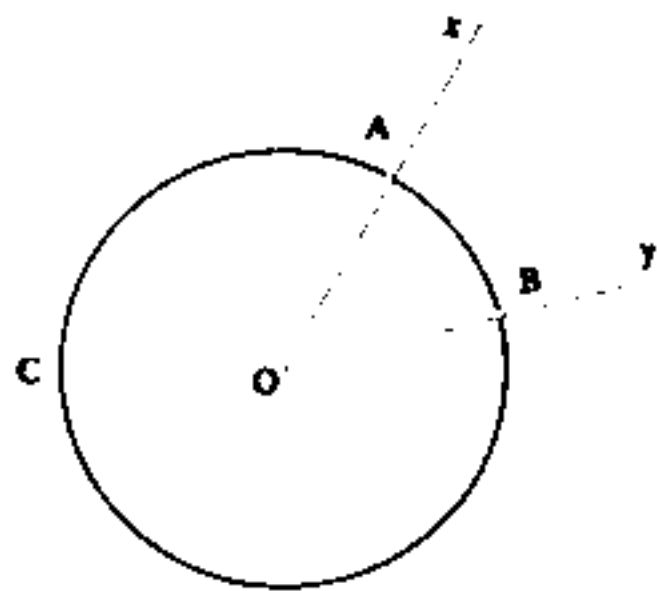
۱. در هر شکل فاصله مرکز دایره از خط  $d$  را با شعاع دایره مقایسه کنید و رابطه مقایسه را بنویسید.



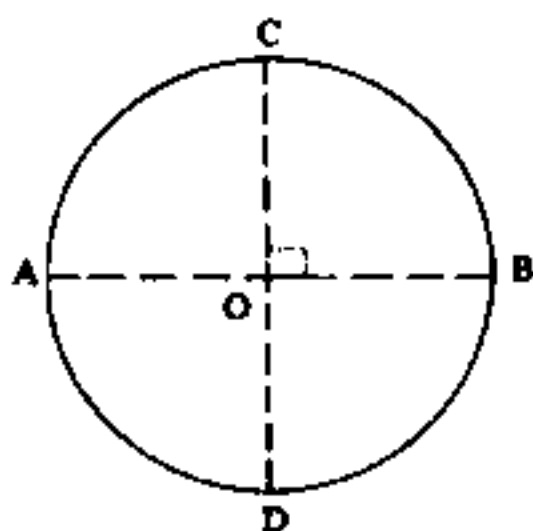
۲. در هر شکل دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $1/5$  سانتیمتر رسم کنید. در کدام شکل خط و دایره برهم مماس می‌شوند؟ نقطه تماس کدام است؟



## زاویه و دایره زاویه مرکزی



نقطه  $O$  مرکز دایره  $c$  رأس زاویه  $xoy$  است.  $xoy$  یا  $\widehat{AOB}$  یک زاویه مرکزی است و  $\widehat{AB}$  کمان مقابل به این زاویه.

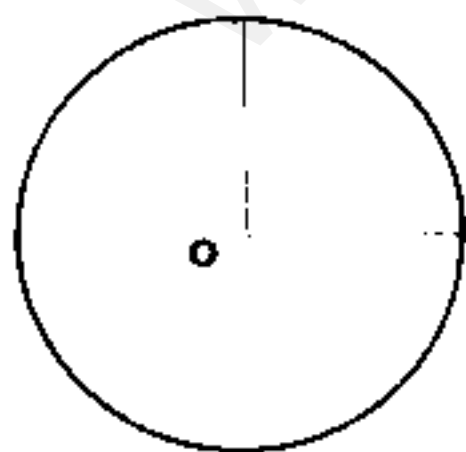
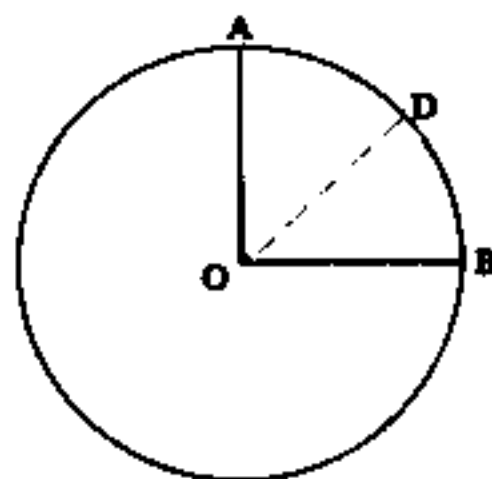


مشاهده می‌کنید که در شکل مقابل دو قطر  $AB$  و  $CD$  برهم عمودند. بنابراین، هر کدام از زاویه‌های مرکزی بدست آمده یک زاویه  $90^\circ$  است. کمان روبرو به هر یک از این زاویه‌ها را نیز یک کمان  $90^\circ$  درجه می‌نامیم.

در شکل مقابل زاویه مرکزی  $AOB$  برابر با  $90^\circ$  درجه و  $OD$  نیمساز آن است. پس،

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = 45^\circ$$

بنابراین، هر کدام از کمانهای  $AD$  و  $BD$  هم یک کمان  $45^\circ$  درجه است.



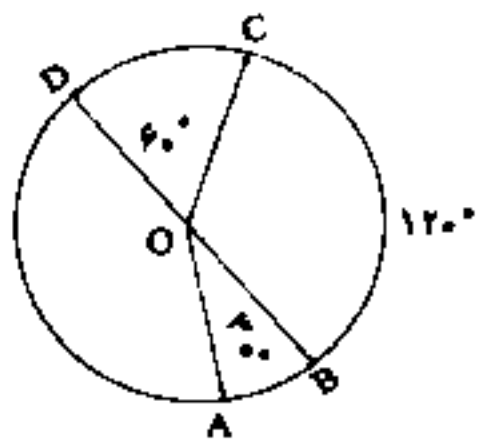
اگر در دایره‌ای یک زاویه مرکزی قائمه رسم کنیم و آنرا به  $90^\circ$  زاویه یک درجه تقسیم کنیم، کمان مقابل به آن نیز به  $90^\circ$  کمان متساوی یک درجه تقسیم می‌شود.

همان طوری که ملاحظه کردید، اندازه یک زاویه مرکزی بر حسب درجه با اندازه کمان مقابل آن بر حسب درجه با یک عدد بیان می‌شوند. بنابراین، مثلاً یک کمان  $30^\circ$  درجه مقابل یک زاویه مرکزی  $30^\circ$  درجه قرار دارد.



۱. با توجه به شکل، اندازه کمانها و زاویههای

زیر را بنویسید.



$$\widehat{AB} =$$

$$\widehat{AOC} =$$

$$\widehat{DC} =$$

$$\widehat{AOD} =$$

$$\widehat{BOC} =$$

$$\widehat{AD} =$$

۲.  $AB$  و  $CD$  دو قطر دایره هستند. اندازه

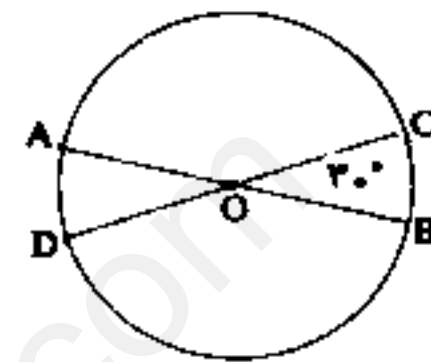
هریک از کمانهای زیر را بنویسید.

$$\widehat{AD} =$$

$$\widehat{AC} =$$

$$\widehat{BC} =$$

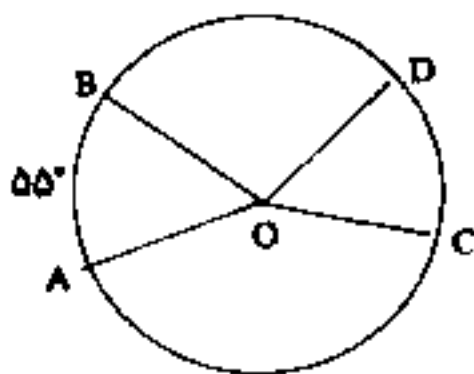
$$\widehat{BD} =$$



۳. دو زاویه مرکزی  $AOB$  و  $COD$  با هم

مساویند و  $\widehat{AB} = 55^\circ$  اندازه کمان  $CD$  چند

درجه است؟

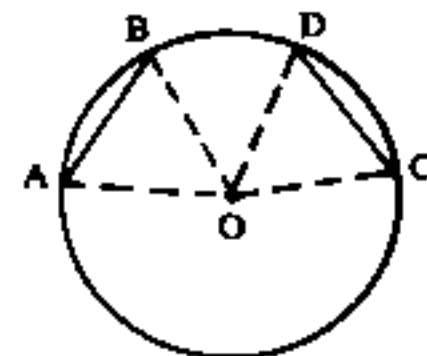


۴. کمانهای  $AB$  و  $CD$  با هم مساویند.

ا. چرا مثلثهای  $OAB$  و  $OCD$

مساویند؟

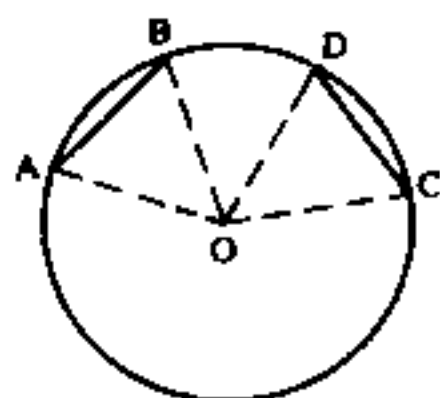
ب. آیا وترهای  $AB$  و  $CD$  مساویند؟



۵. وترهای  $AB$  و  $CD$  با هم مساویند.

ا. چرا مثلثهای  $OAB$  و  $OCD$  مساویند؟

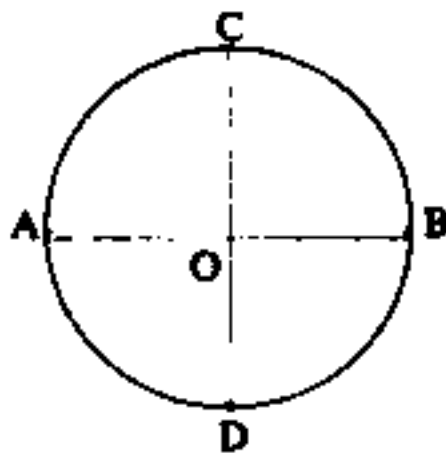
ب. آیا کمانهای  $AB$  و  $CD$  مساویند؟



به این ترتیب ملاحظه می کنید که در یک دایره، وترهای نظیر کمانهای متساوی با هم مساویند و

کمانهای نظیر وترهای متساوی نیز با هم مساویند.

تعرین



۱. دو قطر  $AB$  و  $CD$  برهم عمودند. اندازه هر یک از کمانهای زیر را بنویسید.

$$\widehat{AC} = \quad \widehat{BC} =$$

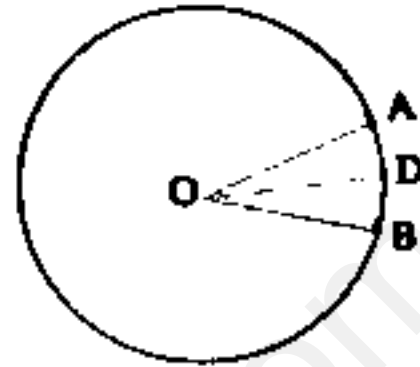
$$\widehat{BD} = \quad \widehat{AD} =$$

آیا اندازه محیط دایره بر حسب درجه برابر با  $360^\circ$  است؟

۲.  $OD$  نیمساز زاویه مرکزی  $AOB$  است و

$\widehat{AOB} = 36^\circ$ . اندازه هر یک از کمانهای  $AD$  و

$BD$  چند درجه است؟

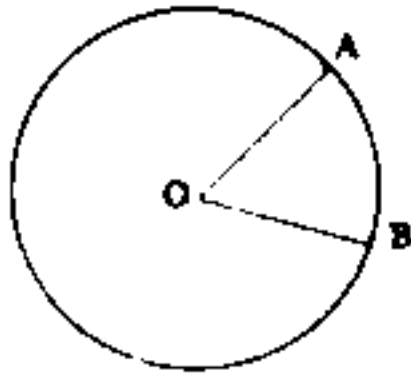


۳. در شکل مقابل اندازه زاویه مرکزی  $AOB$  برابر با  $60^\circ$  است.

آ. اندازه کمان  $AB$  چند درجه است؟

ب. از  $A$  به  $B$  وصل می کنیم بگوئید چرا

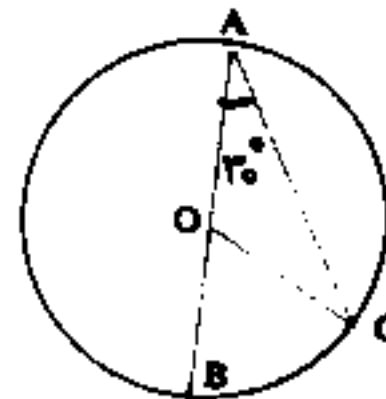
مثلث  $OAB$  متساوی الاضلاع است؟



۴. با توجه به شکل مقابل، اندازه زاویه‌ها و

کمانهای زیر را بنویسید.

$$\widehat{C} = \dots, \quad \widehat{COB} = \dots, \quad \widehat{BC} = \dots$$



۵. هر قطر دایره آن را به دو کمان متساوی تقسیم می کند. یک دایره و قطری از آن را رسم کنید و

با تا کردن کاغذ درستی این مطلب را تحقیق کنید.

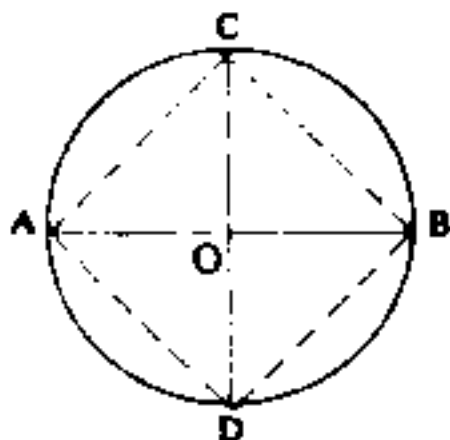
۶. قطرهای  $AB$  و  $CD$  برهم عمودند.

آ. چرا کمانهای  $AC, CB, BD, DA$  با

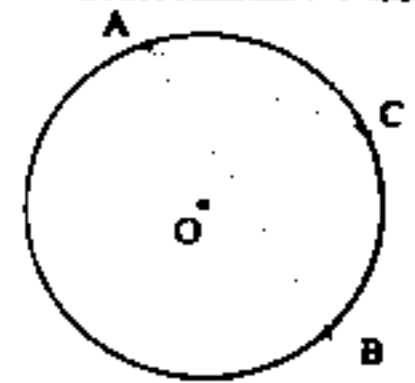
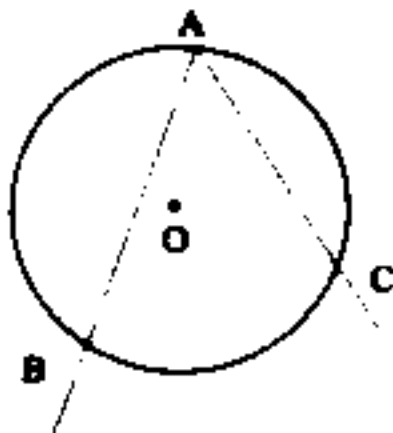
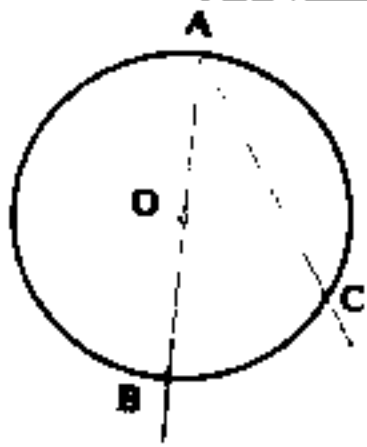
هم مساویند؟

ب. آیا وترهای  $AC, CB, BD, DA$  نیز با

هم مساویند؟



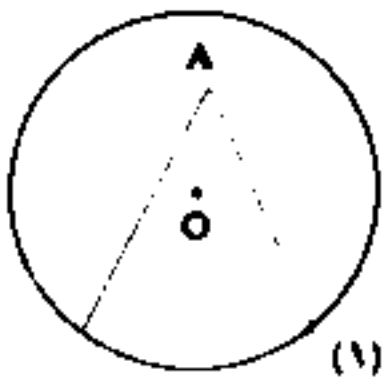
ج. آیا زاویه‌های چهارضلعی  $ADBC$  با هم مساویند؟ چرا؟



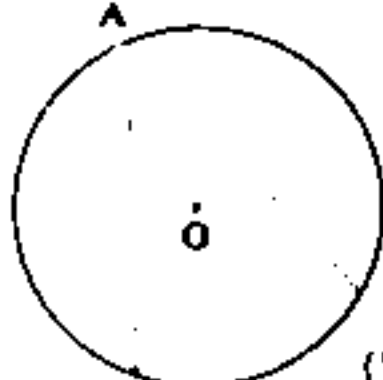
زاویه محاطی

در شکل‌های بالا رأس زاویه  $BAC$  روی دایره و دو ضلع آن دایره را در  $B$  و  $C$  قطع کرده است. این زاویه، یک زاویه محاطی است و  $\widehat{BC}$  کمان مقابل به آن است.

کاردرکلاس

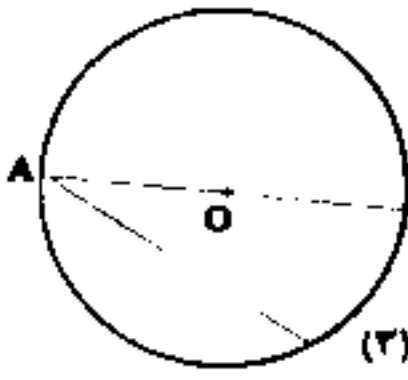


(۱)

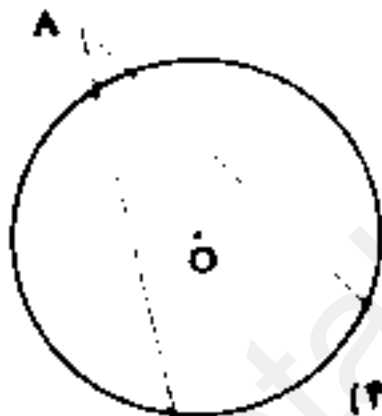


(۲)

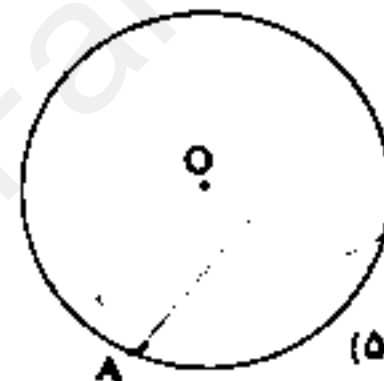
۱. در کدام شکل  $\angle A$  زاویه محاطی است؟



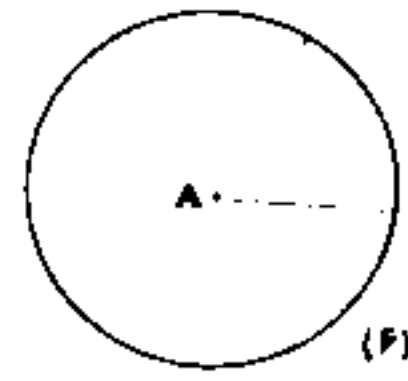
(۳)



(۴)

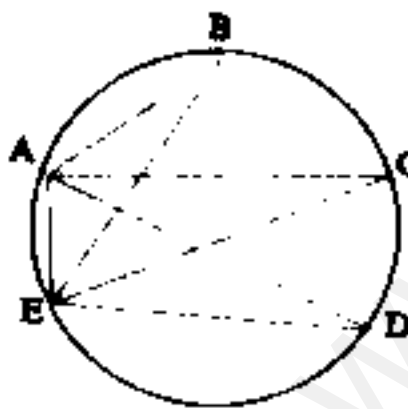


(۵)



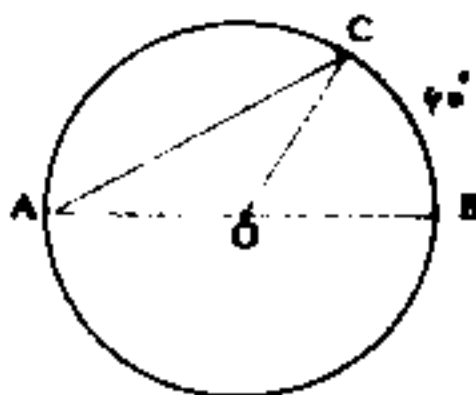
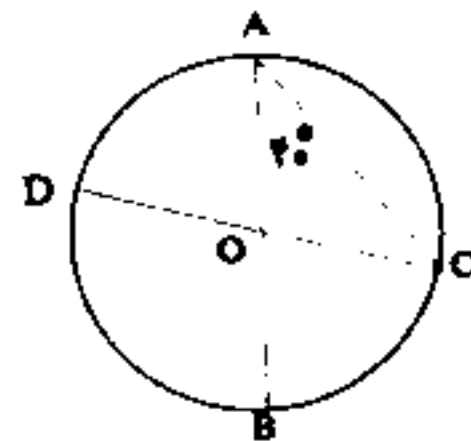
(۶)

۲. با توجه به شکل مقابل:



- ا. زاویه‌های محاطی مقابل به  $\widehat{AE}$  را بنویسید.
- ب. زاویه‌های محاطی مقابل به  $\widehat{BC}$  را بنویسید.
- ج. کمان مقابل به زاویه محاطی  $DAB$  را بنویسید.

۳. در شکل مقابل اندازه‌های زاویه محاطی  $C$ ، زاویه مرکزی  $BOC$  و اندازه کمان  $BC$  را تعیین کنید.

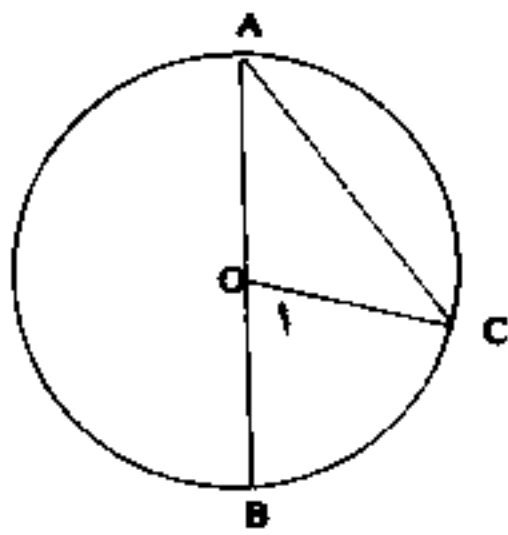


۴. با توجه به شکل مقابل، تساویهای زیر را کامل کنید.

درجه  $\widehat{BOC} = \dots$  ، درجه  $\widehat{A} = \dots$

آیا تساوی  $\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2}$  درست است؟

اکنون به شکل زیر توجه کنید. در این شکل، یک ضلع زاویه محاطی  $A$  قطر دایره و زاویه مرکزی  $O_1$  زاویه خارجی مثلث



متساوی الساقین  $OAC$  است. پس،

$$\widehat{O_1} = \widehat{A} + \widehat{C} \text{ و } \widehat{O_1} = \widehat{BC}$$

$$\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{BC}, \text{ بنابراین}$$

$$\text{و چون } \widehat{A} = \widehat{C}, \text{ پس } 2\widehat{A} = \widehat{BC}$$

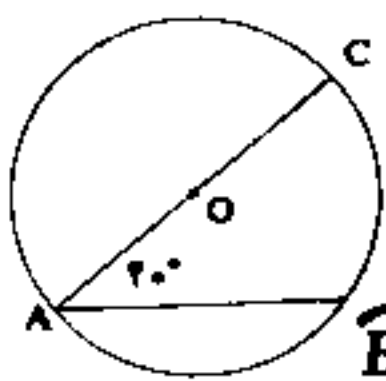
$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ در نتیجه}$$

این مطلب نشان می‌دهد که اندازه هر زاویه محاطی که یک ضلع آن قطر دایره باشد، نصف اندازه کمان مقابل آن است.

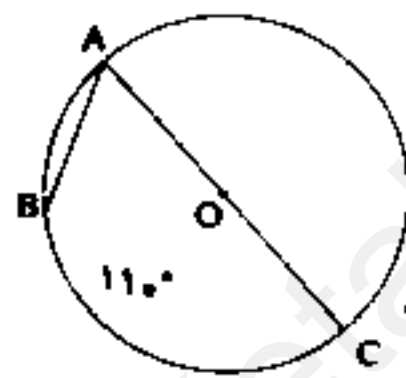


کاردر کلاس

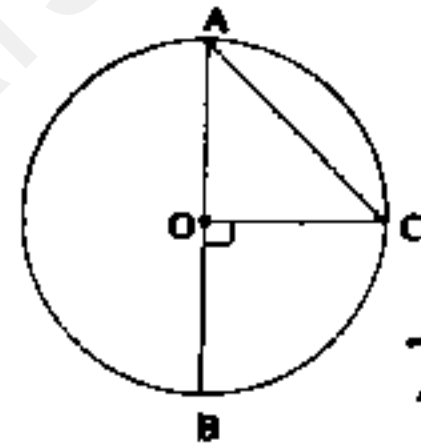
۱. با توجه به هر شکل اندازه زاویه محاطی  $A$  یا اندازه کمان  $BC$  را بنویسید.



$$\widehat{BC} =$$



$$\widehat{A} =$$



$$\widehat{A} =$$

۲. در شکل مقابل قطر  $AD$  دایره است. با توجه

به آن، اندازه‌های زاویه‌های زیر را بنویسید.

$$\widehat{A_1} = \quad \widehat{A_2} =$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{A_1} + \widehat{A_2} =$$

$$\text{آیا می‌توان نوشت } \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} ?$$

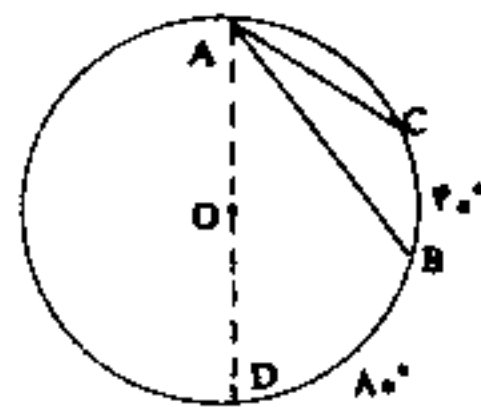
۳. با توجه به شکل مقابل، اندازه هر زاویه را

بنویسید.

$$\widehat{DAB} = \quad \widehat{DAC} =$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} =$$

$$\text{آیا می‌توان نوشت } \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} ?$$



از مطالب بالا می‌توان نتیجه گرفت که اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه

کمان مقابل به آن.