

$$[L_-, L_z] = \hbar L_- \quad (۳۱-۱۱)$$

همچنین، با توجه به  $[\mathbf{L}^\dagger, \mathbf{L}] = 0$  نتیجه می‌گیریم که

$$[\mathbf{L}^\dagger, L_\pm] = 0 \quad (۳۲-۱۱)$$

$$[\mathbf{L}^\dagger, L_z] = 0$$

بنابراین، می‌توان نوشت

$$\mathbf{L}^\dagger L_\pm Y_{lm} = L_\pm \mathbf{L}^\dagger Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 L_\pm Y_{lm} \quad (۳۳-۱۱)$$

و این نشان می‌دهد که  $L_\pm Y_{lm}$  نیز ویژه‌تابعهای  $\mathbf{L}^\dagger$  با ویژه‌مقداری هستند که با  $l$  مشخص می‌شود. از طرف دیگر، داریم

$$\begin{aligned} L_z L_+ Y_{lm} &= (L_+ L_z + \hbar L_+) Y_{lm} \\ &= m\hbar L_+ Y_{lm} + \hbar L_+ Y_{lm} \\ &= \hbar(m+1) L_+ Y_{lm} \end{aligned} \quad (۳۴-۱۱)$$

بنابراین،  $L_+ Y_{lm}$  نیز ویژه‌تابع  $L_z$  با ویژه‌مقدار  $\hbar(m+1)$  است، یعنی به  $m$  یک واحد افزوده شده است. به همین ترتیب، می‌توان نشان داد

$$L_z L_- Y_{lm} = \hbar(m-1) L_- Y_{lm} \quad (۳۵-۱۱)$$

پس  $L_- Y_{lm}$  ویژه‌تابع  $L_z$  است در حالی که از  $m$  یک واحد کاسته شده است. از این رو،  $L_+$  و  $L_-$  را به ترتیب عملگرهای افزایشنده و کاهشنده می‌نامیم. می‌توان نوشت

$$L_\pm Y_{lm} = C_\pm(l, m) Y_{l, m \pm 1} \quad (۳۶-۱۱)$$

با توجه به هرمیتی بودن  $L_x$  و  $L_y$  داریم

$$L_\pm^\dagger = (L_x \pm iL_y)^\dagger = L_x \mp iL_y = L_\mp \quad (۳۷-۱۱)$$

$$\langle L_{\pm} Y_{lm} | L_{\pm} Y_{lm} \rangle \geq 0 \quad (38-11)$$

را به صورت زیر نوشت

$$\langle Y_{lm} | L_{\mp} L_{\pm} Y_{lm} \rangle \geq 0 \quad (39-11)$$

و در نتیجه با استفاده از ۲۷-۱۱ و ۲۸-۱۱ به دست می‌آوریم

$$\langle Y_{lm} | (L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z) Y_{lm} \rangle \geq 0 \quad (40-11)$$

که نشان می‌دهد

$$l(l+1) \geq m^2 + m \quad (41-11)$$

$$l(l+1) \geq m^2 - m$$

چون  $l(l+1) \geq 0$  می‌توانیم بدون نقض کلیت قرار دهیم  $l \geq |m|$ . بنابراین، از ۴۱-۱۱ نتیجه می‌گیریم که

$$-l \leq m \leq l \quad (42-11)$$

اگر  $m$  یک مقدار کمینه ( $m_-$ ) داشته باشد، آنگاه برای ویژه حالت مربوط داریم

$$L_- Y_{lm_-} = 0 \quad (43-11)$$

برای محاسبه  $m_-$ ، ۲۷-۱۱ را بر  $Y_{lm_-}$  اعمال می‌کنیم و به دست می‌آوریم

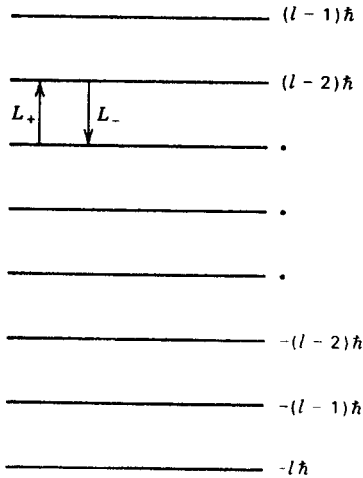
$$l(l+1)\hbar^2 = m_-^2 \hbar^2 - m_- \hbar^2 \quad (44-11)$$

به همین ترتیب، اگر  $m$  بیشینه‌ای داشته باشد ( $m_+$ ) باید

$$L_+ Y_{lm_+} = 0 \quad (45-11)$$

۲. اگر  $l+1 \geq 0$  را بگیریم کافی است تعریف کنیم  $l = -l-1$  و به جای  $l$  قدیمی  $L$  مثبت جدید را قرار دهیم. چیزی تغییر نمی‌کند زیرا  $L(L+1) = l(l+1)$ .

www.arsanjan.blogfa.com  
 $l\hbar$



شکل ۱۱-۱ طیف عملگر  $L_z$  برای یک مقدار معین  $l$ .

و از اعمال ۱۱-۲۸ بر  $Y_{lm+}$  به دست می‌آوریم

$$l(l+1)\hbar^2 = m_+^2\hbar^2 + m_+\hbar^2 \quad (۴۶-۱۱)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} m_- &= -l \\ m_+ &= +l \end{aligned} \quad (۴۷-۱۱)$$

چون مقدار بیشینه باید از مقدار کمینه با گامهای واحد (اعمال مکرر  $L_+$ ) به دست آید، معلوم می‌شود که (شکل ۱۱-۱): (الف) به ازای یک  $l$  معین  $(2l+1)$  حالت وجود دارند، یعنی  $2l+1$  یک عدد درست است. و (ب)  $m$  می‌تواند مقادیر زیر را بگیرد

$$m = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-1, l$$

امکان نیم فرد بودن  $l$ ، یعنی  $l = 1/2, 3/2, \dots$  را در فصل ۱۴ در بحث اسپین بررسی می‌کنیم. در این فصل تنها مقادیر درست  $l$  را در نظر می‌گیریم.

همچنین می‌توان ضرایب  $C_{\pm}(l, m)$  را که در  $(۳۶-۱۱)$  آورده می‌شوند محاسبه کرد. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} |C_{\pm}(l, m)|^2 \langle Y_{l, m \pm 1} | Y_{l, m \pm 1} \rangle &= \langle L_{\pm} Y_{lm} | L_{\pm} Y_{lm} \rangle \\ &= \langle Y_{lm} | L_{\mp} L_{\pm} Y_{lm} \rangle \\ &= \langle Y_{lm} | \mathbf{L}^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z \rangle Y_{lm} \\ &= \hbar^2 [l(l+1) - m(m \pm 1)] \end{aligned}$$

بنابراین، با انتخاب فاز مناسب، به دست می‌آوریم

$$C_{+}(l, m) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)} = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \quad (۴۸-۱۱)$$

$$C_{-}(l, m) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)} = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$$

## هماهنگهای کروی

آنچه را می‌توان از روشهای عملگری به دست آورد در بالا گفتیم. اکنون با استفاده از صورت صریح عملگرهای  $L_{\pm}$  و  $L_z$  رابطه‌های مربوط به ویژه‌تابعهای  $\mathbf{L}^2$  را برحسب زاویه‌های  $\theta$  و  $\phi$  به دست می‌آوریم. این مشابه با مورد  $۵۰-۷$  تا  $۵۳-۷$  است. بنابه آنچه قبلاً گفتیم، می‌نویسیم

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \Theta_{lm}(\theta) e^{im\phi} \quad (۴۹-۱۱)$$

و رابطه  $۴۵-۱۱$  به صورت زیر درمی‌آید

$$h e^{i\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \Theta_{ll}(\theta) e^{il\phi} = \hbar e^{i(l+1)\phi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) \Theta_{ll}(\theta) = 0 \quad (۵۰-۱۱)$$

به سادگی می‌توان دید که جواب این معادله، با تقریب یک ضریب ثابت که آن را بعداً از شرط بهنجارش به دست می‌آوریم، عبارت است از

$$\Theta_{ll}(\theta) = (\sin \theta)^l \quad (۵۱-۱۱)$$

هر حالت اختیاری را می‌توان با اعمال عملگر داده‌شده به‌دست آورد:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = C(L_-)^{l-m}(\sin \theta)^l e^{il\phi} \quad (52-11)$$

ابتدا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} L_- Y_{lm}(\theta, \phi) &= \hbar e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (\sin \theta)^l e^{il\phi} \\ &= \hbar e^{i(l-1)\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) (\sin \theta)^l \end{aligned}$$

اما برای یک تابع اختیاری  $f(\theta)$  می‌توان نشان داد

$$\left( \frac{d}{d\theta} + l \cot \theta \right) f(\theta) = \frac{1}{(\sin \theta)^l} \frac{d}{d\theta} [(\sin \theta)^l f(\theta)] \quad (53-11)$$

و در نتیجه داریم

$$Y_{l,l-1} = C' \frac{e^{i(l-1)\phi}}{(\sin \theta)^l} \left( -\frac{d}{d\theta} \right) [(\sin \theta)^l (\sin \theta)^1] \quad (54-11)$$

مرحله بعد نیز از همین قرار است، بجز اینکه به‌جای  $l$  می‌گذاریم  $l-1$  و ۵۳-۱۱ را بر ۵۴-۱۱ اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y_{l,l-2} &= C'' \frac{e^{i(l-2)\phi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \left( -\frac{d}{d\theta} \right) \left[ (\sin \theta)^{l-1} \frac{1}{(\sin \theta)^l} \left( -\frac{d}{d\theta} \right) (\sin \theta)^{2l} \right] \\ &= C'' (-1)^2 \frac{e^{i(l-2)\phi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{d\theta} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta)^{2l} \right] \end{aligned} \quad (55-11)$$

با وارد کردن متغیر جدید  $u = \cos \theta$  داریم  $u = \cos \theta$ ،  $(d/d\theta) = -1/(\sin \theta) du$  و رابطه‌های ۵۴-۱۱ و ۵۵-۱۱ به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$Y_{l,l-1} = C' \frac{e^{i(l-1)\phi}}{(\sin \theta)^{l-1}} \frac{d}{du} [(\lambda - u^2)^l] \quad (56-11)$$

$$Y_{l,l-2} = C'' \frac{e^{i(l-2)\phi}}{(\sin \theta)^{l-2}} \frac{d^2}{du^2} [(\lambda - u^2)^l]$$

رابطه کلی عبارت است از [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$Y_{lm} = C \frac{e^{im\phi}}{(\sin \theta)^m} \left( \frac{d}{du} \right)^{l-m} [(\lambda - u^2)^l] \quad (57-11)$$

ویژه‌تابعها را باید بهنجار کنیم. چون با زاویه‌های کروی کار می‌کنیم، که گستره انتگرال‌گیری روی آنها  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  است (شکل ۱-۱۰)، و در اینجا انتگرال روی سطح کره (با  $r = \text{const}$ ) عبارت است از

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \quad (58-11)$$

باید بنویسیم

$$\langle Y_{lm} | Y_{lm} \rangle = \lambda = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 du |C|^2 \left[ \frac{\lambda}{(\lambda - u^2)^{m/2}} \left( \frac{d}{du} \right)^{l-m} (\lambda - u^2)^l \right]^2$$

محاسبه این انتگرال پرزحمت است، و به نوشتن ویژه‌تابعهای بهنجارشده، با فازهایی که بنابه قرارداد به‌کار می‌روند، بسنده می‌کنیم: به‌ازای  $m \geq 0$  داریم

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{2l+l}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (59-11)$$

علاوه بر این،

$$Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^* \quad (60-11)$$

چند جمله‌ایهای لژاندر وابسته (به‌ازای  $m \geq 0$ ) با رابطه زیر داده می‌شوند

$$P_l^m(u) = (-1)^{l+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(\lambda - u^2)^{-m/2}}{2^l l!} \left( \frac{d}{du} \right)^{l-m} (\lambda - u^2)^l \quad (61-11)$$

و برای مقادیر منفی  $m$  داریم

$$P_l^{-m}(u) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(u) \quad (62-11)$$

$$Y_{ll}(\theta, \phi) = K (\sin \theta)^l e^{il\phi}$$

که در آن  $K$  مقداری ثابت است. بنابراین، توزیع احتمال برحسب زاویه قطبی نسبت به محور  $z$  به‌صورت زیر است

$$|Y_{ll}|^2 = K^2 (\sin \theta)^{2l} \quad (۶۳-۱۱)$$

مشاهده می‌کنیم که برای مقادیر بزرگ  $l$  این تابع تقریباً به صفحه استوایی محدود است. در واقع، بیشترین مقدار  $L_z$  به‌ازای  $m = l$  روی می‌دهد، و از این‌رو  $L_z^2 \approx L^2$ . در حد کلاسیک، که در آن  $l \gg 1$  داریم

$$\frac{L_z^2 - L^2}{L^2} = \frac{1}{l} \rightarrow 0 \quad (۶۴-۱۱)$$

یعنی می‌توان تکانه زاویه‌ای را در یک راستای خاص (در اینجا محور  $z$ ) قرار داد. این هم‌راستایی متناظر است با اینکه  $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = 0$ ، که وقتی اثرات مکانیک کوانتومی مهم می‌شوند غیرممکن است (به‌علت رابطه‌های جابه‌جایی).

چند ویژه‌تابع را در زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} Y_{0,0} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{1,1} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \\ Y_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_{2,2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta \\ Y_{2,1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta \\ Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (۶۵-۱۱)$$

$Y_{lm}(\theta, \phi)$  ها که توابع راست‌هنجاری از  $\theta$  و  $\phi$  هستند یک مجموعه کامل تشکیل می‌دهند. بنابراین، در اینجا قضیه بسط ایجاب می‌کند که هر تابعی از  $\theta$  و  $\phi$  را بتوان به صورت زیر بسط داد

$$f(\theta, \phi) = \sum \sum C_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (۶۶-۱۱)$$

که در آن

$$C_{lm} = \int d\Omega Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi) \quad (۶۷-۱۱)$$

وانتگرالی روی زاویه فضایی با ۵۸-۱۱ تعریف می‌شود. همچنین بنابه قضیه بسط اگر  $f(\theta, \phi)$  تابع موج زاویه‌ای یک حالت باشد که به صورت زیر بهنجار شده است

$$\int d\Omega |f(\theta, \phi)|^2 = ۱ \quad (۶۸-۱۱)$$

آنگاه  $|C_{lm}|^2$  احتمال این است که از اندازه‌گیری همزمان  $L_z$  و  $L^2$  در این حالت به ترتیب  $m\hbar$  و  $l(l+1)\hbar^2$  به دست آید. احتمال به دست آمدن  $l(l+1)\hbar^2$  از اندازه‌گیری  $L^2$  عبارت است از

$$P(l) = \sum_{m=-l}^l |C_{lm}|^2 \quad (۶۹-۱۱)$$

و به سادگی می‌توان دید که مقدار انتظاری  $L_z$  برابر است با

$$\langle L_z \rangle = \sum_l \sum_{m=-l}^l m\hbar |C_{lm}|^2 \quad (۷۰-۱۱)$$

قضیه بسط ۶۶-۱۱ را با نمادنگاری مجرد زیر در نظر بگیرید

$$|\psi\rangle = \sum_{l,m} C_{lm} |Y_{lm}\rangle \quad (۷۱-۱۱)$$

با توجه به شرط راست‌هنجاری

$$\langle Y_{l'm'} | Y_{lm} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (۷۲-۱۱)$$



$$C_{lm} = \langle Y_{lm} | \psi \rangle \quad (۷۳-۱۱)$$

۷۱-۱۱ با جاگذاری ۷۳-۱۱ به صورت زیر درمی‌آید

$$|\psi\rangle = \sum_l \sum_{m=-l}^l |Y_{lm}\rangle \langle Y_{lm} | \psi \rangle$$

بنابراین، باید

$$\sum_l \sum_{m=-l}^l |Y_{lm}\rangle \langle Y_{lm}| = ۱ \quad (۷۴-۱۱)$$

که در آن ۱ عملگر واحد است.

با استفاده از قضیه بسط می‌توان به این پرسش که اغلب مطرح می‌شود پاسخ داد: راستای  $\hat{z}$  چه ویژگی خاصی دارد؟ آیا نمی‌توان تکانه زاویه‌ای را (تا جایی که ممکن است) با محور  $x$  همراستا کرد؟ پاسخ این است که این کار واقعاً امکان‌پذیر است. چنین حالتی، که باید در نزدیکی صفحه استوایی حول محور  $x$  (در مجاورت  $\phi = \pi/2$ ) محدود باشد، یک ترکیب خطی خاص از  $Y_{lm}$ ها خواهد بود، و خواص فیزیکی آن دقیقاً همان خواص حالت  $Y_{ll}$  است.

موج تخت برحسب هماهنگهای کروی

جواب معادله ذره آزاد

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + k^2 \psi(\mathbf{r}) = 0$$

را می‌توان به دو صورت نوشت. یک صورت این جواب همان جواب موج تخت است:

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (۷۵-۱۱)$$

راه دیگر این است که آن را به صورت یک برهم‌نهشی خطی از جوابهای پاره‌موجی بنویسیم:

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_l \sum_m A_{lm} j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (۷۶-۱۱)$$

بنابراین، می‌توان  $A_{lm}$  را از [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com) به دست آورد. توجه کنید که زاویه‌های کروی  $\theta$  و  $\phi$  مختصات بردار  $\mathbf{r}$  نسبت به یک راستای اختیاری هستند که آن را محور  $z$  می‌گیریم. اگر این محور  $z$  را با جهت  $\mathbf{k}$  (که تا اینجا یک جهت اختیاری است) تعریف کنیم آنگاه می‌توان نوشت

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} \quad (۷۷-۱۱)$$

بنابراین، سمت چپ ۷۶-۱۱ تابع زاویه سمتی  $\phi$  نیست و از این رو در سمت راست تنها جمله‌هایی با  $m = 0$  می‌توانند ظاهر شوند؛ در نتیجه، با استفاده از

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} P_l(\cos \theta) \quad (۷۸-۱۱)$$

که در آن  $P_l(\cos \theta)$  چندجمله‌ای لژاندر است، به دست می‌آوریم

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} A_{lj_0}(kr) P_l(\cos \theta) \quad (۷۹-۱۱)$$

با توجه به رابطه

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{\delta_{ll'}}{2l+1} \quad (۸۰-۱۱)$$

که پیامد مستقیم رابطه راست‌هنجاری برای  $Y_{lm}$ ‌ها و ۷۸-۱۱ است، نتیجه می‌گیریم که

$$A_{lj_0}(kr) = \frac{1}{2} [4\pi(2l+1)]^{1/2} \int_{-1}^1 dz P_l(z) e^{ikrz} \quad (\text{الف } ۸۱-۱۱)$$

دو طرف این معادله را در حد  $kr \rightarrow 0$  با هم مقایسه می‌کنیم. جمله طرف چپ عبارت است از

$$A_l \frac{(kr)^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l+1)}$$

و در طرف راست، جمله شامل  $(kr)^l$  به صورت زیر است

$$\frac{1}{2} [4\pi(2l+1)]^{1/2} (ikr)^l \int_{-1}^1 dz P_l(z) z^l / l! \quad (\text{ب } ۸۱-۱۱)$$

انتگرال را می‌توان با توجه به اینکه  $P_l(z)$  یک چندجمله‌ای درجه  $l$  برحسب  $z$  است محاسبه کرد. ضریب جمله مربوط به بزرگترین توان،  $z^l$ ، با استفاده از ۱۱-۶۱ به دست می‌آید

$$(-1)^l \frac{1}{2^l l!} \left( \frac{d}{dz} \right)^l (1 - z^2)^l = \frac{2l(2l-1)(2l-2)\cdots(l+1)}{2^l l!} z^l + O(z^{l-2})$$

بنابراین، چون طرف چپ همان  $P_l(z)$  است و  $O(z^{l-2})$  شامل  $P_{l-2}(z)$ ،  $P_{l-4}(z)$ ، ... است، داریم

$$z^l = \frac{2^l l!}{2l(2l-1)(2l-2)\cdots(l+1)} P_l(z) + \text{شامل } P_{l-2}(z) \text{ و ماقبل}$$

با جاگذاری در ۱۱-۸۱ ب و استفاده از ۱۱-۸، سرانجام به دست می‌آوریم

$$A_l \frac{(kr)^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)} = \frac{1}{2} [4\pi(2l+1)]^{1/2} (ikr)^l \frac{1}{l!} \frac{2^l l!}{2l(2l-1)(2l-2)\cdots(l+1)} \frac{2}{2l+1}$$

با تعیین  $A_l$ ، بسط ۱۱-۷۹ به صورت زیر درمی‌آید

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (11-82)$$

که در بحث نظریه برخورد بسیار مفید است.

## مسائل

۱۱-۱ یک مولکول از دو اتم یکسان تشکیل شده است که هر یک در حالت پایه خود دارای اسپین ۰ است. در میان برانگیختگیهای ممکن این مولکول، برانگیختگیهای چرخشی را در نظر می‌گیریم. اگر این چرخش تنها حول محور  $z$  باشد، به طوری که  $H = L_z^2/2I$ ، و فاصله بین اتمها را ثابت بگیریم، طیف چرخشی را به دست آورید. اگر اسپین اتمها  $1/2$  باشد و هر دو اتم در یک حالت اسپینی باشند، طیف به چه صورتی درمی‌آید؟

۱۱-۲ هماهنگهای کروی در ۱۱-۶۵ را برحسب  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ،  $y = r \sin \theta \sin \phi$  و  $z = r \cos \theta$  بیان کنید.

$$\langle Y_{lm_1} | L_x | Y_{lm_2} \rangle \quad ۳-۱۱ \text{ و } \text{www.arsanjan.blogfa.com}$$

$$\langle Y_{lm_1} | L_y^2 | Y_{lm_2} \rangle \text{ و } \langle Y_{lm_1} | L_x^2 | Y_{lm_2} \rangle \text{ را محاسبه کنید.} \quad ۴-۱۱$$

[راهنمایی: با استفاده از ۳۶-۱۱ و ۴۸-۱۱،  $\langle Y_{lm_1} | L_x^2 | Y_{lm_2} \rangle$  و کمیت‌های لازم دیگر را محاسبه کنید.]

۵-۱۱ هامیلتونی یک چرخنده با تقارن محوری با رابطه زیر داده می‌شود

$$H = \frac{L_x^2 + L_y^2}{2I_1} + \frac{L_z^2}{2I_2}$$

ویژه‌مقدارهای  $H$  را به دست آورید. طیف را با فرض  $I_1 > I_2$  ترسیم کنید.

۶-۱۱ ثابت کنید  $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = 0$  فقط برای حالتی با تکانه زاویه‌ای کل  $l = 0$  ممکن است. [راهنمایی: از رابطه کاملیت]

$$\sum_l \sum_m |Y_{lm}\rangle \langle Y_{lm}| = 1$$

[استفاده کنید.]

۷-۱۱ اگر محور کوانتش در راستای  $x$  باشد، یعنی  $L_x$  عملگر برگزیده باشد، می‌توان نقطه  $\mathbf{r}$  را با زاویه‌های  $\Theta$  و  $\Phi$  تعریف کرد که به ترتیب عبارت‌اند از زاویه‌ای که بردار مکان  $\mathbf{r}$  با محور  $x$  می‌سازد و زاویه‌ای که تصویر  $\mathbf{r}$  روی صفحه  $yz$  (عمود بر محور  $x$ ) با محور  $y$  می‌سازد. هماهنگ‌های کروی را در این مورد با  $Y_{LM}(\Theta, \Phi)$  نشان می‌دهیم، و اینها را می‌توان برحسب  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ ‌ها بسط داد:

$$Y_{LM}(\Theta, \Phi) = \sum_l \sum_m C_{lm}(L, M) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

(الف)  $\Theta$  و  $\Phi$  را برحسب  $\theta$  و  $\phi$  به دست آورید.

(ب) تابع موج مربوط به  $M = L$  را در نظر بگیرید، و خواص  $C_{lm}(L, L)$  را تا جایی که می‌توانید تعیین کنید.

۸-۱۱ صورت صریح هماهنگ‌های کروی بهنجار شده  $l = 3$ ،  $Y_{30}$ ،  $Y_{31}$ ،  $Y_{32}$ ،  $Y_{33}$  را به دست آورید.

۹-۱۱ با استفاده از روشی که در این فصل به اختصار بیان شد، درباره چرخش در چهار بعد بحث کنید. تعمیم  $L$  در اینجا عبارت است از مجموعه عملگرهایی که می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت

$$L_{ij} = -i(x_i \partial_j - x_j \partial_i)$$

که در آن  $\partial_i$  نشاندهنده  $\partial/\partial x_i$  است، و  $\epsilon_{ijk}$  و  $\delta_{ij} = 1, 0, -1$  با وارد کردن

$$(J_1, J_2, J_3) = (L_{23}, L_{31}, L_{12})$$

و

$$(K_1, K_2, K_3) = (L_{14}, L_{24}, L_{34})$$

(الف) رابطه‌های جابه‌جایی تمام این شش عملگر را بین خودشان به دست آورید.  
(ب) نشان دهید هر یک از عملگرهای

$$\mathbf{J}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{J} + \mathbf{K}); \quad \mathbf{J}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{J} - \mathbf{K})$$

از رابطه‌های جابه‌جایی عملگر تکانه زاویه‌ای پیروی می‌کنند و با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. با استفاده از نتیجه نهایی، بزرگترین مجموعه مشاهده‌پذیرهای جابه‌جا شونده را به دست آورید، و از اینجا اعداد کوانتومی را که باید برای نشانگذاری ویژه‌تابعها به کار برده شوند تعیین کنید.

۱۰-۱۱ ذره‌ای در یک پتانسیل متقارن کروی در حالتی است که با بسته موج زیر توصیف می‌شود

$$\psi(x, y, z) = C(xy + yz + zx)e^{-\alpha r}$$

احتمال اینکه از اندازه‌گیری مجذور تکانه زاویه‌ای مقدار  $0$  به دست آید چقدر است؟ احتمال به دست آمدن  $6\hbar^2$  را تعیین کنید. اگر معلوم شود که  $l$  برابر با  $2$  است، احتمالهای نسبی مربوط به  $2, -1, 0, 1, -2$  را محاسبه کنید.

۱۱-۱۱ الگوی زیر را برای یک استوانه کاملاً هموار در نظر بگیرید: این حلقه‌ای است به شعاع  $R$  متشکل از ذرات یکسان هم‌فاصله به جرم  $M/N$ ، و در نتیجه جرم حلقه  $M$  و گشتاور لختی آن  $MR^2$  است. مقادیر ممکن تکانه زاویه‌ای و ویژه‌مقدارهای انرژی را محاسبه کنید. اختلاف انرژی بین حالت پایه با تکانه زاویه‌ای صفر و اولین حالت برانگیخته چقدر است؟ نشان دهید که این تقاضل به‌ازای  $\infty \rightarrow N$  به بینهایت میل می‌کند. این نتیجه را با انرژی یک استوانه "دندانه‌ای" فاقد تقارن تحت چرخش  $2\pi/N$  رادیان است، مقایسه کنید. این مثال نشان می‌دهد که به چرخش درآوردن یک استوانه کاملاً هموار غیرممکن است، و این نتیجه سازگار با این واقعیت است که برای استوانه کاملاً هموار چنین چرخشی غیرقابل مشاهده است.

۱۲-۱۱  $\mathbf{L}^2$  را برحسب  $\partial/\partial\theta$  و  $\partial/\partial\phi$  بیان کنید. معادله دیفرانسیل حاکم بر  $\Theta_{lm}$  را که در ۱۱-۴۹ وارد شده است بنویسید.

[www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

مطالب این فصل را می‌توان در هر یک از کتابهایی که در کتابشناسی معرفی شده‌اند پیدا کرد. برای نگاهی عمیقتر به پیامدهای ناوردایی تحت چرخش، مخصوصاً مراجع کنید به

K Gottfried, *Quantum Mechanics*, Vol 1, W A Benjamin, New York, 1966.

M E Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, New York, 1957.

# ۱۲

## اتم هیدروژن

اتم هیدروژن از همه اتمها ساده تر است، زیرا بیش از یک الکترون ندارد. بنابراین، معادله شرودینگر پس از جدا کردن حرکت مرکز جرم یک معادله تک ذره ای می شود. اتمهای هیدروژنگونه را در نظر می گیریم، یعنی اتمهایی که تنها یک الکترون دارند اما هسته های آنها می توانند بیشتر از یک پروتون داشته باشند. بنابراین، پتانسیل عبارت است از

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \quad (۱-۱۲)$$

و معادله شرودینگر شعاعی به صورت زیر است

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) R + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E + \frac{Ze^2}{r} - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] R = 0 \quad (۲-۱۲)$$

تنها حالت های مقید، یعنی جواب های مربوط به  $E < 0$ ، را بررسی می کنیم با استفاده از تعویض متغیر مناسب

$$\rho = \left( \frac{2\mu|E|}{\hbar^2} \right)^{1/2} r \quad (۳-۱۲)$$

معادله به صورت زیر درمی آید [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R + \left( \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} \right) R = 0 \quad (4-12)$$

که در آن پارامتر بی بعد  $\lambda$  عبارت است از

$$\lambda = \frac{Z e^2}{h} \left( \frac{\mu}{2|E|} \right)^{1/2} = Z \alpha \left( \frac{\mu c^2}{2|E|} \right)^{1/2} \quad (5-12)$$

صورت دوم معادله برای محاسبه ساده تر است، زیرا  $\alpha = 1/137$  و انرژی برحسب جرم سکون بیان شده است؛ اما صورت اول به روشنی نشان می دهد که سرعت نور  $c$  واقعاً در معادله شریک ظاهر نمی شود، یعنی این معادله دقیقاً یک معادله غیرنسبیتی است.

### طیف انرژی

معادله ۴-۱۲ را به روشی که دیگر با آن آشنا هستیم حل می کنیم. ابتدا رفتار مجانبی آن را تعیین می کنیم. به ازای مقادیر بزرگ  $\rho$ ، معادله به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} - \frac{1}{4} R \simeq 0 \quad (6-12)$$

که جواب آن، با رفتار مناسب در بینهایت، به صورت  $R \sim e^{-\rho/2}$  است. مانند مورد نوسانگر هماهنگ، می نویسیم

$$R(\rho) = e^{-\rho/2} G(\rho) \quad (7-12)$$

در ۴-۱۲ جاگذاری می کنیم و معادله مربوط به  $G(\rho)$  را به دست می آوریم. پس از عملیات ریاضی لازم، به معادله زیر می رسیم

$$\frac{d^2 G}{d\rho^2} - \left( 1 - \frac{2}{\rho} \right) \frac{dG}{d\rho} + \left[ \frac{\lambda - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] G = 0 \quad (8-12)$$

اکنون  $G(\rho)$  را به صورت بسط توانی زیر می نویسیم

$$G(\rho) = \rho^l \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \quad (9-12)$$



این واقعیت که  $R(\rho)$  و در نتیجه  $G(\rho)$  در مبدأ مانند  $\rho^l$  رفتار می‌کنند در فصل ۱۰ برای تمام پتانسیلهای صادق در ۱۰-۴۱ اثبات شد. با جاگذاری ۱۲-۹ در معادله دیفرانسیل، رابطه‌ای میان ضرایب مختلف  $a_n$  به دست می‌آوریم. این رابطه بازگشتی از معادله دیفرانسیل حاکم بر

$$H(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n \quad (10-12)$$

به دست می‌آید، که عبارت است از

$$\frac{d^2 H}{d\rho^2} + \left( \frac{2l+2}{\rho} - 1 \right) \frac{dH}{d\rho} + \frac{\lambda - 1 - l}{\rho} H = 0 \quad (11-12)$$

در واقع، با جاگذاری  $G(\rho) = \rho^l H(\rho)$  در ۱۲-۸ داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ n(n-1)a_n \rho^{n-2} + n a_n \rho^{n-1} \left( \frac{2l+2}{\rho} - 1 \right) + (\lambda - 1 - l) a_n \rho^{n-1} \right] = 0 \quad (12-12)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{ (n+1)[n a_{n+1} + (2l+2)a_{n+1}] + (\lambda - 1 - l - n)a_n \} \rho^{n-1} = 0$$

چون ضرایب توانهای مختلف  $\rho$  باید صفر باشند، رابطه بازگشتی زیر به دست می‌آید

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+l+1-\lambda}{(n+1)(n+2l+2)} \quad (13-12)$$

به‌ازای مقادیر بزرگ  $n$  این رابطه تبدیل می‌شود به

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \simeq \frac{1}{n} \quad (14-12)$$

و، مانند مورد مسئله نوسانگر هماهنگ، می‌توان نشان داد جوابی که در بینهایت خوشرفتار باشد به دست نمی‌آید مگر اینکه رشته ۱۲-۹ قطع شود. یعنی برای یک مقدار معین  $l$ ، به‌ازای یک  $n$  که آن را با  $n_r$  نشان می‌دهیم باید داشته باشیم

$$\lambda = n_r + l + 1 \quad (15-12)$$

$$n = n_r + l + 1 \quad (۱۶-۱۲)$$

از این واقعیت که  $n_r \geq 0$  نتیجه می‌گیریم که

$$n \geq l + 1 \quad (۱)$$

(۲)  $n$  یک عدد درست است

(۳) رابطه

$$\lambda = n \quad (۱۷-۱۲)$$

ایجاب می‌کند که

$$E = -\frac{1}{2} \mu c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2}$$

که از الگوی قدیمی بور با آن آشنا هستیم. توجه کنید که در این رابطه جرم کاهیده ظاهر می‌شود؛ البته این نتیجه منحصر به رهیافت معادله دیفرانسیلی نیست. در نظریه قدیمی بور نیز می‌توان با بررسی مناسب مدارهای کلاسیک، با شرط کوانتیده بودن تکانه زاویه‌ای، جرم کاهیده را در فرمول انرژی وارد کرد. وجود جرم کاهیده

$$\mu = \frac{mM}{m+M} \quad (۱۸-۱۲)$$

که در آن  $m$  جرم الکترون و  $M$  جرم هسته است، به معنای این است که بسامدهای

$$\omega_{i,j} = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{mc^2/2h}{1 + m/M} (Z\alpha)^2 \left( \frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (۱۹-۱۲)$$

برای اتمهای هیدروژنگونه مختلف اندکی متفاوت هستند. مخصوصاً، تفاوت میان طیف هیدروژن و طیف دوتریم که در آن  $M$  بسیار نزدیک به دو برابر جرم پروتون است— باعث شد که یوری در سال ۱۹۳۲ دوتریم را کشف کند.

## واگنی طیف

اکنون واگنی طیف انرژی را بررسی می‌کنیم. در حالت پایه، یعنی وقتی  $\lambda = 1$ ، باید داشته باشیم  $n_r = 0$  و  $l = 0$ . تنها یک حالت پایه وجود دارد. به ازای  $\lambda = 2$ ، دو امکان وجود دارند:

(۱)  $n_r = 1$  و  $l = 0$ . در اینجا با نوشتن ۱۲-۱۳ به صورت

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n - n_r}{(n+1)(n+2l+2)} \quad (20-12)$$

دیده می‌شود که  $a_1/a_0 = -1/(1 \times 2)$  و در نتیجه

$$H(\rho) = a_0(1 - \rho/2) \quad (21-12)$$

در حالی که توزیع زاویه‌ای تقارن کروی دارد. (۲)  $n_r = 0$  و  $l = 1$ . در اینجا تابع موج شعاعی ثابت است:  $H(\rho) = a_0$ ، اما قسمت زاویه‌ای تابع موج حاوی  $Y_{1m}(\theta, \phi)$  است. واگنی  $(2l+1)$  است، و در نتیجه سه حالت از این نوع وجود دارند. واگنی کل به ازای  $n = 2$  برابر است با  $2^2 = 4 = 1 + 3$ .

به ازای  $\lambda = 3$ ، سه امکان وجود دارند: (۱)  $n_r = 2$  و  $l = 0$ . در اینجا یک حالت با  $a_1/a_0 = -1$  و  $a_2/a_1 = -1/6$  و در نتیجه

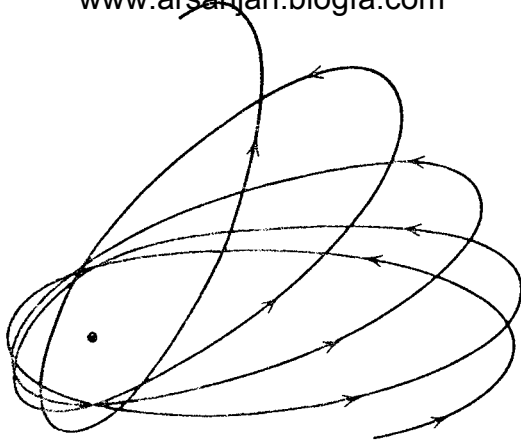
$$H(\rho) = a_0 \left( 1 - \rho + \frac{1}{6}\rho^2 \right) \quad (22-12)$$

(۲)  $n_r = 1$  و  $l = 1$  و سه حالت با  $H(\rho) = a_0(1 - \rho/4)$  داریم. (۳)  $n_r = 0$  و  $l = 2$  که تعداد حالت‌های آن برابر است با  $5 = (2l+1)$ ، و در اینجا  $H(\rho) = a_0$ . بدین ترتیب  $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$  حالت واگن با ویژه‌مقدار  $\lambda = n = 3$  وجود دارند. به طور کلی، واگنی برای  $\lambda = n$  برابر است با

$$1 + 3 + 5 + \dots + [2(n-1) + 1] = n^2 \quad (23-12)$$

از پیش انتظار داریم که برای پتانسیل شعاعی واگنی  $(2l+1)$  باشد، زیرا هامیلتونی شعاعی تنها به  $L^2$  بستگی دارد و مستقل از  $L_z$  است. اما یک واگنی اضافی وجود دارد. این واگنی خاص مشخصه پتانسیل  $1/r$  است. اگر این پتانسیل کولنی را با افزودن یک جمله به صورت زیر تغییر دهیم

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{g^2}{r^2} \quad (24-12)$$



شکل ۱۲-۱ مدار برای پتانسیلی که دقیقاً به صورت  $1/r$  نیست روی خودش بسته نمی‌شود بلکه دارای حرکت تقدیمی است. اگر پتانسیل شعاعی باشد مدار هامنی باقی می‌ماند.

معادله شعاعی بدون تغییر می‌ماند، بجز اینکه به جای  $l(l+1)/r^2$  اکنون داریم  $l^*(l^*+1)/r^2$  که در آن  $l^*(l^*+1) = l(l+1) + g^2$  یعنی  $l^* = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + g^2}$  این تغییر باعث می‌شود انرژی به صورت زیر درآید

$$E = -\frac{1}{2} \mu c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{[n_r + 1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 + g^2}]^2} \quad (25-12)$$

که، به عنوان مثال، برای  $(n_r = 1, l = 2)$  و  $(n_r = 2, l = 1)$  دیگر واگن نیست. واگنی مشخصه پتانسیل  $1/r$  را سابقاً "اتفاقی" می‌نامیدند، زیرا دلیل واضحی برای آن وجود نداشت اما باید دید که منظور از "واضح" چیست. از مکانیک کلاسیک می‌دانیم که پتانسیل  $1/r$  ویژگی‌های خاصی دارد: مدارها بیضیهایی هستند که سمتگیری ثابتی در فضا دارند و حرکت تقدیمی (شکل ۱۲-۱) انجام نمی‌دهند. تغییرات کوچک در این پتانسیل باعث حرکت تقدیمی می‌شوند. این تغییرات می‌توانند ناشی از عوامل مختلف باشند، مثلاً اختلالات ناشی از سایر سیارات در مسئله کیپلر. در بررسی مدار عطارد معلوم شده بود که پس از احتساب اثر سایر سیارات باز هم یک حرکت تقدیمی حسیض عطارد به مقدار  $42''$  در هر قرن بدون توضیح می‌ماند. این حرکت تقدیمی را سرانجام نظریه نسبیت عام اینشتین توضیح داد: بر اساس این نظریه، باید دقیقاً پتانسیل  $1/r^2$  را به پتانسیل نیوتونی  $1/r$  اضافه کرد.

در اتم هیدروژن واقعی اختلالات کوچکی ناشی از اثرات اسپینی و اثرات نسبیتی وجود دارند. این اثرات را در فصل ۱۷ بررسی می‌کنیم. اما با یک تقریب بسیار خوب، مقادیر ممکن  $l$  به‌ازای

یک مقدار معین  $n$  عبارت‌اند از  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  و به‌ازای هر یک از اینها واگنی  $(2l+1)$  است. بنابراین، واگنی کل باز هم  $n^2$  است. چون برای الکترون دو حالت مربوط به اسپین آن وجود دارند، واگنی صحیح در واقع  $2n^2$  است. این موضوع نقش مهمی در توصیف کوانتوم-مکانیکی جدول تناوبی دارد.

## ویژه‌تاب‌های شعاعی

اکنون به معادله شعاعی بازمی‌گردیم. از رابطه بازگشتی ۱۲-۱۳ با تبدیل  $n$  به  $k$  و  $\lambda$  به  $m$ :

$$a_{k+1} = \frac{k+l+1-n}{(k+1)(k+2l+2)} a_k \quad (26-12)$$

به‌دست می‌آوریم

$$a_{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{n-(k+l+1)}{(k+1)(k+2l+2)} \cdot \frac{n-(k+l)}{k(k+2l+1)} \cdots \frac{n-(l+1)}{1 \cdot (2l+2)} a_0 \quad (27-12)$$

با استفاده از این رابطه می‌توان بسط رشته توانی مربوط به  $H(\rho)$  را به‌دست آورد. در واقع،  $H(\rho)$  چندجمله‌ای لاگر وابسته است:

$$H(\rho) = L_{n-l-1}^{(2l+1)}(\rho) \quad (28-12)$$

جدول این چندجمله‌ایها و ویژگیهای آنها را در اغلب کتابهای ریاضی و ریاضی فیزیک یافت می‌شوند.<sup>۱</sup>

با استفاده از

$$a_0 = \frac{h}{\mu c \alpha} \quad (29-12)$$

۱. یک کتاب بسیار مفید در این زمینه کتابدستی زیر است

چند تابع شعاعی را با تبدیل [www.larsonian.blogfa.com](http://www.larsonian.blogfa.com) از این به بعد در زیر می‌نویسیم

$$R_{10}(r) = 2 \left( \frac{Z}{a_0} \right)^{r/2} e^{-Zr/a_0}$$

$$R_{20}(r) = 2 \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{r/2} \left( 1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{Z}{2a_0} \right)^{r/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

(۳۰-۱۲)

$$R_{30}(r) = 2 \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{r/2} \left[ 1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2(Zr)^2}{27a_0^2} \right] e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{31}(r) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{r/2} \frac{Zr}{a_0} \left( 1 - \frac{Zr}{6a_0} \right) e^{-Zr/3a_0}$$

$$R_{32}(r) = \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left( \frac{Z}{3a_0} \right)^{r/2} \left( \frac{Zr}{a_0} \right)^2 e^{-Zr/3a_0}$$

ویژگیهای کیفی زیر را می‌توان از بررسی ویژه‌جوابها به دست آورد:

الف) رفتار  $r^l$  به‌ازای مقادیر کوچک  $r$ ، که باعث می‌شود تابع موج درگستره‌ای از شعاعها که با  $l$  افزایش می‌یابد کوچک بماند، پیامد وجود سد مرکزگریزی دافعه‌ای است که الکترونها را از نزدیک شدن به هسته باز می‌دارد.

ب) رابطه ۲۶-۱۲ نشان می‌دهد  $H(\rho)$  یک چندجمله‌ای از درجه  $n - l - 1$  است، و از این رو  $n_r$  گره (صفر) شعاعی دارد. توزیع چگالی احتمال

$$P(r) = r^2 [R_{nl}]^2 \quad (31-12)$$

$n - 1$  "برآمدگی" دارد. وقتی  $l$ ، به‌ازای یک مقدار معین  $n$ ، دارای بیشترین مقدار خود است ( $l = n - 1$ ) تنها یک برآمدگی وجود دارد. چنانکه از ۳۰-۱۲ استنباط می‌شود، و چنانکه می‌توان از جواب معادله دیفرانسیل دید،

$$R_{n,n-1}(r) \propto r^{n-1} e^{-Zr/a_0} \quad (32-12)$$

بنابراین، چگالی احتمال  $P(r) \propto r^{2n} e^{-2Zr/a_0 n}$  در یک  $r$  که از رابطه زیر به دست می‌آید بیشینه می‌شود

$$\frac{dP(r)}{dr} = \left( 2nr^{2n-1} - \frac{2Z}{a_0 n} r^{2n} \right) e^{-2Zr/a_0 n} = 0 \quad (33-12)$$

یعنی در

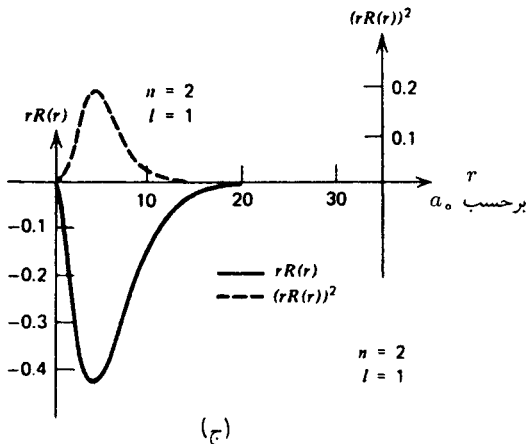
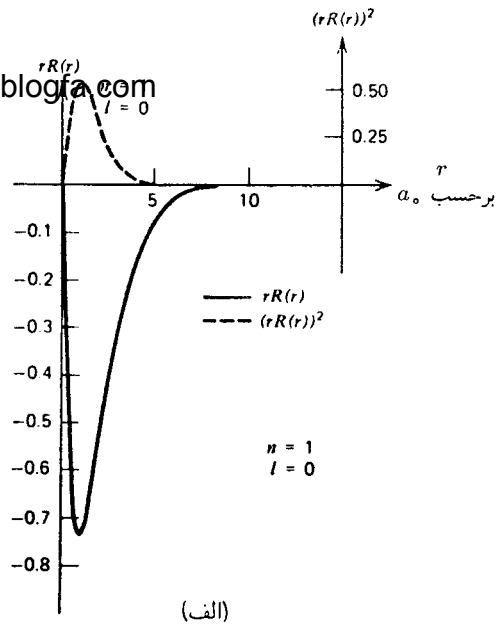
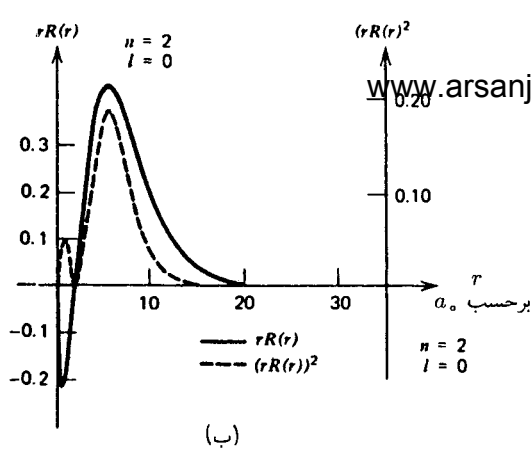
$$r = \frac{n^2 a_0}{Z} \quad (34-12)$$

مقداری است که از اتم بور برای مدارهای دایره‌ای به دست می‌آید. چگالیهای احتمال مربوط به مقادیر کوچکتر  $l$  برآمدگیهای بیشتری دارند. می‌توان نشان داد که این برآمدگیها متناظر با مدارهای بیضوی در حد اعداد کوانتومی بزرگ هستند.

(ج) نمودارهای چگالی احتمال شعاعی  $P(r)$  برای یافتن الکترون در فاصله  $r$  از مبدأ را می‌توان با استفاده از توابع موج ترسیم کرد. شکل ۱۲-۲ طرح کلی را نشان می‌دهد. باید به خاطر داشت که تابع موج قسمت زاویه‌ای هم دارد، که مجذور قدرمطلق آن  $[P_l^m(\cos \theta)]^2$  است. نمودارهای توابع لژاندر وابسته  $P_l^m(\cos \theta)$  در شکل ۱۲-۳ داده شده‌اند. چنانکه دیده می‌شود، با افزایش  $m$  چگالی احتمال از محور  $z$  به سمت صفحه استوایی منتقل می‌شود. وقتی  $|m| = l$ ، چنانکه ۱۱-۶۳ نشان می‌دهد داریم  $|P_l^l(\cos \theta)|^2 \propto \sin^{2l} \theta$ . این تابع حول  $\theta = \pi/2$  به اوج می‌رسد. می‌توان نشان داد که با افزایش  $l$  پهنای قله مانند  $l^{-1/2}$  کاهش می‌یابد، و در نتیجه به ازای اعداد کوانتومی بزرگ به تصویر کلاسیک مدارهای هامنی می‌رسیم. پهنای متناهی قله را می‌توان با ملاحظات زیر توضیح داد. وقتی  $|m| = l$  داریم  $L_z^2 = l^2$  و در نتیجه  $L_x^2 + L_y^2 = l^2$ . بنابراین، بردار تکانه زاویه‌ای هیچگاه نمی‌تواند کاملاً در راستای یک محور قرار گیرد. در ضمن، واگنی  $m$  به ما امکان می‌دهد تا "مدار" را نسبت به یک محور دیگر سمتیابی کنیم، و از این رو هیچ محور  $z$  متمایزی واقعاً وجود ندارد. بدین ترتیب، حالتی که یک ویژه حالت  $L_z$  با ویژه مقدار  $l$  است در راستای  $z$  "سمت‌گیری" می‌کند. تابع موج اکنون یک ترکیب خطی از توابع  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  است، اما انرژی به علت واگنی همان انرژی مربوط به مدارهایی است که در راستای  $z$  سمتگیری کرده‌اند.

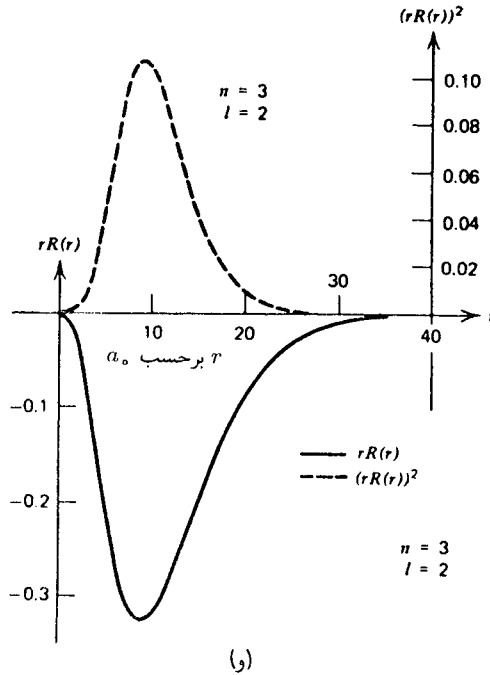
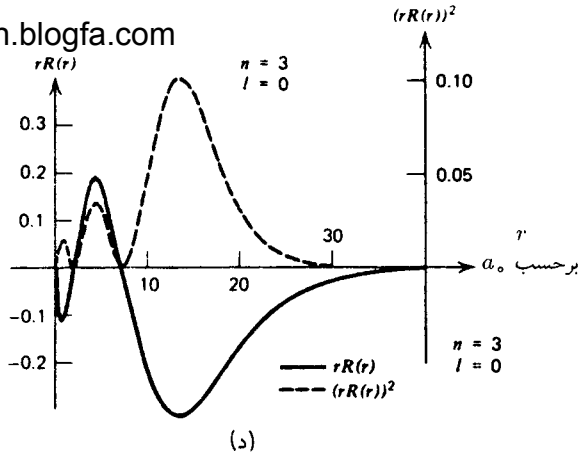
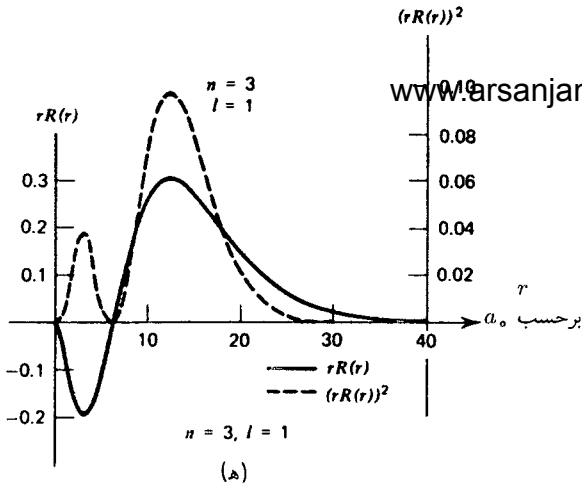
(د) با داشتن توابع موج، می‌توان  $\langle r^k \rangle$  را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کرد

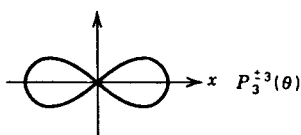
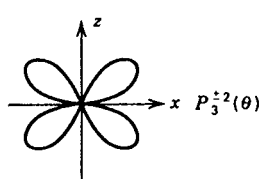
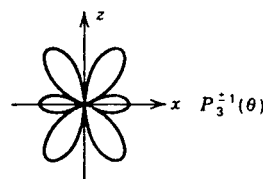
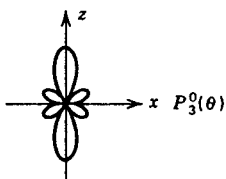
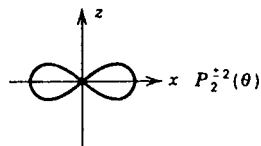
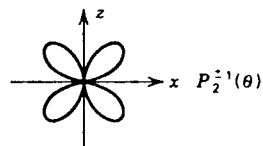
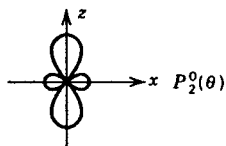
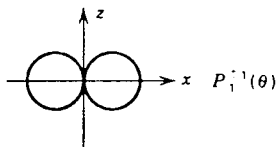
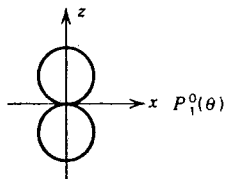
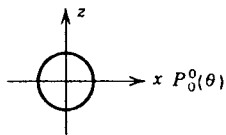
$$\langle r^k \rangle = \int_0^\infty dr r^{2+k} [R_{nl}(r)]^2 \quad (35-12)$$



شکل ۱۲-۲ توابع موج شعاعی  $u(r) = rR(r)$  و توابع چگالی احتمال شعاعی  $u^2(r)$  برای مقادیر  $n = 1, 2$ ، ۳، و مقادیر ممکن  $l$ . محور طول چپ معرف  $u(r)$  و محور طول راست معرف  $u^2(r)$  است. توابع موج با خط پر و توزیعهای احتمال با خط چین نشان داده شده‌اند. محور عرض معرف  $r$  برحسب  $a_0$  است.







شکل ۱۲-۳ نمودارهای چندجمله‌ایهای لژاندر وابسته برحسب  $\theta$  (زاویه میان محور  $z$  و صفحه استوایی که با محور  $x$  نشان داده شده است).

بعضی مقادیر انتظاری مفید عبارت‌اند از

$$\langle r \rangle = \frac{a_0}{\sqrt{Z}} [3n^2 - l(l+1)]$$

$$\langle r^2 \rangle = \frac{a_0^2 n^2}{\sqrt{Z^2}} [5n^2 + 1 - 3l(l+1)]$$

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{Z}{a_0 n^2}$$

$$\left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 \left( l + \frac{1}{2} \right)}$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{Z^3}{a_0^3 n^3 l \left( l + \frac{1}{2} \right) (l + 1)} \quad (۳۶-۱۲)$$

در پراکندگی الکترون (یا پروتون) با جوابهای معادله شرودینگر برای پتانسیل  $1/r$  به ازای  $E > 0$  نیز سروکار داریم. اینها شامل توابع خاص، توابع فوق هندسی همشار، هستند. بررسی این جوابها فراتر از اهداف این کتاب است.

## مسائل

۱-۱۲ طول موجهای مربوط به گذارهای  $1S \rightarrow 2P$  را در موارد زیر مقایسه کنید. (۱) هیدروژن، (۲) دوتریم (با جرم هسته‌ای دو برابر جرم پروتون)، (۳) یوزیترونیم (حالت مقید از یک الکترون و یک پوزیترون که جرم آن برابر با جرم الکترون است).  
 ۲-۱۲ یک الکترون در حالت پایه تریتم، که هسته آن متشکل از یک پروتون و دو نوترون است، قرار دارد. یک واکنش هسته‌ای باعث می‌شود هسته این اتم ناگهان به  $He^2$ ، متشکل از دو پروتون و یک نوترون، تبدیل شود. احتمال این را به دست آورید که الکترون در حالت پایه  $He^2$  باقی بماند.  
 ۳-۱۲ مانسته نسبتی معادله شرودینگر برای الکترونی با اسپین  $\sigma$  (که البته برای الکترون واقعی قابل استفاده نیست) صورت عملگری رابطه زیر است

$$(E - V)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

یعنی

$$\left( \frac{E}{\hbar c} + \frac{Ze^2}{\hbar c} \frac{1}{r} \right)^2 \psi = -\nabla^2 \psi + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi$$

(الف) معادله شعاعی را به دست آورید.

(ب) طیف ویژه مقادارها را با توجه به ارتباط نزدیک معادله شعاعی قسمت (الف) با معادله شعاعی مربوط به مسئله اتم هیدروژن به دست آورید.

۴-۱۲ با استفاده از رابطه  $\langle T \rangle_{n,l} = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle_{n,l}$  [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\langle T \rangle_{n,l} = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle_{n,l}$$

را برای یک ویژه حالت اختیاری اتم هیدروژنگونه (با  $Z$  اختیاری) محاسبه کنید. نشان دهید که به طور کلی برای این پتانسیل داریم

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$$

این یک مثال خاص از قضیه ویریال است.

۵-۱۲ الکترونی در میدان کولنی یک پروتون در حالتی است که با تابع موج زیر توصیف می شود

$$\frac{1}{6} [4\psi_{100}(\mathbf{r}) + 3\psi_{211}(\mathbf{r}) - \psi_{210}(\mathbf{r}) + \sqrt{10} \psi_{21-1}(\mathbf{r})]$$

(الف) مقدار انتظاری انرژی را محاسبه کنید.

(ب) مقدار انتظاری  $L^2$  را به دست آورید.

(ج) مقدار انتظاری  $L_z$  را تعیین کنید.

۶-۱۲ الکترونی در میدان کولنی یک پروتون در حالتی است که با تابع موج زیر توصیف می شود

$$\psi(\mathbf{r}) = \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \right)^{3/2} e^{-\alpha^2 r^2 / 2}$$

رابطه ای برای احتمال یافتن الکترون در حالت پایه این اتم هیدروژن به دست آورید.

۷-۱۲ رابطه ۱۲-۳۲ را با استفاده از رابطه بازگشتی اثبات کنید.

۸-۱۲ الکترون یک اتم هیدروژن در حالت  $n=2, l=1, m=0$  است. تابع موج آن را در فضای تکانه به دست آورید.

۹-۱۲ مقدار انتظاری تابع  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  در هر حالت پایا ثابت است. برای هامیلتونی

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r)$$

ثابت کنید

$$\circ = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] \rangle$$

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle = \langle \mathbf{r} \cdot \nabla V(r) \rangle$$

با استفاده از این رابطه، نتیجه مسئله ۱۲-۴ را اثبات کنید. همچنین با استفاده از این نتیجه،  $\langle 1/r \rangle$  را به دست آورید.

۱۲-۱۰ با استفاده از فونونی که در این فصل بیان شدند، مسئله نوسانگر هماهنگ سه بعدی را با

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$$

بررسی کنید. توجه کنید که چند جمله ایهای لاگر وابسته در این مسئله نیز ظاهر می شوند. ۱۱-۱۲ بنابه نظر جولین شوینگر، نیروی شعاعی متوسط باید برای حالت های پایا صفر شود. با استفاده از این نتیجه،  $\langle n, l | 1/r^2 | n, l \rangle$  را محاسبه کنید. [راهنمایی: کمیت

$$\left\langle n, l \left| \frac{d}{dr} \left[ \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} \right] \right| n, l \right\rangle$$

را محاسبه کنید.]

## مراجع

برای بحث مفصلی درباره اتم های هیدروژن گونه به کتاب زیر مراجعه کنید

E U Condon and G H Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1959.

مسئله اتم هیدروژن در تمام کتاب های مکانیک کوانتومی بررسی می شود.

## برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی

### نظریه کلاسیک

در فصل ۱۲ برهم‌کنش الکترون را با میدان ایستای کولنی ناشی از یک بار نقطه‌ای بررسی کردیم. برای تعمیم این بررسی به برهم‌کنش با میدان مغناطیسی یا الکتریکی خارجی باید ابتدا نظریه کلاسیک را مرور کنیم. معادلات ماکسول برای خلا در دستگاه گاوسی عبارت‌اند از

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (۱-۱۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (۲-۱۳)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t) \quad (۳-۱۳)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (۴-۱۳)$$

که در آنها چگالیهای بار و جریان  $\rho(\mathbf{r}, t)$  و  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  چشمه‌های میدانهای الکترومغناطیسی  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  و  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  هستند. معادله پایستگی بار

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (۵-۱۳)$$

www.arsanjan.blogfa.com خود به خود صادق است.

الکترون به عنوان یک نقطهٔ مادی به جرم  $\mu$  و بار  $-e$  تابع معادلهٔ نیروی لورنتس است:

$$\mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e [(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t))] \quad (۶-۱۳)$$

گذار به مکانیک کوانتومی با ساختن هامیلتونی برای این دستگاه انجام می‌گیرد. برای این کار باید پتانسیل‌های این دستگاه الکترومغناطیسی را تعریف کنیم. با توجه به دو معادلهٔ اول ماکسول، ۱-۱۳ و ۲-۱۳، می‌توان پتانسیل‌های برداری و نرده‌ای  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  و  $\phi(\mathbf{r}, t)$  را به‌گونه‌ای تعریف کرد که

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (۷-۱۳)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \phi(\mathbf{r}, t)$$

در معادلهٔ حرکت الکترون پتانسیل‌های  $\mathbf{A}$  و  $\phi$  مستقیماً دخالت ندارند. این پتانسیل‌ها خوش تعریف نیستند. اگر در معادلهٔ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

را به  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla f(\mathbf{r}, t) \quad (۸-۱۳)$$

تبدیل کنیم معادله تغییر نمی‌کند زیرا  $\nabla \times \nabla f(\mathbf{r}, t) = 0$ . اگر، علاوه بر تبدیل ۸-۱۳،  $\phi$  را به

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (۹-۱۳)$$

تبدیل کنیم میدان الکتریکی تغییر نمی‌کند. این ناوردایی، که ناوردایی تحت تبدیلات پیمانه‌ای نامیده می‌شود، به ما امکان می‌دهد تا پتانسیل‌ها را به‌صورت‌های مختلف، مناسب با منظوری که داریم، تعریف کنیم.

زوج معادله‌های وابسته به چشمة ۳-۱۳ و ۴-۱۳ اکنون به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t) \quad (۱۰-۱۳)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

یا

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (11-13)$$

اگر توزیع بار ایستا باشد، یعنی چگالی  $\rho$  مستقل از زمان باشد، بهتر است پیمانه را طوری انتخاب کنیم که

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (12-13)$$

این انتخاب  $f(\mathbf{r}, t)$  را پیمانه کولن می‌نامند. در این مورد داریم

$$-\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 4\pi \rho(\mathbf{r}) \quad (13-13)$$

یعنی یک پتانسیل نرده‌ای مستقل از زمان داریم، و معادله مربوط به  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  به صورت زیر درمی‌آید

$$-\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (14-13)$$

وقتی توزیع بار ایستا نیست، بهتر است پیمانه لورنتس را انتخاب کنیم که برای آن

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (15-13)$$

با این انتخاب، معادله مربوط به پتانسیل برداری بدون تغییر می‌ماند، اما اکنون پتانسیل نرده‌ای نیز از یک معادله موج پیروی می‌کند. نکته مهمی که باید تذکر دهیم این است که رابطه

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

که در به دست آوردن ۱۱-۱۳ به کار می‌رود تنها در مختصات دکارتی معتبر است. بنابراین، واضح است که  $\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  را باید بر حسب  $x$ ،  $y$  و  $z$  محاسبه کنیم.



برای گذار به مکانیک کوانتومی باید از فرمولبندی هامیلتون برای معادله حرکت ۱۳-۶ استفاده کنیم. در غیاب برهم‌کنش با میدان الکترومغناطیسی، به‌آسانی می‌توان دید که از معادله‌های هامیلتون

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (۱۶-۱۳)$$

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + V(r) \quad (۱۷-۱۳)$$

به‌دست می‌آوریم

$$\mu \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i \quad (۱۸-۱۳)$$

هامیلتونی برای برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی خارجی، که با پتانسیلهای  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  و  $\phi(\mathbf{r}, t)$  نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر است

$$H = \frac{(\mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2\mu} + e\phi(\mathbf{r}, t) \quad (۱۹-۱۳)$$

معادله‌های حرکت هامیلتون عبارت‌اند از

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i + (e/c)A_i}{\mu} \quad (۲۰-۱۳)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{e}{\mu c} \left( p_k + \frac{e}{c} A_k \right) \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (۲۱-۱۳)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \mu \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \frac{dp_i}{dt} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \right) \\ &= e \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_k}{dt} + \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \end{aligned} \quad (۲۲-۱۳)$$

دو جمله اول برابر با  $-eE_i$  و  $\frac{e\hbar}{mc} \nabla \cdot \mathbf{A}$  است. بدین ترتیب، ۱۳-۱۹ انتخاب درستی برای هامیلتونی  $H$  است.

## معادله شرودینگر الکترون در میدان الکترومغناطیسی

معادله شرودینگر برای الکترون در میدان الکترومغناطیسی به صورت زیر است

$$\left[ \frac{((\hbar/i)\nabla + (e/c)\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2\mu} + e\phi(\mathbf{r}, t) \right] \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (۱۳-۲۳)$$

که در آن  $(\hbar/i)\nabla$  را به جای عملگر  $\mathbf{p}$  نوشته‌ایم. قبل از اینکه به حل معادله ویژه مقدری انرژی پردازیم، لازم است ناوردایی پیمانه‌ای را بررسی کنیم. اگر معادله ۱۳-۲۳ را برحسب  $\mathbf{A}'$  و  $\phi'$  با ۱۳-۸ و ۱۳-۹ تعریف می‌شوند بنویسیم، به دست می‌آوریم

$$\left[ \frac{((\hbar/i)\nabla + (e/c)\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) + (e/c)\nabla f(\mathbf{r}, t))^2}{2\mu} + e\phi'(\mathbf{r}, t) - \frac{e}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

که معادله متفاوتی به نظر می‌رسد. به آسانی می‌توان دید که اگر تبدیلهای ۱۳-۸ و ۱۳-۹ را با یک تغییر فاز در تابع موج،  $\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t)$ ، همراه کنیم به طوری که

$$\psi'(\mathbf{r}, t) = e^{i\Lambda(\mathbf{r}, t)} \psi(\mathbf{r}, t) \quad (۱۳-۲۴)$$

آنگاه چون

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(e^{-i\Lambda} \psi') = -i \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \psi + e^{-i\Lambda} \frac{\partial \psi'}{\partial t}$$

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \psi = \frac{\hbar}{i} \nabla (e^{-i\Lambda} \psi') = -\hbar \nabla \Lambda \psi - e^{-i\Lambda} \frac{\hbar}{i} \nabla \psi'$$

معادله اصلی برحسب  $\mathbf{A}'$ ،  $\phi'$  و  $\psi'$  به دست می‌آید به شرط اینکه قرار دهیم

$$\Lambda(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\hbar c} f(\mathbf{r}, t) \quad (۱۳-۲۵)$$

اکنون به معادله شرودینگر بازمی‌گردیم. تنها میدانهای مستقل از زمان را در نظر می‌گیریم، یعنی  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$  و  $\phi = \phi(\mathbf{r})$ . در این مورد، می‌توان نوشت

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r}) \quad (26-13)$$

و

$$\left[ \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) + e\phi(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (27-13)$$

که به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - \frac{ieh}{\mu c} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi - \frac{ieh}{2\mu c} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \psi + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \psi + e\phi(\mathbf{r}) \psi = E\psi \quad (28-13)$$

اکنون با استفاده از آزادی انتخاب تابع پیمانه  $f(\mathbf{r})$  به‌گونه‌ای که

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \quad (29-13)$$

به دست می‌آوریم

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - \frac{ieh}{\mu c} \mathbf{A} \cdot \nabla \psi + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \psi + e\phi(\mathbf{r}) \psi = E\psi \quad (30-13)$$

## میدان مغناطیسی ثابت

برای میدان مغناطیسی یکنواخت ثابت  $\mathbf{B}$  می‌توان نوشت<sup>۱</sup>

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (31-13)$$

بنابراین،  $\mathbf{A}$  برحسب سه مؤلفه‌اش عبارت است از

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c} (yB_z - zB_y, zB_x - xB_z, xB_y - yB_x)$$

۱. توجه کنید که این انتخاب یکتا نیست، زیرا می‌توان گرادیان هر تابعی را به  $\mathbf{A}$  اضافه کرد بدون اینکه  $\mathbf{B}$  تغییر کند. اما این انتخاب بسیار مناسب است.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{r} B_x + \frac{1}{r} B_x', B_y', B_z \right) \\ &= \mathbf{B}\end{aligned}$$

اکنون جمله دوم در ۱۳-۳ به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}\frac{ie\hbar}{2\mu c} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \psi &= -\frac{ie\hbar}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \nabla \psi \\ &= \frac{e}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \psi = \frac{e}{2\mu c} \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} \psi\end{aligned}\quad (32-13)$$

و برای جمله سوم، اگر راستای  $\mathbf{B}$  را محور  $z$  بگیریم، داریم

$$\frac{e^2}{4\mu c^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{B})^2 \psi = \frac{e^2}{4\mu c^2} [r^2 B^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})^2] \psi = \frac{e^2 B^2}{4\mu c^2} (x^2 + y^2) \psi \quad (33-13)$$

نتیجه بالا به صورت پتانسیل نوسانگر هماهنگ دوبعدی است.

بزرگیهای این دو جمله را با هم مقایسه می‌کنیم. نسبت این دو را با گرفتن  $\langle L_z \rangle$  از مرتبه  $h$  و  $\langle x^2 + y^2 \rangle$  از مرتبه  $a_0^2$ ، که شعاع بور است، برآورد می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{(e^2/4\mu c^2)a_0^2 B^2}{(e^2/2\mu c^2)\hbar B} &\approx \frac{1}{4} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{B}{e/a_0} \approx \frac{1}{548} \frac{B}{e/a_0} \\ &\approx \frac{B}{548(4.8 \times 10^{-10}) / (0.5 \times 10^{-8})^2} \\ &\approx \frac{B}{9 \times 10^9 \text{G}}\end{aligned}\quad (34-13)$$

بنابراین، در دستگاه‌های اتمی، با میدانهایی که نوعاً در آزمایشگاه در دسترس هستند، یعنی  $B \lesssim 10^4 \text{G}$ ، جمله درجه دوم مسلماً قابل چشمپوشی است. به روش مشابهی می‌توان جمله‌ای را که بر حسب  $B$  خطی است با مقایسه با انرژی پتانسیل کولنی برآورد کرد:

$$\frac{(e/2\mu c)\hbar B}{e^2/a_0} \approx \frac{1}{2} \frac{\hbar/\mu c}{e/a_0} B \approx \frac{1}{274} \frac{B}{e/a_0} \approx \frac{B}{5 \times 10^9 \text{G}} \quad (35-13)$$

بنابراین، جمله خطی ترازهای انرژی اتمی را تنها اندکی مختل می‌کند. جمله درجه دوم در دو وضعیت می‌تواند بسیار مهم شود: اگر میدان مغناطیسی بسیار شدید باشد؛ تصور می‌رود که میدانهایی به بزرگی  $10^{12}$  گاوس می‌توانند در سطح ستاره‌های نوترونی وجود داشته باشند، و این میدانها تغییرات بنیانی در ساختار اتمها ایجاد می‌کنند.<sup>۲</sup> جمله درجه دوم در بررسی حرکت ماکروسکوپی الکترونها در میدان خارجی، مثلاً حرکت الکترون در یک سنکروترون، نیز اهمیت دارد.

### اثر بهنجار زیمان

ابتدا تنها جمله خطی را در نظر می‌گیریم، و محور  $z$  را در راستای  $\mathbf{B}$  انتخاب می‌کنیم. بنابراین، به هامیلتونی مربوط به  $\mathbf{B} = 0$  جمله زیر اضافه می‌شود

$$H_{\perp} = \frac{c}{\gamma \mu c} B L_z \quad (36-13)$$

اگر بسامد زیر را، که بسامد لارمور نامیده می‌شود، تعریف کنیم

$$\frac{eB}{\gamma \mu c} = \omega_L \quad (37-13)$$

و ویژه‌حالت‌های انرژی را در نظر بگیریم که همزمان ویژه‌حالت‌های  $\mathbf{L}^2$  و  $L_z$  هستند، آنگاه جمله اضافی ۳۶-۱۳ وقتی روی یک ویژه‌حالت اثر کند یک عدد به دست می‌دهد، یعنی

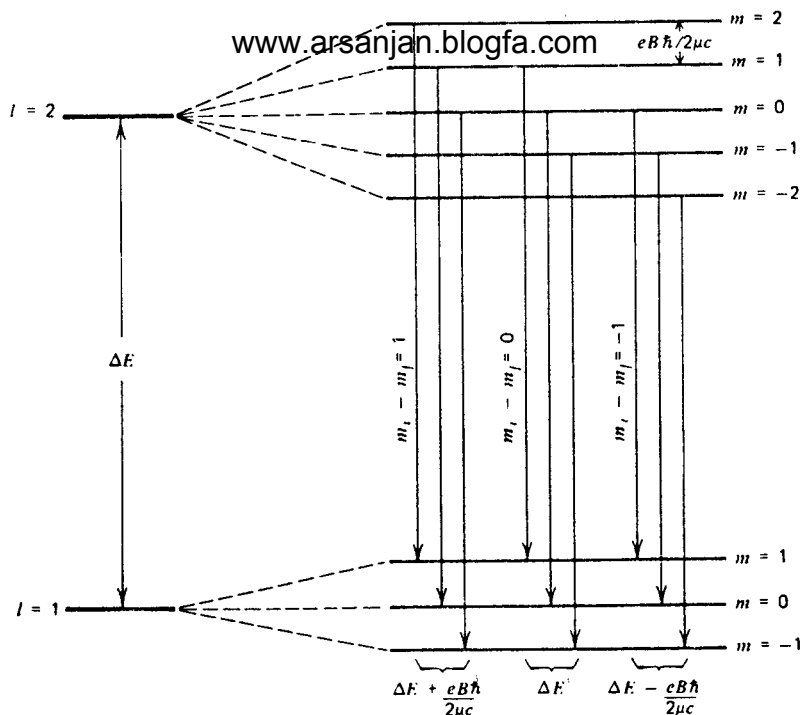
$$H_{\perp} u_{nlm}(\mathbf{r}) = \hbar \omega_L m u_{nlm}(\mathbf{r}) \quad (38-13)$$

که در آن  $m$  ویژه‌مقدار مؤلفه  $z$  تکانه زاویه‌ای، با  $-l \leq m \leq l$ ، است. بنابراین، ترازهای انرژی موجود با واگنی  $(l+1)$  تایی به  $l+1$  مؤلفه همفاصله، با انرژیهای

$$E = -\frac{1}{\gamma} \mu c^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} + \hbar \omega_L m \quad (39-13)$$

شکافته می‌شوند. اندازه شکافتگی برابر است با

۲. مراجعه کنید به



شکل ۱۳-۱ اثر بهنجار زیمان: از بازده گذار ممکن بین حالت‌های  $l = 1$  و  $l = 2$ ، که توسط میدان مغناطیسی شکافته شده‌اند، تنها نه گذار، مربوط به  $1, 0, -1$ ، در تشکیل سه خط دخالت دارند.

$$\begin{aligned} \frac{eB\hbar}{2\mu c} &= \frac{e\hbar}{2\mu c} \left( \frac{B}{e/a_0^2} \right) \frac{e}{a_0^2} \\ &= \frac{e^2\hbar}{2\mu c} \left( \frac{\mu c \alpha}{\hbar} \right)^2 \left( \frac{B}{e/a_0^2} \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} \alpha^2 \mu c^2 \right) \alpha \frac{B}{e/a_0^2} \\ &= \left( \frac{B}{2.4 \times 10^4} \right) \times 13.6 \text{ eV} \end{aligned}$$

چون بنابه قاعده‌های گزینش (که بعداً خواهیم دید) تنها گذارهایی مجازند که در آنها  $m$  یا بدون تغییر بماند یا به اندازه ۱ تغییر کند، معلوم می‌شود که خط منفردی که گذار با  $B = 0$  را نشان می‌دهد به سه خط شکافته می‌شود شکل (۱۳-۱). این اثر را اثر بهنجار زیمان می‌نامند. در واقع، اگر حالت اسپینی الکترون در اتم حالتی با اسپین صفر نباشد، برهم‌کنش اسپین الکترون

با میدان مغناطیسی نقش قبلاً پیش‌بینی شد را تغییر می‌دهد. این اثر متداولتر را، که اثر نابهنجار زیمان نامیده می‌شود، پس از بحث اسپین بررسی خواهیم کرد.

## میدانهای مغناطیسی بزرگ و حد کلاسیک

حل مسئله الکترون در میدان مغناطیسی ثابت تحت شرایطی که از نمی‌توان جمله  $B^2$  را صرفنظر کرد اما پتانسیل کولنی قابل چشمپوشی است جالب توجه است. در این شرایط، و باز هم با انتخاب راستای  $B$  به‌عنوان محور  $z$ ، معادله شرودینگر با توجه به  $13-30$ ،  $13-32$  و  $13-33$  به صورت زیر درمی‌آید

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + \frac{eB}{2\mu c} L_z \psi + \frac{e^2 B^2}{4\mu c^2} (x^2 + y^2) \psi = E \psi \quad (40-13)$$

حضور "پتانسیل"  $(x^2 + y^2)$  نشان می‌دهد که برای جداسازی متغیرها از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. با نوشتن

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned} \quad (41-13)$$

و به روشی که در آغاز فصل ۱۱ مطرح شد به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (42-13)$$

و در نتیجه

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (43-13)$$

اکنون اگر بنویسیم

$$\psi(\mathbf{r}) = u_m(\rho) e^{im\phi} e^{ikz} \quad (44-13)$$

نتیجه می‌گیریم که معادلهٔ دیفرانسیل از [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} u - \frac{e^2 B^2}{4\hbar^2 c^2} \rho^2 u + \left( \frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{eB\hbar m}{\hbar^2 c} - k^2 \right) u = 0 \quad (45-13)$$

با وارد کردن متغیر

$$x = \sqrt{\frac{eB}{2\hbar c}} \rho \quad (46-13)$$

معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\lambda}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2} u - x^2 u + \lambda u = 0 \quad (47-13)$$

که در آن

$$\lambda = \frac{2\mu c}{eB\hbar} \left( E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \right) - 2m \quad (48-13)$$

می‌توان به سادگی دید که (الف) رفتار  $u(x)$  در بینهایت که از

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - x^2 u \approx 0$$

تعیین می‌شود به صورت  $u(x) \sim e^{-x^2/2}$  است، و (ب) رفتار  $u(x)$  در نزدیکی  $x = 0$  که از

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\lambda}{x} \frac{du}{dx} - \frac{m^2}{x^2} u \approx 0$$

تعیین می‌شود به صورت  $u(x) \sim x^{|m|}$  است. بنابراین، می‌نویسیم

$$u(x) = x^{|m|} e^{-x^2/2} G(x) \quad (49-13)$$

و با جاگذاری در ۴۷-۱۳ معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر  $G(x)$  را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left( \frac{2|m| + 1}{x} - 2x \right) \frac{dG}{dx} + (\lambda - 2 - 2|m|)G = 0 \quad (50-13)$$



$$y = x^2 \quad (51-13)$$

به صورت معادله ۱۱-۱۲ در می‌آید:

$$\frac{d^2 G}{dy^2} + \left( \frac{|m| + 1}{y} - 1 \right) \frac{dG}{dy} + \frac{\lambda - 2 - 2|m|}{4y} G = 0 \quad (52-13)$$

اکنون می‌توان به روش فصل ۱۲ عمل کرد. مقایسه با ۱۱-۱۲ نشان می‌دهد که باید داشته باشیم

$$\frac{1}{4}\lambda - \frac{1 + |m|}{2} = n_r \quad (53-13)$$

که یک شرط ویژه مقدار با  $n_r = 0, 1, 2, 3, \dots$  است. این رابطه ایجاب می‌کند که  $E - \hbar^2 k^2 / 2\mu$ ، یعنی انرژی منهای انرژی جنبشی حرکت آزاد در راستای  $z$ ، از رابطه زیر به دست آید

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = \frac{eB\hbar}{2\mu c} (2n_r + 1 + |m| + m) \quad (54-13)$$

و

$$G(y) = L_{n_r}^{|m|}(y) \quad (55-13)$$

این جواب را تنها در حد کلاسیک بررسی می‌کنیم. برای این کار، ابتدا نظریه کلاسیک را مرور می‌کنیم. با فرض هامیلتونی ۱۳-۱۹، بدون جمله پتانسیل نرده‌ای، داریم

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}}{\mu} \quad (56-13)$$

و با  $\mathbf{A} = -(1/2)\mathbf{r} \times \mathbf{B}$  به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{r} \times \left( -\frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{B} \right) \\ &= \mathbf{L} - \frac{e}{2c} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) - r^2 \mathbf{B}] \end{aligned} \quad (57-13)$$

که در آن از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad (58-13)$$

مؤلفه معادله ۵۷-۱۳ در راستای  $\hat{z}$  عبارت است از

$$\mu(\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z = L_z + \frac{e}{\gamma c} B(x^2 + y^2)$$

یا

$$\mu \rho v = L_z + \frac{eB}{\gamma c} \rho^2 \quad (59-13)$$

از رابطه نیروی وارد بر الکترون

$$\mathbf{F} = -\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (60-13)$$

برای حرکت دورانی به دست می‌آوریم

$$\frac{\mu v^2}{\rho} = \frac{e v B}{c} \quad (61-13)$$

از ترکیب این معادله با ۵۹-۱۳ به دو رابطه زیر می‌رسیم

$$\frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{eB}{\mu c} L_z \quad (62-13)$$

و

$$\rho = \left[ \frac{\gamma c}{eB} L_z \right]^{1/2} \quad (63-13)$$

اکنون به رابطه انرژی ۵۴-۱۳ بازمی‌گردیم. به دلیل کوچکی  $\hbar$ ، انرژی فقط وقتی می‌تواند برای مقادیر معقول  $B$  اندازه ماکروسکوپی داشته باشد که  $(2n_r + 1 + |m| + m)$  بسیار بزرگ باشد. دو مورد وجود دارند: (الف) اگر  $m < 0$ ، آنگاه  $n_r$  بسیار بزرگ است. اما  $n_r$  درجه چندجمله‌ای  $L_{n_r}^{m}(y)$  را تعیین می‌کند، یعنی تعداد صفرهای تابع را،<sup>۳</sup> و اگر این بسیار بزرگ باشد تابع نمی‌تواند

۳. نگاه کنید به بحث آغاز بخش مربوط به واگنی طیف در فصل ۱۲.

در گستره کوچکی از  $y$  که در آن مدار کلاسیک قرار دارد بزرگ باشد. (ب) اگر  $m > 0$ ، ضریب به صورت  $(2m + 1 + 2n_r)$  درمی‌آید، و این می‌تواند به‌ازای مقادیر کوچک  $n_r$  بزرگ باشد به شرط اینکه  $m$  بزرگ باشد. در اینجا انرژی عبارت است از

$$E - \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \simeq \frac{eB}{\mu c} \hbar m \quad (64-13)$$

که با نتیجه کلاسیک توافق دارد. توجه کنید که مقدار

$$L_z = \hbar m \quad (65-13)$$

همان‌طور که انتظار می‌رود مثبت است.

همچنین می‌توان نشان داد که شعاع مدار، که از بیشینه شدن توزیع احتمال شعاعی تعیین می‌شود، با مقدار کلاسیک تطابق دارد. فرض می‌کنیم  $n_r = 0$ . در این مورد،  $L_{n_r}^{|m|}(y)$  یک مقدار ثابت است، و مجذور تابع موج بنابر ۴۹-۱۳ و ۵۵-۱۲ عبارت است از

$$P(x) = x^{2|m|} e^{-x^2} \quad (66-13)$$

این کمیت در جایی بیشینه است که

$$\frac{dP}{dx} = (2|m|x^{2|m|-1} - 2x^{2|m|+1})e^{-x^2} = 0$$

یعنی در

$$x = \sqrt{|m|} \quad (67-13)$$

که به دست می‌دهد

$$\rho = \left( \frac{2c}{eB} \hbar m \right)^{1/2} \quad (68-13)$$

این مسئله مثال جالبی از اصل تطابق است.

www.arsanjan.blogfa.com ترازهای لاندائو

انتخاب  $\mathbf{A} = (-yB/2, xB/2, 0)$  یکتا نیست. انتخاب

$$\mathbf{A} = (0, Bx, 0) \quad (69-13)$$

نیز همان میدان مغناطیسی را به دست می دهد. اختلاف این  $\mathbf{A}$  با  $\mathbf{A} = -\mathbf{r} \times \mathbf{B}/2$  در یک تبدیل پیمانه‌ای ساده است:

$$\left( \frac{-yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0 \right) = (0, Bx, 0) - \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( \frac{yxB}{2} \right) \quad (70-12)$$

با این انتخاب پتانسیل برداری، عملگر هامیلتونی برای الکترون در میدان مغناطیسی ثابت به صورت زیر درمی آید

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 &= \frac{1}{2\mu} \left( p_x^2 + \left( p_y + \frac{eB}{c} x \right)^2 + p_z^2 \right) \\ &= \frac{1}{2\mu} \left( p_x^2 + p_y^2 + \frac{2eB}{c} x p_y + \left( \frac{eB}{c} \right)^2 x^2 + p_z^2 \right) \end{aligned} \quad (71-13)$$

بدیهی است که  $[H, p_y] = 0$  و  $[H, p_z] = 0$ ، و در نتیجه می توان توابعی ساخت که ویژه تابهایی همزمان  $p_y$ ،  $p_z$  و  $H$  باشند. باز هم این حالت را یک ویژه تابع  $p_z$  با ویژه مقدار صفر می گیریم. اگر ویژه مقدار  $p_y$  را به صورت  $hk$  بنویسیم آنگاه ویژه تابع همزمان به صورت زیر درمی آید

$$\psi(x, y) = e^{iky} v(x) \quad (72-13)$$

که در آن  $v(x)$  عبارت است از جواب معادله

$$\frac{1}{2\mu} \left( -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \left( \frac{eB}{c} \right)^2 \left( x + \frac{\hbar ck}{eB} \right)^2 \right) v(x) = E v(x) \quad (73-13)$$

که دقیقاً معادله یک نوسانگر هماهنگ است که نقطه تعادل آن به جای اینکه در  $x = 0$  باشد در  $x_0 = -\hbar ck/eB$  قرار دارد. بنابراین، می توان جواب را به صورت زیر نوشت

$$\psi(x, y) = e^{ieBx_0 y/\hbar c} u(x - x_0) \quad (74-13)$$

که در آن  $u(x)$  ویژه‌جواب نوسانگر هماهنگ با نقطه تعادل  $x = 0$  است. مقایسه با پتانسیل نوسانگر هماهنگ  $\mu\omega^2 x^2/2$  نشان می‌دهد که

$$\omega = \frac{eB}{\mu c} \quad (75-13)$$

و ویژه‌مقدارهای انرژی عبارت‌اند از

$$E_n = h\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (76-13)$$

این ترازهای انرژی را ترازهای لاندائو می‌نامند.

اگر الکترون در نواری محبوس باشد که دارای اندازه  $L_1$  در راستای  $x$  و اندازه  $L_2$  در راستای  $y$  است، شرط مرزی در راستای  $y$

$$\psi(y) = \psi(y + L_2) \quad (77-13)$$

ایجاب می‌کند که

$$\frac{eBx_0}{hc} L_2 = 2\pi n^1 \quad n^1 = 0, 1, 2, \dots \quad (78-13)$$

از آنجا که

$$0 < x_0 < L_1 \quad (79-13)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$0 \leq n^1 \leq \frac{eB}{2\pi hc} L_1 L_2 \quad (80-13)$$

به‌سادگی می‌توان واریسی کرد که  $hc/eB$  دارای ابعاد مساحت است. (یک راه سریع این کار این است که توجه کنیم که  $eBv/c$  و در نتیجه  $eB$  ابعاد نیرو دارد:  $[eB] = [ML/T^2]$ ، در حالی که  $hc$  دارای ابعاد  $[ML^2/T^2] = [ML/T][L][L/T]$  است.) طول مغناطیسی  $l_B$  را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$l_B^2 = \frac{hc}{eB} \quad (81-13)$$

$$n_{\max}^* = \frac{L_1 L_2}{2\pi l_B^2} = (\text{مساحت نمونه}) / 2\pi l_B^2 \quad (۸۲-۱۳)$$

اکنون بینیم وقتی پایستریز تراز لاندائو ( $n = 0$ ) پر است چه پیش می‌آید. یک نمونه دوبعدی به مساحت  $A$  می‌تواند به‌ازای هر تراز انرژی یک الکترون بگیرد (شاید پرسید چرا در هر حالت انرژی مطابق معمول دو الکترون وجود ندارند، اما چنانکه در فصل بعد خواهیم دید الکترونها دارای گشتاور مغناطیسی وابسته به اسپین هستند، و در نتیجه حالت‌های "بالا" و "پایین" الکترون انرژی‌های متفاوتی دارند). بنابراین، تعداد کل الکترونهايي که پایستریز تراز لاندائو را پر می‌کنند برابر است با

$$n_{\max}^* = A / 2\pi l_B^2$$

### اثر کوانتومی هال با اعداد درست

بحث بالا به اثر کوانتومی هال با اعداد درست که اخیراً کشف شده است مربوط می‌شود (شکل ۱۳-۲). در اینجا به توصیف ساده‌ای از این پدیده بسنده می‌کنیم. اگر یک میدان الکتریکی را در جهت مثبت  $y$  به نمونه دوبعدی اعمال کنیم، الکترونها در جهت منفی  $y$  حرکت می‌کنند، و چگالی جریان عبارت است از

$$j_y = \sigma_0 E_y \quad (۸۳-۱۳)$$

که در آن  $\sigma_0 = n_e^+ \tau_0 / m_e^+$  در اینجا  $n_e$  چگالی الکترون،  $m_e^+$  جرم مؤثر الکترون در ماده، و  $\tau_0$  کمیتی با بعد زمان است، که می‌توان آن را زمان بین برخوردهای الکترون با ناخالصیها و رویدادهای دیگری تعبیر کرد که باعث می‌شوند الکترون انرژی از دست بدهد و به‌طور نامحدود از میدان الکتریکی شتاب نگیرد.

اگر میدان مغناطیسی  $B$  را در جهت  $z$  اعمال کنیم، به هر الکترون نیروی اضافی  $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) / c$  وارد می‌شود. رابطه سرعت  $\mathbf{v}$  با چگالی جریان به صورت  $\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{v}$  است، و در نتیجه الکترونها به گونه‌ای رفتار می‌کنند که انگار میدان الکتریکی اضافی زیر به آنها اعمال می‌شود

$$\mathbf{E}' = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{c} = \frac{-\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{n_e c c}$$

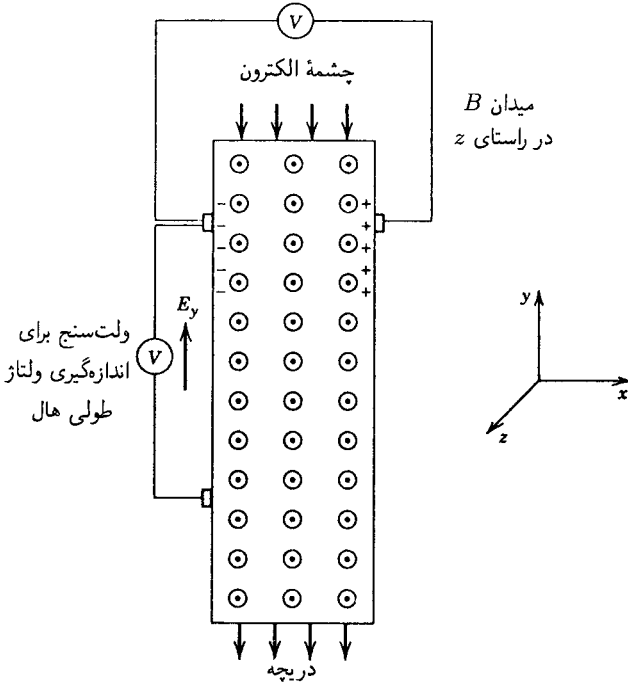
بنابراین، در حضور میدان مغناطیسی چگالی جریان با رابطه زیر داده می‌شود

$$\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E} - \sigma_0 \mathbf{j} \times \mathbf{B} / n_e c c \quad (۸۴-۱۳)$$

www.arsanjan.blogfa.com

ولت‌سنج برای اندازه‌گیری

ولتاژ عرضی هال



شکل ۱۳-۲ طرح کلی برای اندازه‌گیری ولتاژ هال.

که در آن  $B$  در راستای عمود بر صفحه نمونه است. بنابراین، از حل معادله‌های

$$j_x = -\frac{\sigma_o B}{n_e e c} j_y$$

$$j_y = \sigma_o E_y + \frac{\sigma_o B}{n_e e c} j_x$$

و با توجه به تعریف  $\tau_o$  به دست می‌آوریم

$$j_y = \frac{\sigma_o}{1 + (eB\tau_o/m_e^+ c)^2} E_y$$

$$j_x = -\frac{n_e e c}{B} \left( 1 - \frac{1}{1 + (eB\tau_o/m_e^+ c)^2} \right) E_y \quad (۱۳-۸۵)$$

تعداد کل الکترونها را می‌توان با  $f n_{\max}^+$  نشان داد که در آن  $f$  نسبت تعداد کل الکترونها به

$$n_e = \frac{f n_{\max}^*}{A} = f \frac{eB}{hc} \quad (۱۳-۸۶)$$

با استفاده از این رابطه به دست می‌آوریم

$$\frac{j_y}{E_y} = \sigma_0 \frac{1}{1 + (eB\tau_0/m_e^*c)^2}$$

$$\frac{j_x}{e_y} = -\frac{fe^2}{h} + \frac{n_e ec/B}{1 + (eB\tau_0/m_e^*c)^2} \quad (۱۳-۸۷)$$

چگالی الکترونها و میدان مغناطیسی  $B$  در اختیار آزمایشگر است. اگر  $n_e$  ثابت باشد و  $B$  تغییر کند، آنگاه نسبت‌های ۱۳-۸۷ را می‌توان برحسب  $B$  اندازه گرفت. از طرف دیگر، اگر  $B$  ثابت و  $n_e$  متغیر باشد، این نسبتها را می‌توان برحسب  $n_e$  اندازه گرفت. فون کلیتسینگ، دورد، و پیر در سال ۱۹۸۰ نشان دادند که مقادیر  $B$  که به‌ازای آنها  $f = 1, 2, 3, \dots$  باعث می‌شوند که (الف)  $(j_y|E_y) = 0$  و (ب)  $(j_x|E_y) = f(e^2/h)$ . یک توضیح ساده این اثر این است که وقتی ترازهای لاندائو پر هستند الکترون نمی‌تواند به‌طور کشسان پراکنده شود، زیرا این الکترون نمی‌تواند به حالت دیگری با همان انرژی پس‌زده شود. الکترون نمی‌تواند با برانگیختگی گرمایی به تراز لاندائو بعدی برود، زیرا در دماهای کم ( $T \approx 0.1\text{K}$ ) و میدانهای مغناطیسی بزرگ ( $B \approx 10^5\text{G}$ )،  $kt \ll eBh/\mu c$ ، بنابراین  $\tau_0 \rightarrow \infty$ ، و نتیجه مشاهده شده پیامد ۱۳-۸۷ است. این بحث بیش از حد ساده شده است، زیرا در آن اثرهای بسیار زیادی که در وضعیت واقعی روی می‌دهند به حساب نیامده‌اند. برای مثال، بعضی از الکترونها در ناکاملیهای شبکه بلوری به‌دام می‌افتند. ترازهای لاندائو به‌علت اثرات گرمایی و ناخالصی تیز نیستند، و برهم‌کنشهای الکترون-الکترون کاملاً نادیده گرفته شده‌اند. با وجود این، وقتی همه این پیچیدگیها را منظور کنیم، باز هم در مقادیر بحرانی  $B$  نسبت  $j_x/E_y$  را با دقتی بهتر از  $1^\circ$  روی  $1^\circ$  میلیون مضرب درستی از  $e^2/h$  به دست می‌آوریم.<sup>۴</sup>

۴. چنانکه آرلافلین نشان داده است، این کوانتش دقیق در واقع پیامد ناوردایی پیمانه‌ای است. نمونه‌ای از این استدلال را می‌توانید در کتاب زیر ببینید

C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc New York (1986).



نیر به بحث پس از ۱۳-۲۳ باز می‌گردیم. در یک روش کاملاً صوری، می‌توانیم معادله

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + V(r) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (۸۸-۱۳)$$

بوستن

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{-i(e/\hbar c) \int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}} \psi_0(\mathbf{r}) \quad (۸۹-۱۳)$$

حل کنیم. در اینجا  $\psi_0(\mathbf{r})$  جواب معادله زیر است

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \nabla \right)^2 \psi_0(\mathbf{r}) + V(r) \psi_0(\mathbf{r}) = E \psi_0(\mathbf{r}) \quad (۹۰-۱۳)$$

تابع  $f(\mathbf{r})$  انتگرال خطی زیر است که از یک نقطه ثابت معین  $P$  تا نقطه  $\mathbf{r}$  گرفته می‌شود

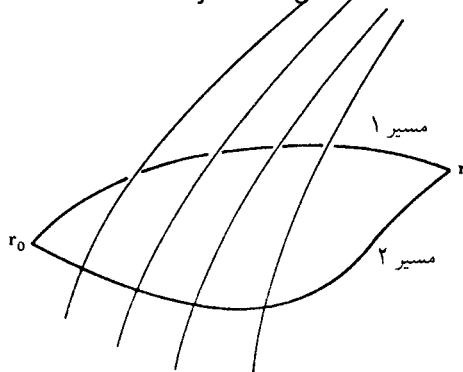
$$f(\mathbf{r}) = \int_P^{\mathbf{r}} d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') \quad (۹۱-۱۳)$$

پس سکرال تنها وقتی  $\mathbf{B} = 0$ ، یعنی در یک ناحیه آزاد از میدان، معنی دارد زیرا اختلاف انتگرال در دو مسیر مختلف، که آنها را با ۱ و ۲ نشانگذاری می‌کنیم، برابر است با

$$\begin{aligned} \int_1 d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) - \int_2 d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) &= \oint d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \\ &= \int_S \nabla' \times \mathbf{A}(\mathbf{r}', t) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \Phi \end{aligned} \quad (۹۲-۱۳)$$

که در آن از قضیه استوکس استفاده کرده‌ایم، و  $\Phi$  شار میدان مغناطیسی از سطحی است که بین دو مسیر قرار دارد (شکل ۱۳-۳). بنابراین، تنها اگر  $\Phi = 0$  ضریب فاز در ۱۳-۸۹ مستقل از انتخاب مسیر انتگرال خطی خواهد بود. این استقلال وقتی لازم است که بخواهیم تابع موج تک‌مَرّی باشد

(اگر بین دو مسیر مس وجود داشته باشد نواع موج الکترونیایی که روی این دو مسیر حرکت می‌کنند در حال محاسبات است می‌آوریم. یک پیامد جالب این است که اگر الکترونی در یک ناحیه رد در مسیر حرکت کرده که همبند شده بیست بدکه "حفره"ای را احاطه کرده باشد که



شکل ۱۳-۳ انتگرالهای  $\int_{r_0}^r A(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$  در دو مسیر ۱ و ۲ به طور کلی یکسان نیستند، زیرا اختلاف آنها برابر است با شار مغناطیسی  $\Phi$  در حلقه بسته.

حاوی شار  $\Phi$  است آنگاه این الکترون پس از تکمیل مدار ضریب فاز اضافی  $e^{ie\Phi/\hbar c}$  به دست می‌آورد. شرط تک مقدار بودن تابع موج الکترون، به طوری که ضریب فاز برابر واحد شود، ایجاب می‌کند که شار محصور کوانتیده باشد:

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{e} n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13-93)$$

این وضعیت در حرکت الکترونها در یک حلقه ابررسانا که ناحیه حاوی شار را احاطه کرده است پیش می‌آید. نخستین آزمایشها، که در سال ۱۹۶۱ انجام شدند<sup>۵</sup>، مبتنی بر طرح زیر بودند: حلقه‌ای از ماده‌ای که می‌تواند ابررسانا شود در یک میدان مغناطیسی خارجی در دمایی بالاتر از دمای بحرانی قرار داده می‌شود، و از این رو حلقه ابررسانا نیست. چون ابررساناها خطوط میدان مغناطیسی را بجز در یک لایه سطحی نازک دفع می‌کنند، در داخل ابررساناها  $\mathbf{B} = 0$ . این پدیده را اثر مایسنر می‌نامند.<sup>۶</sup> اگر این حلقه را تا دمایی کمتر از دمای بحرانی سرد کنیم ابررسانا می‌شود، و شار مغناطیسی در داخل حلقه به دام می‌افتد (شکل ۱۳-۴). اندازه‌گیری ساده شار نشان می‌دهد که رابطه ۱۳-۹۳ با تقریب یک ضریب ثابت برقرار است، یعنی

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar c}{(2e)} n \quad (13-94)$$

5. B S Deaver and W Fairbank, *Phys Rev Lett*, **7**, 43 (1961); R Döll and M Nabauer; *ibid*, **7**, 51 (1961).

۶. برای یک بحث عالی از این نشانه‌های ماکروسکوپی مکانیک کوانتومی مطالعه فصل ۲۱ از جلد سوم سخنرانیهای فاینمن درباره فیزیک اکیداً توصیه می‌شود.