

می‌دهیم. این پتانسیل باعث به وجود آمدن موج بازتابیده $R e^{-ikx}$ با شار بازتابیده $hk|R|^2/m$ می‌شود.

برای $x > 0$ ، جواب را به صورت زیر می‌نویسیم

$$u(x) = T e^{iqx} \quad (۸-۵)$$

البته عمومی‌ترین جواب برای $x > 0$ یک ترکیب خطی از e^{iqx} و e^{-iqx} است، اما جمله‌ای شامل موجی را نشان می‌دهد که از $+\infty$ در جهت منفی حرکت می‌کند، و در این "آزمایش" که موج از سمت چپ فرستاده شده است تنها یک موج تراگسیلیده می‌تواند در سمت راست وجود داشته باشد. شار مربوط به ۸-۵ برابر است با

$$j = \frac{\hbar q}{m} |T|^2 \quad (۹-۵)$$

چون در این مسئله وابستگی زمانی نداریم، قانون پایستگی ۳-۱۲ ایجاب می‌کند که $j(x)$ مستقل از x باشد. بنابراین، شار در طرف راست پله باید برابر با شار در طرف چپ باشد، یعنی

$$\frac{\hbar k}{m} (1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m} |T|^2 \quad (۱۰-۵)$$

پیوستگی تابع موج ایجاب می‌کند که

$$1 + R = T \quad (۱۱-۵)$$

که از تطبیق دو جواب در $x = 0$ به دست آمده است. با وجود ناپوستگی در پتانسیل، شیب تابع موج نیز پیوسته است. این را می‌توان با انتگرال گرفتن از ۳-۵ از $-\epsilon$ تا $+\epsilon$ (که ϵ کوچک اختیاری و مثبت است) و با استفاده از پیوستگی تابع موج نشان داد:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx} \right)_\epsilon - \left(\frac{du}{dx} \right)_{-\epsilon} &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{d}{dx} \frac{du}{dx} \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{\hbar m}{\hbar^2} [V(x) - E] u(x) = 0 \end{aligned} \quad (۱۲-۵)$$

برای ارجاع در آینده، متذکر می‌شویم که اگر پتانسیل شامل جمله‌ای مانند $V_0 \delta(x - a)$ باشد، با

www.arsanjan.blogfa.com
 انتگرال گیری از معادله ۳-۵ از $a - \epsilon$ تا $a + \epsilon$ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_{a+\epsilon} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{a-\epsilon} &= \frac{2m}{\hbar^2} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} dx V_0 \delta(x-a)u(x) \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} V_0 u(a) \end{aligned} \quad (۱۳-۵)$$

پیوستگی مشتق تابع موج در $x = 0$ ، برای این مسئله، ایجاب می کند که

$$ik(1 - R) = iqT \quad (۱۴-۵)$$

بنابراین، می توان R و T را از ۱۱-۵ و ۱۴-۵ به دست آورد:

$$\begin{aligned} R &= \frac{k - q}{k + q} \\ T &= \frac{2k}{k + q} \end{aligned} \quad (۱۵-۵)$$

با استفاده از این رابطه ها می توان شارهای بازتابیده و تراگسیلیده را محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar k}{m} |R|^2 &= \frac{\hbar k}{m} \left(\frac{k - q}{k + q}\right)^2 \\ \frac{\hbar q}{m} |T|^2 &= \frac{\hbar k}{m} \frac{4kq}{(k + q)^2} \end{aligned} \quad (۱۶-۵)$$

متذکر می شویم که:

۱. برخلاف مکانیک کلاسیک، که بنابر آن ذره درگذر از یک پله پتانسیل کند می شود (به دلیل پایستگی انرژی) اما هرگز بازتابیده نمی شود، در اینجا کسری از ذرات فرودی بازتابیده می شوند، که این البته پیامد ویژگیهای موجی ذره است. بازتاب جزئی نور از فصل مشترک دو محیط یک پدیده آشنا است.

۲. با استفاده از ۱۶-۵ می توان به آسانی واری می کرد که قانون پایستگی ۱۰-۵ واقعاً صادق است.

۳. به ازای $E \gg V_0$ ، یعنی وقتی q از پایین به k میل می کند، نسبت شار بازتابیده به شار فرودی، یعنی $|R|^2$ ، به صفر میل می کند. این نتیجه با درک شهودی ما توافق دارد که می گوید در انرژیهای بسیار زیاد وجود پله تنها اختلال اندکی در انتشار موج به وجود می آورد.

۴. اگر انرژی E کمتر از V_0 باشد q تخیلی می‌شود. در این مورد، جواب برای $x > 0$ باید به صورت

$$u(x) = T e^{-|q|x} \quad (17-5)$$

باشد تا در $+\infty$ نامتناهی نشود. می‌بینیم که اکنون

$$|R|^2 = \left(\frac{k - i|q|}{k + i|q|} \right) \left(\frac{k - i|q|}{k + i|q|} \right)^* = 1 \quad (18-5)$$

بنابراین، مانند مکانیک کلاسیک، اکنون بازتاب کلی داریم. اما توجه کنید که ضریب

$$T = \frac{2k}{k + i|q|} \quad (19-5)$$

صفر نیست، و قسمتی از موج به درون ناحیه ممنوع نفوذ می‌کند. این پدیده نفوذ نیز مشخصه امواج است، و به زودی خواهیم دید که "تونل زدن" در سدهایی را امکانپذیر می‌سازد که در توصیف کلاسیک باید کاملاً مانع عبور ذرات باشند. هیچ شاری به طرف راست وجود ندارد، زیرا $j(x)$ برای جواب حقیقی صفر می‌شود حتی اگر ضریب جلو آن را مختلط بگیریم. پدیده بازتاب کلی از لحاظ ریاضی همان پدیده‌ای است که برای نور روی می‌دهد وقتی نور با زاویه‌ای بزرگتر از زاویه حد به فصل مشترک دو محیط (از محیطی با n بزرگتر به محیطی با n کمتر) می‌تابد. این نور بازتاب داخلی کلی می‌یابد، اما در واقع یک میدان الکترومغناطیسی که به طور نمایی کاهش می‌یابد به درون ناحیه ممنوع نفوذ می‌کند.

۵. یک ویژگی پتانسیل فوق‌العاده نیز این است که T و R را می‌توان تنها بر حسب E و $(E - V_0)$ نوشت، یعنی مستقل از \hbar که ظاهراً می‌توانیم آن را در اینجا برابر با صفر بگیریم. به نظر می‌رسد که با یک تناقض روبه‌رو هستیم، زیرا $\hbar = 0$ را به حد کلاسیک مربوط می‌کنیم. آیا این وضعیت به معنای آن است که می‌توانستیم برای چنین پتانسیلی بازتاب جزئی را در حد کلاسیک به دست آوریم؟ تناقضی در کار نیست، زیرا یک شرط رسیدن به حد کلاسیک این است که طول موج دو بروی $(\lambda = 2\pi\hbar/p)$ در مقایسه با اندازه‌های مربوط دستگاه کوچک باشد. در این مثال، اندازه مربوط پهنای ناحیه‌ای است که در آن پتانسیل از صفر تا V_0 تغییر می‌کند، و این پهنای در وضعیت حدی صفر است. بنابراین، برای این پتانسیل ایده‌آل ناحیه کلاسیک وجود ندارد. اگر این پتانسیل را گرد می‌کردیم آنگاه در انرژی‌های به اندازه کافی زیاد شرط مربوط به رفتار کلاسیک را واقعاً به دست می‌آوردیم، اما چنانکه قبلاً گفتیم اگر انرژی به اندازه کافی زیاد باشد بازتابی وجود ندارد.

اکنون پتانسیل زیر را در نظر می‌گیریم (شکل ۲-۵)

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & x < -a \\ &= -V_0 & -a < x < a \\ &= 0 & a < x \end{aligned} \quad (20-5)$$

با در نظر گرفتن مورد $E > 0$ ، باز هم می‌نویسیم

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (21-5)$$

و

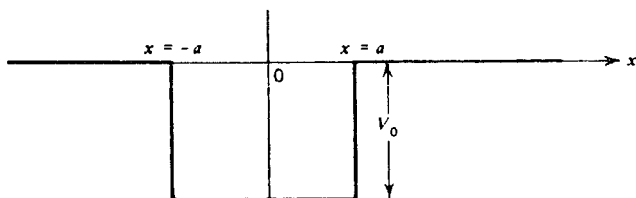
$$q^2 = \frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2} \quad (22-5)$$

جوابهای معادله شرودینگر در سه ناحیه متمایز برای ذره‌ای که از سمت چپ می‌آید به صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{ikx} + R e^{-ikx} & x < -a \\ u(x) &= A e^{iqx} + B e^{-iqx} & -a < x < a \\ u(x) &= T e^{ikx} & a < x \end{aligned} \quad (23-5)$$

این جوابها به ترتیب به شار ورودی $\hbar k/m$ از سمت چپ، شار بازتابیده $\hbar k|R|^2/m$ و شار تراکسیلیده $\hbar k|T|^2/m$ به سمت راست مربوط‌اند. در داخل چاه امواجی هستند که به علت بازتاب در دو ناپوستگی در $\pm a$ در دو جهت حرکت می‌کنند. بنابه پایستگی شار باید داشته باشیم

$$\frac{\hbar k}{m}(1 - |R|^2) = \frac{\hbar q}{m}(|A|^2 - |B|^2) = \frac{\hbar k}{m}|T|^2 \quad (24-5)$$



شکل ۲-۵ چاه پتانسیل.

با جور کردن توابع موج و همچنین مسنگهای آنها، چهار معادله زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} e^{-ika} + R e^{ika} &= A e^{-iqa} + B e^{iqa} \\ ik(e^{-ika} - R e^{ika}) &= iq(A e^{-iqa} - B e^{iqa}) \\ A e^{iqa} + B e^{-iqa} &= T e^{ika} \\ iq(A e^{iqa} - B e^{-iqa}) &= ikT e^{ika} \end{aligned} \quad (25-5)$$

که از آنها، با کمی عملیات جبری، به نتایج زیر می رسم

$$\begin{aligned} R &= i e^{-2ika} \frac{(q^2 - k^2) \sin 2qa}{2kq \cos 2qa - i(q^2 + k^2) \sin 2qa} \\ T &= e^{-2ika} \frac{2kq}{2kq \cos 2qa - i(q^2 + k^2) \sin 2qa} \end{aligned} \quad (26-5)$$

باز هم، اگر $E \gg V_0$ ، عملاً هیچ بازتابی وجود ندارد زیرا $q^2 - k^2 \ll 2kq$ ؛ و وقتی $E \rightarrow 0$ ، تراگسیل به صفر نزدیک می شود. یک نکته مخصوصاً جالب توجه این است که در مورد خاصی که $\sin 2qa = 0$ ، یعنی برای انرژیهای مثبتی که از رابطه زیر به دست می آیند

$$E = -V_0 + \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{\lambda m a^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (27-5)$$

هیچ بازتابی وجود ندارد. این در واقع الگویی است برای آنچه در پراکندگی الکترونی کم انرژی (10^9 eV) از اتمهای گاز خنثی، مانند نئون و آرگون، روی می دهد که در آن تراگسیل به طور غیرعادی بزرگ است. این اثر، که رامسائر و تاونزند آن را کشف کردند، به عنوان تشدید در تراگسیل توصیف می شود. البته در بحث دقیقتر باید ملاحظات سه بعدی را دخالت داد. به زبان موجی، این اثر ناشی از تداخل ویرانگر بین موج بازتابیده در $x = -a$ و موجی است که یک بار، دو بار، سه بار، ... در لبه $x = a$ بازتابیده می شود. شرط تشدید $2qa = n\pi$ ، که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\lambda = \frac{2\pi}{q} = \frac{4a}{n} \quad (28-5)$$

درست همان شرطی است که تداخل سنج فابری-پرو را توصیف می کند.

در اینجا پتانسیل عبارت است از

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & x < -a \\ &= V_0 & -a < x < a \\ &= 0 & a < x \end{aligned} \quad (29-5)$$

تنها انرژیهای $E < V_0$ را در نظر می‌گیریم، یعنی انرژیهایی که به‌ازای آنها در فیزیک کلاسیک هیچ نفوذی به درون سد صورت نمی‌گیرد (شکل ۳-۵). در داخل سد معادلهٔ زیر را داریم

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0) u(x) = 0$$

یعنی

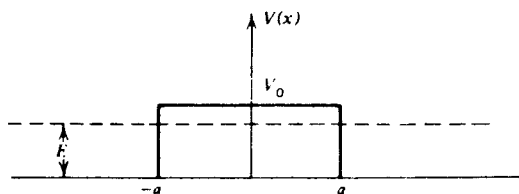
$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \kappa^2 u(x) = 0 \quad (30-5)$$

جواب عمومی

$$u(x) = A e^{-\kappa x} + B e^{\kappa x} \quad |x| < a \quad (31-5)$$

را با جوابهای زیر جور می‌کنیم

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{ikx} + R e^{-ikx} & x < -a \\ &= T e^{ikx} & x > a \end{aligned} \quad (32-5)$$



شکل ۳-۵ سد پتانسیل. انرژی به گونه‌ای است که ذرهٔ کلاسیک کاملاً توسط سد بازتابیده می‌شود.

عملاً لزومی ندارد که معادله‌های مربوطه را حل کنیم، زیرا می‌توان سنج را از ۵-۲۶ با جاگذاری زیر به دست آورد

$$q \rightarrow i\kappa = i\sqrt{(2m/h^2)(V_0 - E)} \quad (33-5)$$

بنابراین، برای مثال داریم

$$T = e^{-2ika} \frac{2k\kappa}{2k\kappa \cosh 2\kappa a + i(k^2 - \kappa^2) \sinh 2\kappa a} \quad (34-5)$$

و در نتیجه

$$|T|^2 = \frac{(2k\kappa)^2}{(k^2 + \kappa^2)^2 \sinh^2 2\kappa a + (2k\kappa)^2} \quad (35-5)$$

اگرچه انرژی کمتر از ارتفاع سد است اما تراگسیل وجود دارد. این یک پدیده موجی است، و در مکانیک کوانتومی نیز ذرات همین پدیده را از خود نشان می‌دهند. اغلب با این پدیده تونل‌زنی ذره در سد مواجه می‌شویم، و بعضی کاربردهای آن را بعداً بررسی خواهیم کرد.

در اینجا لختی به تحلیل یک مشکل ظاهری می‌پردازیم. تابع موج در داخل سد صفر نمی‌شود، و از این رو به نظر می‌رسد احتمالی برای یافتن ذره با انرژی جنبشی منفی وجود دارد. این را چگونه می‌توان تعبیر کرد؟ برای اجتناب از تناقض با فیزیک کلاسیک باید از رابطه عدم قطعیت استفاده کنیم. هر آزمایشی برای مطالعه ذره در داخل سد پتانسیل باید مکان آن را با دقت زیر مشخص کند

$$\Delta x \ll 2a \quad (36-5)$$

این اندازه‌گیری باعث می‌شود تکانه‌ای با عدم قطعیت زیر به ذره منتقل شود

$$\Delta p \gg h/2a \quad (37-5)$$

که متناظر است با انتقال انرژی

$$\Delta E \gg h^2/\lambda m a^2 \quad (38-5)$$

برای مشاهده انرژی جنبشی منفی، این عدم قطعیت باید بسیار کوچکتر از $|E - V_0|$ باشد، و در نتیجه داریم

$$\frac{h^2 \kappa^2}{2m} \gg E \gg \frac{h^2}{\lambda m a^2} \quad (39-5)$$

که ایجاب می‌کند $1 \gg \kappa a$ ، و تحت این شرایط احتمال نفوذ به درون سد، که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$|T|^2 \simeq \left(\frac{2\kappa\kappa}{k^2 + \kappa^2} \right)^2 e^{-2\kappa a} \quad (40-5)$$

تا حد صفر کوچک می‌شود (به عنوان مثال، به ازای $\kappa a = 10^{-18}$ داریم $e^{-2\kappa a} = 10^{-18}$). رابطه تقریبی برای نسبت شار تراگسیلیده به شار فرودی، $|T|^2$ ، تابع فوق‌العاده حساسی از پهنای سد و اختلاف میان ارتفاع سد و انرژی فرودی است، زیرا

$$\kappa a = \left[\frac{2ma^2}{h^2} (V_0 - E) \right]^{1/2} \quad (41-5)$$

به طور کلی، سدهای موجود در پدیده‌های فیزیکی مستطیلی نیستند، و برای بررسی بعضی از کاربردها باید ابتدا رابطه‌ای تقریبی برای ضریب تراگسیل $|T|^2$ از سدی که شکل نامنظم دارد به دست آورد. راه درست انجام این کار، با توجه به این واقعیت که برای اکثر پتانسیلها جواب دقیقی وجود ندارد، استفاده از روش تقریب ونتزل-کرامرز-بریلوئن (WKB) است.^۱ بحثی که در اینجا بیان می‌کنیم کمتر ریاضی است.

چنانکه دیده می‌شود رابطه ۴۰-۵ حاصلضرب دو جمله است که در آن جمله نمایی اهمیت بسیار بیشتری دارد. اگر بنویسیم

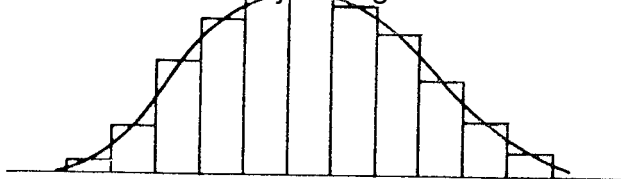
$$\ln|T|^2 \simeq -2\kappa(2a) + 2 \ln \frac{2(ka)(\kappa a)}{(ka)^2 + (\kappa a)^2}$$

می‌بینیم که در اکثر شرایط جمله اول به ازای هر مقدار معقولی برای κa بر جمله دوم غلبه دارد. روشی که در اینجا به کار می‌گیریم این است که یک سد خمیده هموار را به صورت تعدادی سد مستطیلی در نظر می‌گیریم که کنار هم قرار گرفته‌اند (شکل ۴-۵). چون ضریبهای تراگسیل را وقتی کوچک باشند می‌توان در هم ضرب کرد^۲ (در واقع، وقتی بیشتر شار بازتابیده می‌شود، تراگسیل از

۱. برای تقریب WKB به میحت ویژه ۳ مراجعه کنید.

۲. این حکم تنها برای قسمت نمایی که بیشترین اهمیت را دارد درست است، زیرا می‌توان دید که با دو برابر کردن پهنای ضریب تراگسیل $|T|^2$ تقریباً مجذور می‌شود.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۴-۵ تقریب سد خمیده هموار با سدهای پتانسیل مستطیلی کنار هم.

هر لایه یک رویداد مستقل و نامحتمل است، می‌توان با تقریب نوشت

$$\begin{aligned} \ln|T|^2 &\approx \sum_{\text{سدهای جزئی}} \ln|T_{\text{جزئی}}|^2 \\ &\approx -2 \sum \Delta x \langle \kappa \rangle \\ &\approx -2 \int_{\text{سد}} dx \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(x) - E]} \end{aligned} \quad (42-5)$$

در هر سد جزئی، Δx پهنای سد و $\langle \kappa \rangle$ مقدار میانگین κ مربوط به این سد است. در آخرین گام، حد سدهای بینهایت باریک را گرفته‌ایم. در عبارت بالا واضح است که این تقریب در نزدیکی "نقاط برگشت" که در آنها انرژی و پتانسیل تقریباً برابرند کمترین دقت را دارد، زیرا در این نقاط رابطه ۴۰-۵ تقریب خوبی برای ۳۵-۵ نیست. همچنین مهم است که $V(x)$ تابع کند تغییری از x باشد، زیرا در غیر این صورت تقریب سد منحنی با تعدادی سد مستطیلی تنها هنگامی ممکن است که این سدها باریک باشند، و در اینجا باز هم ۴۰-۵ تقریب بدی است. بررسی مناسب، با استفاده از تقریب WKB، متضمن بحث درباره رفتار در نزدیکی نقاط برگشت است. با وجود این، برای اکثر کاربردها، با تقریب خوب می‌توان نوشت

$$|T|^2 \approx e^{-2 \int dx \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(x) - E]}} \quad (43-5)$$

که در آن انتگرال روی ناحیه‌ای گرفته می‌شود که ریشه دوم حقیقی است.

پدیده‌های تونل‌زنی

پدیده تونل‌زنی ذره در فیزیک اتمی و هسته‌ای کاملاً متداول است، و در اینجا چند مثال از آن را بررسی می‌کنیم.

الکترونهاى درون یک فلز را در نظر بگیريد. چنانکه در بحث اثر فوتوالکتریک در فصل ۱ گفته شد، این الکترونها را پتانسیلی در فلز نگه می‌دارد که در تقریب اول می‌توان آن را با جعبه‌ای به ارتفاع متناهی، مطابق شکل ۵-۵الف، نشان داد. این الکترونها عملاً در ترازهای انرژی انباشته شده‌اند که بسیار چگال‌اند، زیرا جعبه بسیار پهن است. ویژگی الکترونها این است که بیشتر از دو الکترون نمی‌توانند یک تراز معین انرژی را اشغال کنند^۳؛ بنابراین، در پایینترین حالت انرژی فلز، تمام ترازها تا یک انرژی مشخص که انرژی فرمی نامیده می‌شود (و به چگالی الکترونهاى آزاد بستگی دارد) پر شده‌اند. وقتی دما از صفر مطلق بیشتر است، تعداد کمی از الکترونها به علت برانگیختگی گرمایی به ترازهای بالاتر می‌روند، اما این تعداد حتی در دمای اتاق هم کم است. اختلاف میان انرژی فرمی و لبهٔ چاه انرژی لازم برای خارج ساختن یک الکترون است؛ این انرژی را تابع کار می‌نامند، که در بحث مربوط به اثر فوتوالکتریک گفته شد. الکترونها را می‌توان با انتقال انرژی به آنها، توسط فوتون یا با گرم کردن، از فلز خارج کرد. همچنین می‌توان آنها را با اعمال یک میدان الکتریکی خارجی \mathcal{E} از فلز جدا کرد. این گسیل سرد به این دلیل روی می‌دهد که میدان خارجی پتانسیلی را که الکترون ”می‌بیند“، اگر این الکترون در سطح ”دریا“ی ترازها باشد، از W به $(W - e\mathcal{E}x)$ تغییر می‌دهد (شکل ۵-۵ب). در این مورد، ضریب تراگسیل عبارت است از

$$|T|^2 = e^{-2} \int_0^{\infty} dx [2m(W - e\mathcal{E}x)/\hbar^2]^{1/2} \quad (44-5)$$

که چون

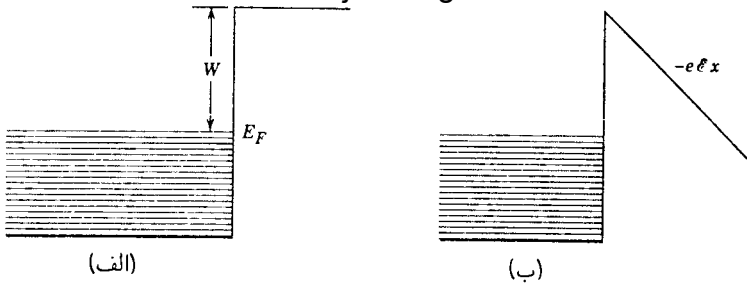
$$\int dx (A + Bx)^{1/2} = \frac{(A + Bx)^{3/2}}{3B/2}$$

به صورت زیر در می‌آید

$$|T|^2 = e^{-2} \sqrt{2/3} \sqrt{mW/\hbar^2} (W/e\mathcal{E}) \quad (45-5)$$

این رابطه، که فرمول فاولر-نورد هایم نامیده می‌شود، تنها یک توصیف تقریبی از گسیل سرد است. یک اثر اضافی، که به آسانی می‌توان آن را در محاسبه وارد کرد، جذب الکترون به صفحه توسط بار تصویر است. یک اثر دیگر، که بررسی آن بسیار مشکلتر است، این است که ناکاملیهایی در سطح فلز وجود دارند که میدان الکتریکی را به صورت موضعی تغییر می‌دهند، و چون \mathcal{E} در نما ظاهر می‌شود این تغییر می‌تواند تفاوت زیادی به وجود آورد. در ضمن، می‌بینیم که نما را می‌توان برحسب ضخامت سد در سطح دریای فرمی نوشت، زیرا این ضخامت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

۳. این ویژگی الکترونها را اصل طرد پاؤلی توصیف می‌کند که آن را در فصل ۸ بررسی می‌کنیم.



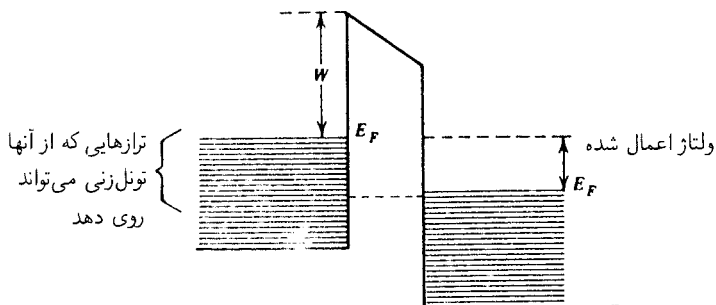
شکل ۵-۵ (الف) ترازهای انرژی الکترون در فلز: E_F انرژی فرمی و W تابع کار است. (ب) پتانسیل به علت وجود میدان الکتریکی خارجی تغییر کرده است.

$$a = \frac{W}{e\mathcal{E}} \quad (۴۶-۵)$$

در پانزده سال گذشته نوعی گسیل سرد کاربرد مهمی در میکروسکوپ تونل زنی روبشی (STM) یافته است. این ابزار مبتنی بر حساسیت بسیار زیاد گسیل سرد به فاصله است. جریان الکتریکی حاصل از اختلاف پتانسیل الکتریکی بین سطح یک فلز و نوک یک میله بسیار تیز تنگستن بالای سطح برحسب فاصله از سطح به طور نمایی تغییر می کند، و از این راه مطالعه بسیار تفصیلی توپوگرافی سطح فلز ممکن می شود. کار STM به بعضی پدیده های غیرمنتظره و پیشرفتهای فن آوری بستگی دارد.

قبل از هر چیز، برای به دست آوردن تفکیک ۱ آنگسترومی (یا کمتر) حد پراش متداول ایجاب می کند تابشی از مرتبه 10^4 eV به کار ببریم. مطالعه غیرتخریبی سطح با این انرژی ممکن نیست. در یک میکروسکوپ الکترونی به الکترونیایی از مرتبه 150 eV نیاز داریم، که باز هم برای روبش سطوح بیش از حد زیاد است. چنانکه اوکیف در سال ۱۹۵۶ بیان داشته است، می توان با نوعی میکروسکوپ جدید از حد پراش اجتناب کرد. در این نوع میکروسکوپ، نور از یک حفره کوچک به شیئی که مستقیماً جلو حفره قرار دارد می تابد، و این شیئی نور تراگسیلیده یا بازتابیده را تغییر می دهد. در این میکروسکوپ جدید، این اندازه حفره است که توان تفکیک میکروسکوپ را تعیین می کند. STM بر این اساس کار می کند. نوک تنگستن، که پتانسیل به آن اعمال می شود، به منزله "حفره" عمل می کند.

اختلاف پتانسیل 10^4 ولتی در بازه حدود 5 \AA میدانهای الکتریکی بسیار بزرگی به وجود می آورد، و این میدانها تعدادی اتم از نوک، برای تیز کردن آن، "بیرون می کشند". برای مثال، یک نوک که شعاع آن با ماشینکاری به 1000 \AA رسیده است به طور کاملاً عادی باید بتواند، به علت حساسیت جریان به فاصله از سطح نمونه، فاصله های عرضی تا 45 \AA را تفکیک کند. برآمدگیهای اتمی ریز این توان تفکیک را به ۱ تا ۲ آنگستروم کاهش می دهند.



شکل ۶-۵ نمودار انرژی برای تونل‌زنی بین دو فلز که با خلأ از هم جدا شده‌اند. تونل‌زنی بین فلزها تنها وقتی ممکن است که حالت‌های خالی در طرف راست وجود داشته باشند. این حالت‌های خالی وقتی به وجود می‌آیند که برای پایین آوردن تراز فرمی در طرف راست ولتاژ eV اعمال شود.

مفید بودن STM به توانایی آزمایشگر برای ثابت نگه داشتن فاصله از سطح، یا به عبارتی جریان، بستگی دارد. اکنون این کار را می‌توان با پایه‌های سرامیکی (پیزوالکتریک) انجام داد، که وقتی میدان الکتریکی به آنها اعمال می‌شود منبسط یا منقبض می‌شوند. محل آنها را می‌توان با دقت بسیار زیاد با تداخل‌سنج تعیین کرد، و از این راه می‌توان فاصله ثابتی بین نوک و سطح روئیده برقرار کرد.

از STM برای مطالعه سطوح فلزات و بعضی نیمرساناها استفاده کرده‌اند. به تازگی، آنها و مولکولها را روی سطوح، یا با لغزاندن آنها توسط نوک یا با بلند کردن آنها از سطح و نشان دادن آنها در جای دیگر توسط نوک، جابه‌جا کرده‌اند.

پدیده تونل‌زنی همچنین وقتی روی می‌دهد که دو صفحه فلزی را به هم نزدیک کنیم. شکل ۶-۵ وضعیت را بدون اختلاف پتانسیل و با اختلاف پتانسیل نشان می‌دهد. بدون اختلاف پتانسیل، تونل‌زنی ممکن نیست زیرا ترازها در دو طرف سد پر هستند. اعمال حتی یک میدان الکتریکی ضعیف باعث تغییر شکل جزئی سد — اثری که قابل چشم‌پوشی است — و پایین رفتن دربار فرمی در یک طرف سد می‌شود. در نتیجه، چند تراز خالی متناظر با ترازهای پر در طرف دیگر سد به وجود می‌آیند، و اکنون تونل‌زنی می‌تواند با ضریب تراکسیل زیر روی دهد

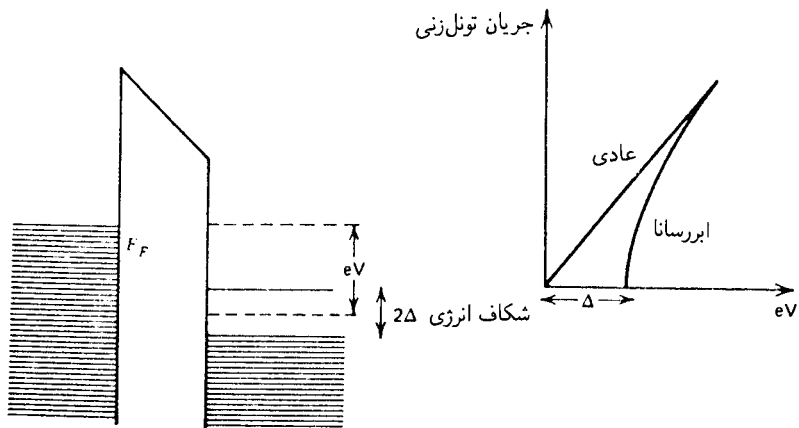
$$|T|^2 \simeq e^{-2\sqrt{(2mW/\hbar^2)u}} \quad (۴۷-۵)$$

این عامل مانند مقاومت عمل می‌کند. متأسفانه این رابطه به عرض گاف a بسیار حساس است، و چون برای تابع کاری از مرتبه چند الکترون ولت این عرض باید از مرتبه چند آنگستروم باشد، صاف کردن و موازی کردن صفحه‌های فلزی به‌اندازه کافی امکانپذیر نیست. این فرمول برای توضیح جریان‌هایی به‌کار می‌رود که بین دو صفحه‌ای برقرارند که با یک اکسید از هم جدا شده‌اند (Ni – NiO – Pb) و فاصله آنها را می‌توان تا 5 \AA کوچک کرد، و در این مورد با آزمایش توافق دارد.

تونل‌زنی در ابررساناها

یک اثر جالب توجه وقتی روی می‌دهد که فلز طرف راست در حالت ابررسانایی باشد. یک مشخصه چنین حالتی این است که در بالای تراز فرمی گافی در چگالی تراز وجود دارد، یعنی بین انرژی‌های $E_F - \Delta$ و $E_F + \Delta$ ، که در آنها Δ از مرتبه 10^{-2} eV و انرژی فرمی E_F از مرتبه 10 eV است، هیچ حالت مجازی وجود ندارد. این ترازها از بین نمی‌روند بلکه به بالا و پایین فشرده می‌شوند، و در نتیجه چگالی تراز درست در پایین و بالای گاف بسیار زیاد است. اگر میدان الکتریکی به‌اندازه کافی کوچک باشد، یعنی اگر $a\mathcal{E} \leq \Delta/e$ ، تونل‌زنی روی نخواهد داد زیرا الکترون‌ها جایی برای رفتن ندارند. ویژگی‌های کیفی رابطه جریان-ولتاژ و نمودار انرژی در شکل ۷-۵ نشان داده شده‌اند. این ویژگی‌ها با آزمایش‌هایی که جیانور برای نخستین بار در سال ۱۹۶۰ انجام داد. به‌خوبی توافق دارند.

از این آزمایش‌های تونل‌زنی می‌توان برای مطالعه جزئیات حالت ابررسانایی استفاده کرد. اعتقاد بر این است که گاف موجود در چگالی تراز انرژی در بالای دریای فرمی ناشی از جاذبه میان



شکل ۷-۵ نمودار انرژی برای تونل‌زنی از فلز به ابررسانا. در اینجا، برخلاف تونل‌زنی فلز-فلز در شکل ۵-۶، تونل‌زدن به درون گاف انرژی مجاز نیست. این وضعیت، چنانکه نشان داده شده است، بر مشخصه جریان-ولتاژ تأثیر می‌گذارد.

زوجهای الکترون است، و برابر است با انرژی لازم برای شکستن این زوج. با این تصویر، می‌توان انتظار داشت که پرتوهی به "ساندویچ" ابررسانا-اکسید-ابررسانا بعضی از زوجها را بشکند، و تک‌الکترونهايي که از فوتونها انرژی جنبشی می‌گیرند می‌توانند به ناحیه ترازهای اشغال‌نشده در بالای گاف بروند، و سپس در گاف تونل بزنند، و در نتیجه جریان افزایش می‌یابد. این تونل‌زنی "فوتون-یاری" مشاهده شده است. در مثالهای دیگر تونل‌زنی در ابررساناها اتصالهای جوزفسون دخالت دارند.^۲

تونل‌زنی در فیزیک هسته‌ای

پدیده تونل‌زنی در فیزیک هسته‌ای نیز اهمیت دارد. هسته‌ها دستگاههای بسیار پیچیده‌ای هستند، اما در شرایط خاصی می‌توان آنها را به صورت ذرات مستقلى در نظر گرفت که ترازهای یک چاه پتانسیل را اشغال کرده‌اند. با این تصویر ذهنی، واپاشی یک هسته به ذره α (هسته هلیوم با $Z = 2$) و هسته فرزند را می‌توان تونل‌زنی ذره α در سد توصیف کرد که از پتانسیل کولنی میان هسته فرزند و ذره α ناشی می‌شود. ذره α را نباید در حالت مقید در نظر گرفت: اگر چنین بود، هسته نمی‌توانست واپاشد. در واقع، باید انرژی این ذره را مثبت گرفت، و تنها مانع واپاشی آن وجود سد است.^۵

می‌نویسیم

$$|T|^2 = e^{-G} \quad (48-5)$$

که در آن

$$G = 2 \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \int_R^b dr \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} - E \right)^{1/2} \quad (49-5)$$

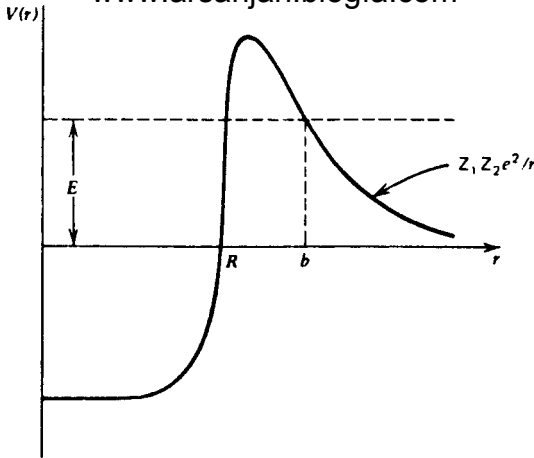
R شعاع هسته است^۶، و b نقطه برگشت است که از صفر شدن انتگرالده به دست می‌آید (شکل ۸-۵)؛ A_1 بار هسته فرزند، و Z_2 بار ذره‌ای است که گسیل می‌شود (در اینجا برابر با ۲ است). انتگرال را

۴. بحث زیبایی درباره ابررسانایی و اثرهای مختلف جوزفسون را می‌توان در فصل ۲۱ از جلد سوم کتاب زیر یافت: R H Feynman, R B Leighton and M Sands, *Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1965.

۵. اگر تصور این امر برای شما مشکل است که دافعه مانع جدا شدن دو جسم می‌شود، فرایند وارون، یعنی گیراندازی α را در نظر بگیرید. بدیهی است که سد می‌خواهد ذره α را دور نگه دارد.

۶. در واقع، اولین برآوردهای شعاع هسته از مطالعه واپاشی آلفاها به دست آمدند. امروزه از اندازه توزیع بار که با پراکندگی الکترونها از هسته‌ها به دست می‌آید برای تعیین شعاع هسته‌ها استفاده می‌کنند. البته نباید انتظار داشت که این دو رهیافت دقیقاً نتیجه یکسانی به دست دهند.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۵-۸ سد پتانسیل برای واپاشی آلفا.

می توان دقیقاً محاسبه کرد:

$$\int_R^b dr \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right)^{1/2} = \sqrt{b} \left[\cos^{-1} \left(\frac{R}{b} \right)^{1/2} - \left(\frac{R}{b} - \frac{R^2}{b^2} \right)^{1/2} \right] \quad (50-5)$$

در انرژیهای کم (نسبت به ارتفاع سد کولنی در $r = R$) داریم $b \gg R$ ، و در نتیجه

$$G \simeq 2 \left(\frac{2mZ_1 Z_2 e^2 b}{h^2} \right)^{1/2} \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{R}{b} \right)^{1/2} \right] \quad (51-5)$$

که در آن $b = Z_1 Z_2 e^2 / E$. اگر برای انرژی ذره α بنویسیم $E = mv^2/2$ که در آن v سرعت نهایی ذره است، به دست می آوریم

$$G \simeq \frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{hv} = 2\pi\alpha Z_1 Z_2 \left(\frac{c}{v} \right) \quad (52-5)$$

زمانی را که طول می کشد تا ذره α از هسته خارج شود می توان به روش زیر برآورد کرد: احتمال عبور از سد در هر برخورد e^{-G} است. بنابراین، تعداد برخوردهای لازم برای خروج برابر است با $n \simeq e^G$. زمان بین برخوردها از مرتبه $2R/v$ است که در آن R شعاع هسته و v سرعت ذره α در داخل هسته است. بنابراین، طول عمر برابر است با

$$\tau \simeq \frac{2R}{v} e^G \quad (53-5)$$

سرعت ذره α در داخل هسته مفهوم مبهمی است، و کل تصویر در واقع کلاسیک است، و از این رو عامل جلو e^G را نمی‌توان بدون یک نظریه مناسبتر به درستی پیش‌بینی کرد. از ملاحظات بالا تنها مرتبه بزرگی آن را به دست می‌آوریم. برای ذره α با انرژی 1MeV داریم

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = c \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} = 3 \times 10^{10} \sqrt{\frac{2}{4 \times 940}} \simeq 7r_0 \times 10^8 \text{cm/s}$$

علاوه بر این، برای R می‌گیریم

$$R \simeq 1.5 \times 10^{-12} A^{1/2} \text{cm} \quad (54-5)$$

و به ازای $A = 216$ ، عامل مزبور را $10^{-21} \times 2.6$ به دست می‌آوریم. همچنین، می‌توان G را به صورت زیر نوشت

$$G \simeq 4 \frac{Z_1}{\sqrt{E(\text{MeV})}} \quad (55-5)$$

بنابراین، برای α های کم انرژی، خط راست زیر به دست می‌آید

$$\log_{10} \frac{1}{\tau} \simeq \text{const.} - 1.73 \frac{Z_1}{\sqrt{E(\text{MeV})}} \quad (56-5)$$

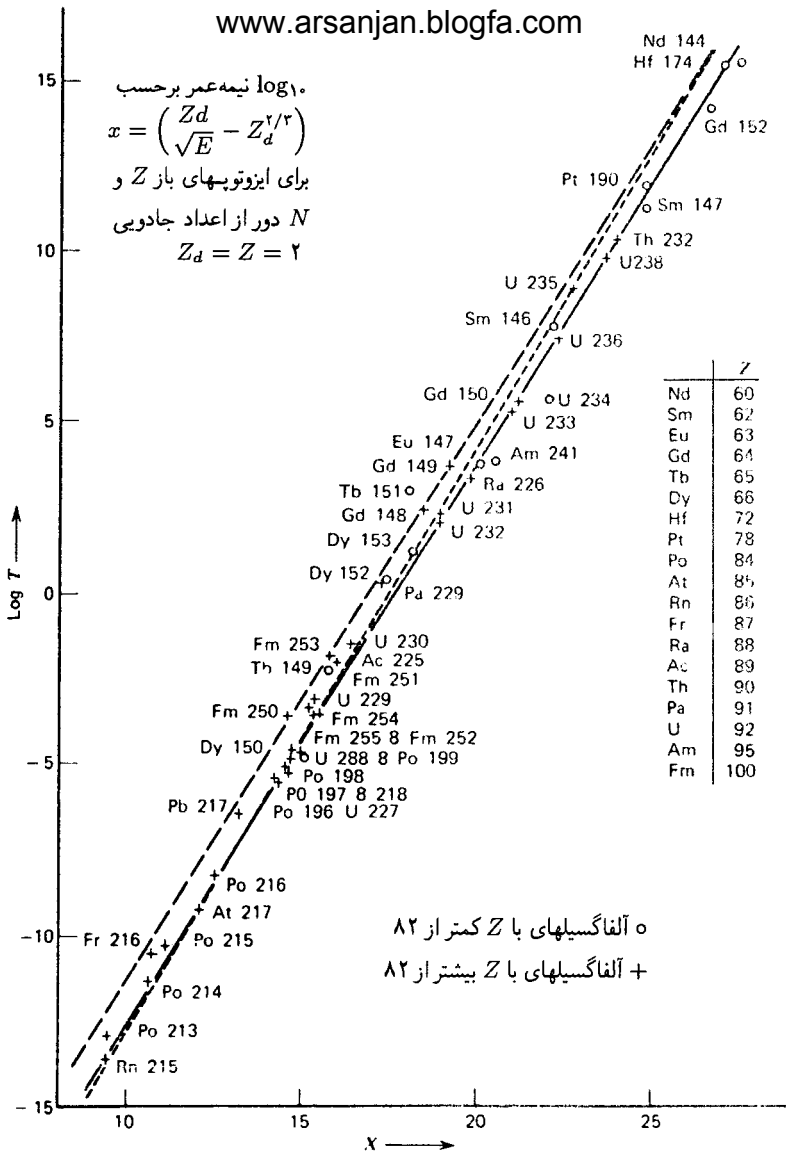
که ثابت آن، وقتی τ به جای ثانیه برحسب سال سنجیده می‌شود، از مرتبه ۲۷ تا ۲۸ است. شکل ۵-۹ نشان می‌دهد که با داده‌های مربوط به طول عمر تعداد زیادی گسیلنده‌های α برازش خوبی با فرمول زیر به دست می‌آید

$$\log_{10} \frac{1}{\tau} = C_2 - C_1 \frac{Z_1}{\sqrt{E}}$$

که در آن $C_1 = 1.61$ و $C_2 = 28.9 + 1.6Z_1^{1/2}$. بدین ترتیب، ملاحظات بسیار ساده برازش نسبتاً چشمگیری با داده‌ها به دست می‌دهند.

برای انرژیهای بزرگتر α ، عامل G تابع R است، و با $R = r_0 A^{1/2}$ می‌بینیم که r_0 ثابت است، یعنی این تصور که یک سد کولنی جای پتانسیل واقعی را در خارج از هسته به عهده گرفته است چندان بی‌اعتبار نیست. در اینجا نیز با بررسیهای ساده کیفی می‌توان داده‌ها را توجیه کرد. این واقعیت که احتمال یک واکنش (مثلاً گیراندازی) بین هسته‌ها با عامل $e^{-2(Z_1 Z_2 / \sqrt{E})}$ (برای α ، $Z_2 = 2$) کاهش می‌یابد ایجاب می‌کند که در انرژیهای کم و یا برای Z های بزرگ این

www.arsanjan.blogfa.com

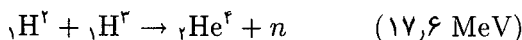
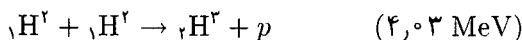
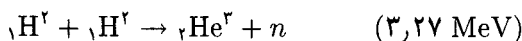


شکل ۹-۵ نمودار $\log_{10} 1/T$ بر حسب $C_2 - (C_1 Z_1 / \sqrt{E})$ با $C_1 = 1.61$ و $C_2 = 28.9 + 1.6 Z_1^{2/3}$ که کند تغییر است.^۷

واکنشها نادر باشند. به همین دلیل است که تمام کوششها برای ساختن رآکتورهای گرمابهسته‌ای را

7. E. K. Hyde, I. Perlman, and G. T. Seaborg, *The Nuclear Properties of the Heavy Elements*, Vol. 1, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1964), reprinted by permission.

روی سوختن هیدروژن (در واقع هیدروژن سنگین — دوتریم) متمرکز می‌کنند: www.arsanjan.blogfa.com



زیرا واکنشهایی که در آنها عناصری با Z های بزرگتر دخیل‌اند به انرژیهای بسیار بیشتر، یعنی ده‌های بسیار زیادتر، نیاز دارند، و از این‌رو مسائل محصورسازی آنها جدی‌تر است. به همین دلیل، در رآکتورهای هسته‌ای برای شکافت عناصر سنگین از نوترون استفاده می‌کنند. پروتونها، در انرژیهای کم موجود، نمی‌توانند برای انجام واکنش با هسته‌ها به اندازه کافی به آنها نزدیک شوند.

حالت‌های مقید در چاه پتانسیل

علاوه بر جوابهای مربوط به $E > 0$ که در بخش چاه پتانسیل بررسی کردیم، جالب توجه است که برای پتانسیل منفی، یعنی $V_0 > 0$ در $0 < E < V_0$ ، جوابهایی به‌ازای $E < 0$ نیز وجود دارند. خواهیم دید که این جوابها گسسته‌اند. با نمادنگاری

$$\kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad (57-5)$$

جوابهای مربوط به ناحیه‌های خارج از چاه که در بینهایت کراندار هستند عبارت‌اند از

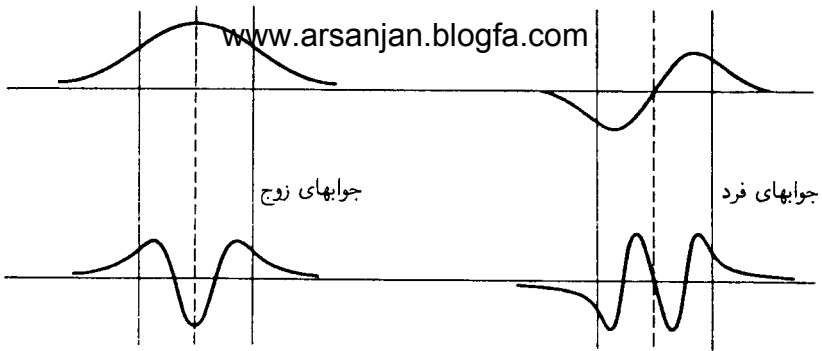
$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 e^{\kappa x} & x < -a \\ u(x) &= C_2 e^{-\kappa x} & a < x \end{aligned} \quad (58-5)$$

چون با تابعهای حقیقی سروکار داریم، بهتر است جواب داخل چاه را به‌صورت زیر بنویسیم

$$u(x) = A \cos qx + B \sin qx \quad -a < x < a \quad (59-5)$$

توجه کنید که

$$q^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|) > 0 \quad (60-5)$$



شکل ۵-۱ جوابهای مربوط به طیف گسسته در چاه پتانسیل جاذب.

از جور کردن جوابها و مشتقها در لبه‌های $x = \pm a$ داریم

$$\begin{aligned} C_1 e^{-\kappa a} &= A \cos qa - B \sin qa \\ \kappa C_1 e^{-\kappa a} &= q(A \sin qa + B \cos qa) \\ C_2 e^{-\kappa a} &= A \cos qa + B \sin qa \\ -\kappa C_2 e^{-\kappa a} &= -q(A \sin qa - B \cos qa) \end{aligned} \quad (61-5)$$

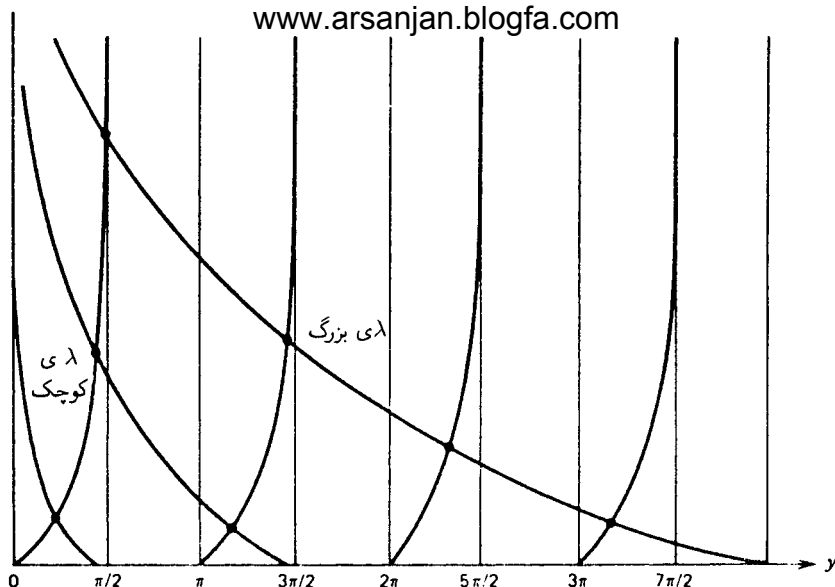
از ترکیب این معادله‌ها به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \kappa &= q \frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa} \\ &= q \frac{A \sin qa - B \cos qa}{A \cos qa + B \sin qa} \end{aligned} \quad (62-5)$$

این تساوی ایجاب می‌کند که $AB = 0$ ، یعنی جوابها نسبت به x یا زوج‌اند ($B = 0$) یا فرد ($A = 0$). این توابع موج تقریباً به صورتی هستند که در شکل ۵-۱ نشان داده شده‌اند. حالت پایه، که گره ندارد، زوج است. این یک ویژگی کلی دستگاههای ساده است. شرایط تعیین‌کننده انرژی از ۶۲-۵ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \kappa &= q \tan qa \quad \text{جوابهای زوج} \\ \kappa &= -q \cot qa \quad \text{جوابهای فرد} \end{aligned} \quad (63-5)$$

این رابطه‌ها را جدا از هم بررسی می‌کنیم.



شکل ۱۱-۵ موقعیت ویژه‌مقدارهای گسسته برای جوابهای زوج در چاه مربعی. منحنیهای صعودی نمودار $\tan y$ هستند؛ منحنیهای نزولی تابع $\sqrt{\lambda - y^2}/y$ را به‌ازای مقادیر مختلف λ نمایش می‌دهند.

الف) جوابهای زوج:

با نمادنگاری

$$\lambda = \frac{2mV_0 a^2}{h^2} \quad (۶۴-۵)$$

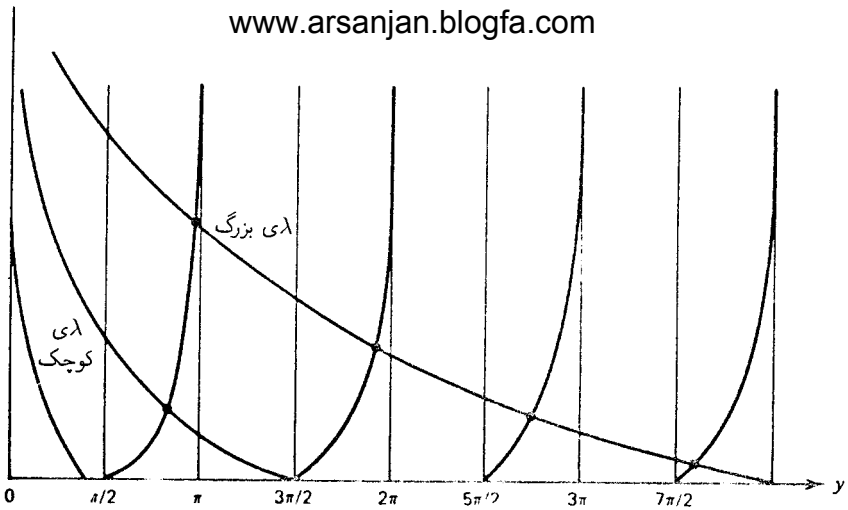
$$y = qa$$

اولین رابطه از ۶۳-۵ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = \tan y \quad (۶۵-۵)$$

اگر $\tan y$ و $\sqrt{\lambda - y^2}/y$ را برحسب y ترسیم کنیم (شکل ۱۱-۵)، نقاط تلاقی آنها ویژه‌مقدارها را تعیین می‌کنند. این ویژه‌مقدارها یک مجموعه گسسته تشکیل می‌دهند. هر چه λ بزرگتر باشد، منحنیهای مربوط به $\sqrt{\lambda - y^2}/y$ دورتر می‌روند، یعنی پتانسیل عمیقتر و یا پهنتر است تعداد حالت‌های مقید بیشتر است. این شکل همچنین نشان می‌دهد که هر قدر هم که λ کوچک باشد، همیشه دست‌کم یک حالت مقید وجود دارد. این مشخصه چاه جاذب یک‌بعدی است و برای

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۱۲-۵ موقعیت ویژه‌مقدارهای گسسته برای جوابهای فرد در چاه مربعی. منحنیهای صعودی نمودار $-\cot y$ هستند؛ منحنیهای نزولی تابع $\sqrt{\lambda - y^2}/y$ را به‌ازای مقادیر مختلف λ نمایش می‌دهند. توجه کنید که به‌ازای $\lambda < (\pi/2)^2$ هیچ ویژه‌مقدار فردی وجود ندارد.

پتانسیل‌های سه‌بعدی، که رفتاری بسیار شبیه به مسئله جوابهای فرد دارند که بعداً بررسی می‌کنیم، صادق نیست. با بزرگتر شدن λ ، فاصله ویژه‌مقدارها برحسب y به مقدار ثابتی میل می‌کند، و نقاط تلاقی از رابطه تقریبی زیر به‌دست می‌آیند

$$y \simeq \left(n + \frac{1}{4} \right) \pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۶۶-۵)$$

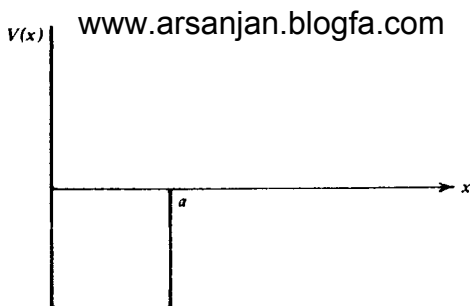
که همان رابطه ویژه‌مقدار برای جوابهای زوج در یک چاه نامتناهی است که مرکز آن در مبدأ است (ویژه‌تابها در ۴-۴۸ داده شده‌اند). این نتیجه غیرمنتظره نیست، زیرا برای حالتی که در اعماق چاه قرار دارند نامتناهی نبودن آن اهمیت چندانی ندارد.

(ب) جوابهای فرد:

در اینجا رابطه ویژه‌مقدار به‌صورت زیر است

$$\frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y} = -\cot y \quad (۶۷-۵)$$

چون $-\cot y = \tan(\pi/2 + y)$ ، نمودار شکل ۱۲-۵ همان نمودار شکل ۱۱-۵ است با این تفاوت که منحنیهای تانژانت به اندازه $\pi/2$ جابه‌جا شده‌اند. رفتار λ بزرگ کم‌وبیش یکسان است،



شکل ۵-۱۳ پتانسیل معادل برای جوابهای فرد مسئله حالت مقید چاه مربعی.

و به جای ۵-۶۶ داریم

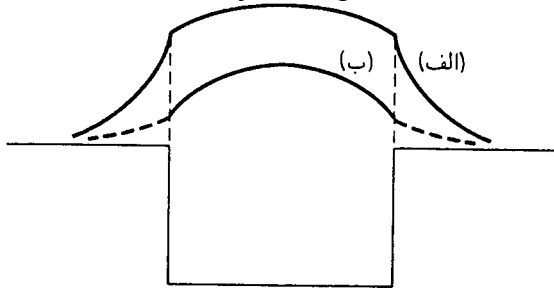
$$y \simeq n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5-68)$$

برخلاف مورد جوابهای زوج، در اینجا به شرطی تلاقی روی می‌دهد که $\sqrt{\lambda^2 - \pi^2/4} > 0$ ، یعنی اگر

$$\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \geq \frac{\pi^2}{4} \quad (5-69)$$

جوابهای فرد همگی در $x = 0$ صفر می‌شوند، و در نتیجه مسئله حالت مقید برای جوابهای فرد با مورد چاه پتانسیل شکل ۵-۱۳ یکسان است، زیرا برای این چاه باید شرط $u(0) = 0$ را اعمال کنیم. خواهیم دید که چنین شرایطی بر توابع موج در جهان سه‌بعدی اعمال می‌شوند. محاسبات مفصلی که انجام دادیم به درک کیفی علت وجود ویژه‌مقدارهای گسسته کمک می‌کنند. این ویژه‌مقدارها از این‌رو ظاهر می‌شوند که توابع موج باید در بینهایت صفر شوند. این را می‌توان به صورت نموداری در شکل ۵-۱۴ دید. تابع موج حالت پایه زوج-پارینه در داخل چاه، که به صورت $\cos qx$ است، باید به‌طور پیوسته به یک نمایی نزولی $e^{-\alpha|x|}$ با $\alpha^2 = 2mE_B/\hbar^2$ متصل شود. انرژی بستگی بزرگ به معنای یک نمایی است که به سرعت افت می‌کند. چون $q^2 = (2mV_0/\hbar^2 - \alpha^2)$ ، انرژی بستگی بزرگ به معنای q^2 کوچک است، یعنی تابع موج کاملاً تخت است: بنابراین، جور کردن ناممکن است. به تدریج که E_B آزمونی را کاهش می‌دهیم، نمایی با سرعت کمتری افت می‌کند و تابع موج داخل چاه خمیدگی بیشتری می‌یابد، و در نتیجه در یک نقطه جور کردن (شیب پیوسته) ممکن می‌شود. اگر مقدار α را از این نقطه کمتر کنیم، منحنی خارجی تخت‌تر از آن خواهد بود که با تابع موج خمیده‌تر داخلی جور شود. برای اولین حالت برانگیخته، تابع موج فرد-پارینه در مبدأ صفر می‌شود، و در نتیجه اگر بتواند در داخل چاه پتانسیل به طرف محور افقی برگردد تنها می‌تواند به یک نمایی نزولی متصل شود. شرط برگشت آن درست

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۱۴-۵ (الف) ناچوری با E_B بیش از حد بزرگ. (ب) ناچوری با E_B بیش از حد کوچک.

به اندازه‌ای که بتواند به یک خط راست ($\alpha = 0$) متصل شود این است که $\sin qa = 1$ و در نتیجه $qa = \pi/2$ ، که با شرط ۵-۶۹ متناظر است.

پتانسیلهای تابع دلتا

پتانسیلی را در نظر می‌گیریم که رفتار فضایی آن به صورت $\delta(x)$ است. چون $\delta(x)$ دارای بعد عکس طول است، بهتر است که پتانسیل جاذب $V(x)$ را به صورت زیر بنویسیم

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2ma} \delta(x) \quad (70-5)$$

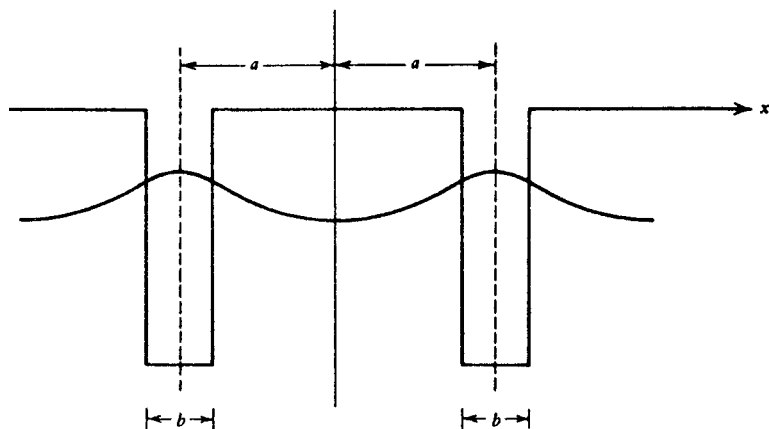
در اینجا a یک کمیت اختیاری با بعد طول است، و در نتیجه λ کمیت بی‌بعدی است که آن را برای مشخص کردن قدرت پتانسیل نوشته‌ایم. معادله‌ای که باید حل کنیم، به ازای $E < 0$ ، عبارت است از

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \kappa^2 u(x) = -\frac{\lambda}{a} \delta(x) u(x) \quad (71-5)$$

که در آن $\kappa^2 = 2m|E|/\hbar^2$. جواب باید در همه جا، بجز $x = 0$ ، در معادله $d^2 u/dx^2 - \kappa^2 u = 0$ صدق کند، و اگر بخواهیم در $x \rightarrow \pm\infty$ صفر شود باید بنویسیم

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\kappa x} & x > 0 \\ &= e^{\kappa x} & x < 0 \end{aligned} \quad (72-5)$$

به دلیل پیوستگی تابع موج، ضرایب جوابهای دو ناحیه یکسان هستند (و در اینجا آنها را برابر با ۱ گرفته‌ایم — می‌توان بعداً تابع را بهنجار کرد). مشتق تابع موج در این مورد پیوسته نیست. چنانکه



شکل ۱۵-۵ چاه پتانسیل یک‌بعدی دوگانه. تابع موج یک حالت مقید ترسیم شده است. وضعیت حدی ۷۵-۵ را در نظر می‌گیریم.

قبلاً گفتیم (معادله ۱۳-۵)، داریم

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0^+} - \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0^-} = -\frac{\lambda}{a}u(0) \quad (۷۳-۵)$$

از اینجا رابطه ویژه مقدار به دست می‌آید:

$$-\kappa - \kappa = -\frac{\lambda}{a}$$

یعنی

$$\kappa = \frac{\lambda}{2a} \quad (۷۴-۵)$$

پتانسیل تابع دلتای دوگانه جالبتر است زیرا راه سریعی برای مطالعه خواص چاه دوگانه عمیق و کم عرض، که در شکل ۱۵-۵ نشان داده شده است، فراهم می‌کند. می‌نویسیم

$$(2m/h^2)V(x) = -\frac{\lambda}{a}[\delta(x-a) + \delta(x+a)] \quad (۷۵-۵)$$

در اینجا a در توصیف بزرگی پتانسیل دیگر یک طول اختیاری نیست، بلکه به شکل پتانسیل بستگی دارد. چون پتانسیل تحت تعویض $x \rightarrow -x$ متقارن است، جوابها باید پارامتر معین داشته باشند، و ابتدا جوابهای زوج را در نظر می‌گیریم.

www.arsanjan.blogfa.com

۱. برای جواب زوج می نویسیم

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\kappa x} & x > a \\ &= A \cosh \kappa x & a > x > -a \\ &= e^{\kappa x} & x < -a \end{aligned} \quad (۷۶-۵)$$

و از پیوستگی تابع موج به دست می آوریم

$$e^{-\kappa a} = A \cosh \kappa a \quad (۷۷-۵)$$

به علت تقارن، کافی است شرط ناپیوستگی برای مشتق در $x = a$ را به کار ببریم. چیز جدیدی از $x = -a$ حاصل نمی شود. به دست می آوریم

$$-\kappa e^{-\kappa a} - \kappa A \sinh \kappa a = -\frac{\lambda}{a} e^{-\kappa a} \quad (۷۸-۵)$$

و رابطه ویژه مقدار عبارت است از

$$\tanh \kappa a = \frac{\lambda}{\kappa a} - 1 \quad (۷۹-۵)$$

این رابطه را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\lambda}{\kappa a} - 1 = \frac{e^{\kappa a} - e^{-\kappa a}}{e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}} = \frac{1 - e^{-2\kappa a}}{1 + e^{-2\kappa a}}$$

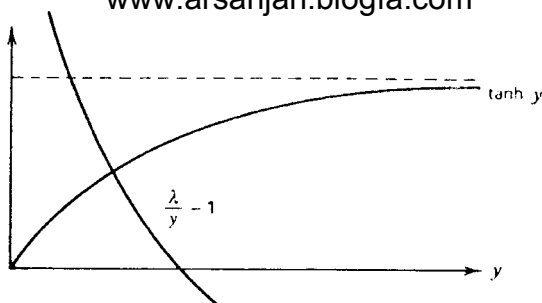
که از آن به دست می آوریم

$$e^{-2\kappa a} = \frac{2\kappa a}{\lambda} - 1 \quad (۸۰-۵)$$

برای λ بزرگ باید $2\kappa a$ اندکی بزرگتر از λ باشد. اگر $2\kappa a = \lambda + \epsilon$ را امتحان کنیم، معادله ۸۰-۵ تا مرتبه ϵ به صورت $\epsilon/\lambda \approx e^{-\lambda}$ در می آید، و بنابراین

$$2\kappa a = \lambda + \lambda e^{-\lambda} \quad (۸۱-۵)$$

می توان دید که برای جواب زوج همواره یک تک حالت مقید وجود دارد. شکل ۱۶-۵ نمودار معادله

شکل ۵-۱۶ حل معادله ویژه مقدار $\lambda/y - 1 = \tanh y$.

ویژه مقدار ۵-۷۹ را با $\kappa a = y$ نشان می‌دهد. از این شکل واضح است که، منحنی $\tanh y$ با $1 - \lambda/y$ تنها در یک نقطه تلاقی می‌کند. بدیهی است که در $y = \lambda$ طرف راست ۵-۷۹ صفر می‌شود، در حالی که $\tanh y > 0$. بنابراین، تلاقی به‌ازای $y < \lambda$ روی می‌دهد. از طرف دیگر، چون $\tanh y < 1$ ، باید در نقطه تلاقی داشته باشیم $\lambda/y < 2$ ، یعنی

$$\kappa > \frac{\lambda}{2a} \quad (۸۲-۵)$$

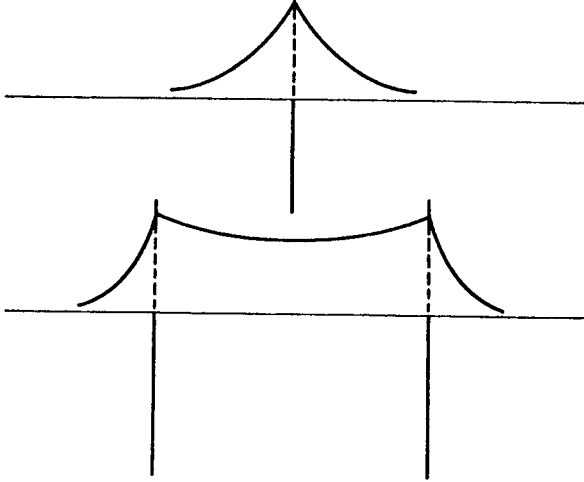
از مقایسه این رابطه با ۵-۷۴ می‌بینیم که انرژی برای چاه دوگانه عدد منفی بزرگتری است، یعنی انرژی در این مورد کمتر است. توجه کنید که علت این امر این نیست که قدرت یک جفت پتانسیل از قدرت یک تک پتانسیل بیشتر است، چنانکه برای یک الکترون مقید به دو پروتون در مقایسه با یک الکترون مقید به یک پروتون صادق است. علت وابستگی شدیدتر آن است که، همان‌طور که شکل ۵-۱۷ نشان می‌دهد، همساز کردن یک نمایی سریعاً نزولی به یک تابع متقارن (در اینجا $\cosh x$) با یک ناپوستگی در شیب به‌صورتی که داده شده است، آسانتر از همساز کردن آن با یک نمایی به همان اندازه نزولی در طرف دیگر پتانسیل است. در جهان واقعی، انرژی یک تک الکترون مقید به دو پروتون که فاصله کمی از یکدیگر دارند کمتر از انرژی یک تک پروتون به‌علاوه یک اتم هیدروژن در دور دست است، اگرچه برای مورد اول دافعه مؤثرتری بین پروتونها وجود دارد. در اینجا نیز اثر غالب، نحوه همسازی تابع موج با وضعیت هندسی است.

۲. جواب فرد به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\kappa x} & x > a \\ &= A \sinh \kappa x & a > x > -a \\ &= -e^{\kappa x} & x < -a \end{aligned} \quad (۸۳-۵)$$

باز هم، به‌دلیل یاد تقارن، کافی است شرایط را در مثلاً $x = a$ به‌کار ببریم. از پیوستگی تابع موج

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۱۷-۵ توابع موج مقید برای پتانسیل‌های تابع دلنای جاذب تک و دوگانه. قدرت پتانسیل را ناپوستگی شیبهای تابع موج در پتانسیلها تعیین می‌کند. این در هر سه مورد یکسان است و نشان می‌دهد که برای پتانسیل دوگانه افت با شیب تندتر به طرف راست و به طرف چپ امکانپذیر است.

داریم

$$A \sinh \kappa a = e^{-\kappa a} \quad (۱۴-۵)$$

و معادله ناپوستگی عبارت است از

$$-\kappa e^{-\kappa a} - \kappa A \cosh \kappa a = -\frac{\lambda}{a} e^{-\kappa a} \quad (۱۵-۵)$$

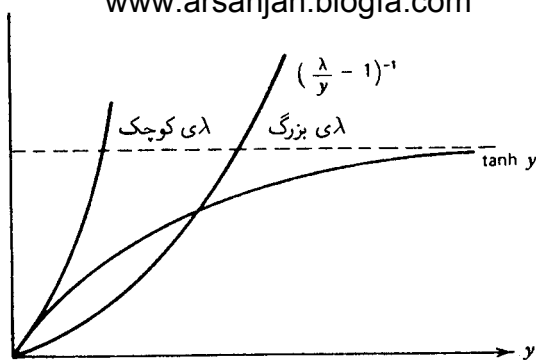
از ترکیب این دو معادله شرط ویژه مقدار به دست می‌آید:

$$\coth \kappa a = \frac{\lambda}{\kappa a} - 1 \quad (۱۶-۵)$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\lambda}{\kappa a} - 1 = \frac{e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}}{e^{\kappa a} - e^{-\kappa a}} = \frac{1 + e^{-2\kappa a}}{1 - e^{-2\kappa a}}$$

درست مانند مورد ویژه مقدار حالت پایه، می‌توان جواب را به ازای $\lambda \gg 1$ تعیین کرد. این جواب



شکل ۱۸-۵ حل رابطه ویژه مقدار $(\lambda/y - 1)^{-1}$.

از تغییر علامت $e^{-2\kappa a}$ به دست می‌آید، و در نتیجه داریم

$$2\kappa a = \lambda - \lambda e^{-\lambda} \quad (۸۷-۵)$$

می‌توان نشان داد که این جواب فرد حداکثر یک حالت مقید دارد. شکل ۱۸-۵ نمودار عکس معادله ویژه مقدار یعنی

$$\tanh \kappa a = \left(\frac{\lambda}{\kappa a} - 1 \right)^{-1}$$

را با $y = \kappa a$ نشان می‌دهد.

تنها در صورتی یک نقطه تلاقی وجود دارد که در مبدأ شیب $\tanh y$ بزرگتر از شیب $(\lambda/y - 1)^{-1}$ باشد، یعنی اگر

$$\lambda > 1 \quad (۸۸-۵)$$

در $y = \lambda/2$ ، جمله $(\lambda/y - 1)^{-1}$ برابر با ۱ است، در نتیجه تلاقی باید به ازای $y < \lambda/2$ روی دهد، یعنی

$$\kappa < \frac{\lambda}{2a} \quad (۸۹-۵)$$

بنابراین، جواب فرد، اگر حالت مقیدی وجود داشته باشد، نسبت به جواب زوج با شدت کمتری مقید است. تابع موج، که باید از صفر بگذرد، باید بین دیواره‌ها شیب تندی داشته باشد، و از این رو

تنها می‌تواند به یک نمایی همساز شود که با سرعت کمتری افت می‌کند. بسته به اندازه λ ، ممکن است یک حالت مقید با پاریته فرد وجود داشته باشد یا نداشته باشد. اکنون برهم‌نهی از حالت پایه $u_e(x)$ با انرژی E_e و حالت برانگیخته $u_o(x)$ با انرژی E_o را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (e و o به ترتیب معرف زوج و فرد هستند)

$$\psi(x) = \frac{u_e(x) + \alpha u_o(x)}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \quad (90-5)$$

که در آن α را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2$ تا حد امکان کوچک شود، یعنی "الکترون" در دورترین فاصله ممکن در طرف راست جایگزیده باشد. پس از زمان t ، تابع موج به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= (u_e(x)e^{-iE_e t/\hbar} + \alpha u_o(x)e^{-iE_o t/\hbar})/\sqrt{1 + \alpha^2} \\ &= e^{-iE_e t/\hbar} [u_e(x) + \alpha e^{-i(E_o - E_e)t/\hbar} u_o(x)]/\sqrt{1 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (91-5)$$

یعنی رابطه فاز میان دو قسمت تغییر می‌کند. به ویژه، در زمانی که به ازای آن

$$e^{-i(E_o - E_e)t/\hbar} = -1 \quad (92-5)$$

"الکترون"، دقیقاً همان گونه که در $t = 0$ در طرف راست جایگزیده بود، در طرف چپ جایگزیده می‌شود. بنابراین، الکترون رفتاری نوسانی دارد که می‌توان آن را با رفت و برگشت الکترون بین دو پتانسیل با بسامد زیر بیان کرد

$$\omega = \omega_{oe} = \frac{E_o - E_e}{\hbar} \quad (93-5)$$

با استفاده از مقادیر انرژی به ازای λ بزرگ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2ma^2} (-(\kappa_o a)^2 - -(\kappa_e a)^2) \\ &= \frac{\hbar}{\lambda ma^2} ((\lambda + \lambda e^{-\lambda})^2 - (\lambda - \lambda e^{-\lambda})^2) \\ &= \frac{\hbar \lambda^2}{2ma^2} e^{-\lambda} \\ &= \frac{\hbar}{2ma^2} e^{-\lambda + 2 \ln \lambda} \end{aligned} \quad (94-5)$$

که در آن عامل $\hbar/2ma^2$ دارای ابعاد بسامد است، و عامل نمایی نشاندهنده وابستگی پارامتری به λ است. می توان ثابت کرد که دوره نوسانی که در بالا توصیف کردیم تقریباً برابر با زمان تونل زنی در سدی است که دو چاه را از هم جدا می کند.^۸

الگوی کرونیک-پنی

فلزات معمولاً دارای ساختار بلوری هستند، یعنی یونها آرایشی دارند که از لحاظ فضایی دوره ای است. این دوره مندی بر حرکت الکترونهاي آزاد در فلز تأثیر می گذارد، و این اثر با الگوی ساده ای نشان داده می شود که اکنون بررسی می کنیم. دوره مندی ساختار بلوری موجب می شود پتانسیل نیز دوره ای باشد، و از این رو می توان نوشت

$$V(x+a) = V(x) \quad (95-5)$$

چون جمله انرژی جنبشی $-(\hbar^2/2m)(d^2/dx^2)$ با تبدیل $x \rightarrow x+a$ تغییر نمی کند، تمام هامیلتونی تحت جابه جایی $x \rightarrow x+a$ ناوردا است. برای مورد پتانسیل صفر، یعنی وقتی جواب مربوط به یک انرژی معین $E = \hbar^2 k^2/2m$ به صورت زیر است

$$\psi(x) = e^{ikx} \quad (96-5)$$

جابه جایی ایجاب می کند

$$\psi(x+a) = e^{ik(x+a)} = e^{ika} \psi(x) \quad (97-5)$$

که جواب اصلی ضرب در یک عامل فاز است، و در نتیجه

$$|\psi(x+a)|^2 = |\psi(x)|^2 \quad (98-5)$$

بنابراین، مشاهده پذیرها در x و $x+a$ یکسان هستند، یعنی نمی توان گفت در x هستیم یا در $x+a$. همچنین در این مثال تأکید می کنیم که تفاوت $\psi(x)$ با $\psi(x+a)$ تنها در یک عامل فاز است، اما این عامل الزاماً به صورت e^{ika} نخواهد بود.

در اینجا به اختصار به بررسی صوری ترین شرط می پردازیم. ناوردایی هامیلتونی در جابه جایی $x \rightarrow x+a$ را می توان به صورت زیر بررسی کرد. فرض کنید D_a عملگری است که قاعده عمل

۸. این را می توان برای پتانسیلهای شکل ۱۵-۵ توجیه کرد. رابطه های تقریبی که برای احتمال تراگیسل به دست آورده ایم در مورد پتانسیلهای تابع دلتا قابل استفاده نیستند.

$$D_a f(x) = f(x+a) \quad (۹۹-۵)$$

ناوردایی مزبور ایجاب می‌کند که

$$[H, D_a] = 0 \quad (۱۰۰-۵)$$

اکنون به تعیین ویژه‌مقدارهای عملگر D_a می‌پردازیم. از معادله ویژه‌مقداری

$$D_a \psi(x) = \lambda_a \psi(x) \quad (۱۰۱-۵)$$

و با توجه به

$$D_{-a} D_a f(x) = D_a D_{-a} f(x) = f(x) \quad (۱۰۲-۵)$$

می‌بینیم که $\lambda_a \lambda_{-a} = 1$ ، و در نتیجه λ_a باید به صورت $e^{\sigma a}$ باشد. اکنون $\psi(x)$ ، ویژه‌تابع همزمان H و D_a ، را در نظر می‌گیریم و تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$u(x) = e^{-\sigma x} \psi(x) \quad (۱۰۳-۵)$$

با اعمال D_a به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} D_a u(x) &= u(x+a) = e^{-\sigma(x+a)} D_a \psi(x) \\ &= e^{-\sigma(x+a)} e^{\sigma a} \psi(x) \end{aligned} \quad (۱۰۴-۵)$$

$$= e^{-\sigma x} \psi(x) = u(x)$$

بنابراین، $u(x)$ یک تابع دوره‌ای با دوره a است:

$$u(x+a) = u(x) \quad (۱۰۵-۵)$$

و $\psi(x) = e^{\sigma x} u(x)$. باید توجه کرد که انتگرال‌پذیری مجذوری ایجاب می‌کند که قسمت حقیقی σ صفر باشد، و در نتیجه ویژه‌تابع همزمان H و D_a باید به صورت زیر باشد

$$\psi(x) = e^{ix + im\sigma} u(x) \quad (۱۰۶-۵)$$

که در آن $u(x) = u(x + a)$. بهتر است بنویسیم $\text{Im}\sigma = \phi/a$. رابطه ۵-۱۰۶ را، که قضیه بلوخ نامیده می‌شود، نخستین بار فلیکس بلوخ در مکانیک کوانتومی به‌کار برد، اما آن را در متون ریاضی قضیه فلوکه می‌نامند.

برای ساده کردن جبر مسئله، پتانسیل $V(x)$ را به صورت رشته‌ای از پتانسیلهای تابع دلتای دافعه می‌گیریم:

$$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\lambda}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na) \quad (107-5)$$

در غیر از نقاط $x = na$ ، جواب عبارت است از جواب معادله ذره آزاد است، یعنی ترکیبی خطی از $\sin kx$ و $\cos kx$ است (برای سادگی با توابع حقیقی کار می‌کنیم). در ناحیه R_n که با $(n-1)a \leq x \leq na$ تعریف می‌شود، فرض می‌کنیم

$$\psi(x) = A_n \sin k(x - na) + B_n \cos k(x - na) \quad (108-5)$$

و در ناحیه R_{n+1} که با $na \leq x \leq (n+1)a$ تعریف می‌شود داریم

$$\psi(x) = A_{n+1} \sin k[x - (n+1)a] + B_{n+1} \cos k[x - (n+1)a] \quad (109-5)$$

پیوستگی تابع موج (در $x = na$) ایجاب می‌کند که

$$-A_{n+1} \sin ka + B_{n+1} \cos ka = B_n \quad (110-5)$$

و شرط ناپیوستگی ۵-۱۳ در اینجا به صورت زیر در می‌آید

$$kA_{n+1} \cos ka + kB_{n+1} \sin ka - kA_n = \frac{\lambda}{a} B_n \quad (111-5)$$

از این دو معادله به دست می‌آوریم

$$A_{n+1} = A_n \cos ka + (g \cos ka - \sin ka) B_n \quad (112-5)$$

$$B_{n+1} = (g \sin ka + \cos ka) B_n + A_n \sin ka$$

که در آنها $g = \lambda/ka$.

$$\psi(x+a) = e^{i(x+a)\text{Im}\sigma} u(x+a) = e^{i\phi} e^{ix\text{Im}\sigma} u(x) = e^{i\phi} \psi(x) \quad (113-5)$$

که ایجاب می‌کند

$$\psi(R_{n+1}) = e^{i\phi} \psi(R_n) \quad (114-5)$$

این در صورتی صادق است که

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= e^{i\phi} A_n \\ B_{n+1} &= e^{i\phi} B_n \end{aligned} \quad (115-5)$$

با جاگذاری در ۱۱۲-۵، یک شرط سازگاری به دست می‌آوریم که عبارت است از

$$(e^{i\phi} - \cos ka)(e^{i\phi} - g \sin ka - \cos ka) = \sin ka(g \cos ka - \sin ka)$$

یعنی

$$e^{2i\phi} - e^{i\phi}(2 \cos ka + g \sin ka) + 1 = 0$$

با ضرب کردن در $e^{-i\phi}$ ، به رابطه زیر می‌رسیم

$$\cos \phi = \cos ka + \frac{1}{2} g \sin ka \quad (116-5)$$

اگر شرایط مرزی دوره‌ای برای "بلور" را به گونه‌ای بگیریم که

$$\psi(R_{n+N}) = \psi(R_n) \quad (117-5)$$

آنگاه از ۱۱۴-۵ به این نتیجه می‌رسیم که $e^{iN\phi} = 1$ ، یعنی

$$\phi = \frac{2\pi}{N} m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (118-5)$$

با استفاده از انتگرال‌پذیری مجددوری نشان دادیم که σ باید انکاری باشد. اگر مقادیر x تا بینهایت ادامه نداشته باشند، باید بنویسیم $(e^{\sigma a})^N = 1$ و در نتیجه باید $\sigma a = i\phi$ ، که باز هم یک عدد انکاری محض است.

ϕ را با qa نشان می‌دهیم که در آن q عدد موج الکترون در جعبه‌ای است به طول Na با شرایط مرزی دوره‌ای و بدون پتانسیل، یعنی وقتی هیچ یونی وجود ندارد. بنابراین، رابطه ۵-۱۱۶ باید به صورت زیر نوشته شود

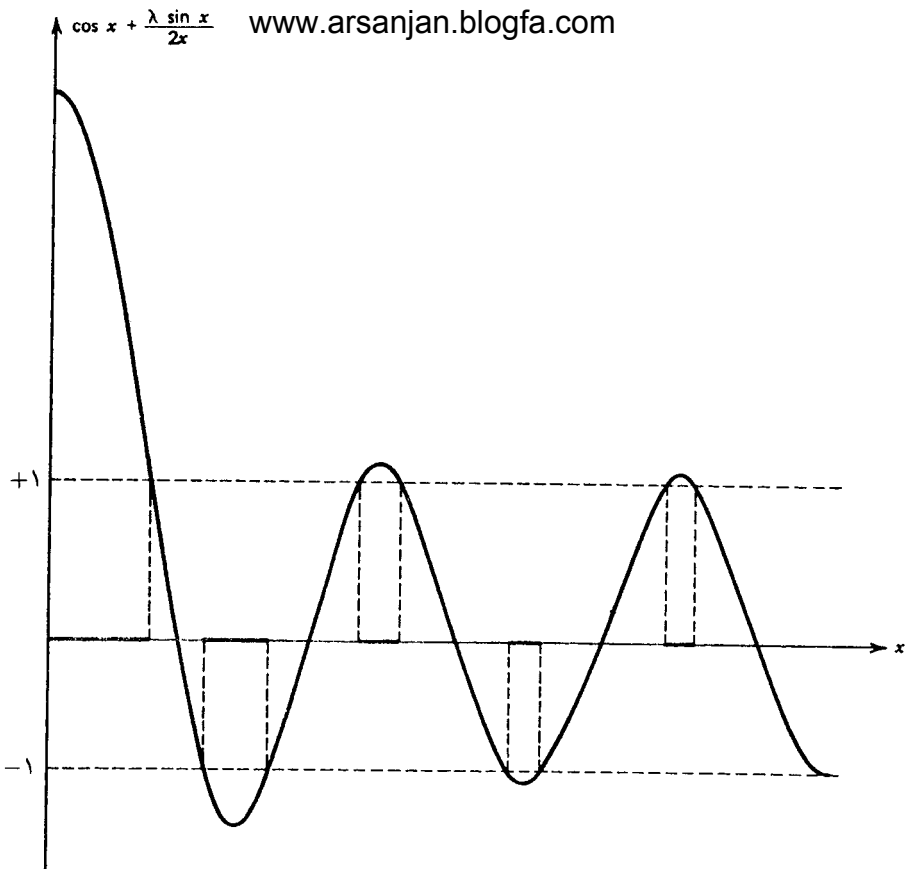
$$\cos qa = \cos ka + \frac{1}{2} \lambda \frac{\sin ka}{ka} \quad (۱۱۹-۵)$$

این نتیجه بسیار جالب توجه است زیرا نشان می‌دهد قدرمطلق طرف راست نمی‌تواند از ۱ بزرگتر باشد، یعنی روی گستره‌های ممکن انرژی $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ محدودیتهایی وجود دارند که تابع پارامترهای "بلور" هستند. شکل ۵-۱۹ نمودار $\cos x + \lambda(\sin x) / 2x$ را برحسب $x = ka$ نشان می‌دهد. خطهای افقی کرانه‌های $\cos qa$ هستند، و ناحیه‌هایی از x که در آنها منحنی خارج از این محدوده می‌افتد ناحیه‌های ممنوع هستند. بنابراین، نوارهای انرژی مجازی وجود دارند که با ناحیه‌های ممنوع از هم جدا شده‌اند. توجه کنید که آغاز یک نوار ممنوع متناظر است با شرط

$$qa = n\pi \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (۱۲۰-۵)$$

اما این رابطه دقیقاً شرط بازتاب براگ در فرود عمودی است. وجود گافهای انرژی را می‌توان به‌طور کیفی درک کرد. در تقریب اول، الکترونها آزاد هستند مگر اینکه بازتاب براگ، وقتی اختلاف فاز امواجی که از اتمهای متوالی بازتابیده می‌شوند مضرب درستی از 2π است روی دهد، یعنی وقتی شرط ۵-۱۲۰ برقرار است. این بازتابها امواج ساکن، با موجهای زوج و فردی که به ترتیب به صورت $\cos \pi x/a$ و $\sin \pi x/a$ هستند، به وجود می‌آورند. ترازهای انرژی متناظر با این امواج ساکن واگن‌اند. هرگاه برهم‌کنش جاذبه میان الکترونها و یونهای مثبت در $x = ma$ (که در آن m عدد درست است) را منظور کنیم، انرژی حالت‌های زوج که در محل یونها به اوج می‌رسد افت می‌کند و انرژی حالت‌های فرد که بین آنها حداکثر است افزایش می‌یابد. بنابراین، واگنی انرژی در $k = n\pi/a$ شکافته می‌شود که نتیجه آن، چنانکه در شکل ۵-۱۹ نشان داده شده است، گافهای انرژی است.

الگوی کرونیگ-پنی به نظریه فلزها، عایقها، و نیمرساناها مربوط می‌شود، زیرا (چنانکه بعداً خواهیم دید) ترازهای انرژی اشغال شده توسط الکترونها نمی‌توانند الکترونهای دیگری بپذیرند. در واقع، یک فلز می‌تواند نوار انرژی داشته باشد که کاملاً پر نشده است. با اعمال میدان الکتریکی خارجی، الکترونها شتاب می‌گیرند و اگر حالت‌های تکانه‌ای برای آنها موجود باشند این الکترونها تحت تأثیر میدان الکتریکی این حالت‌های تکانه را اشغال می‌کنند. اما عایقها دارای نوارهای کاملاً پر

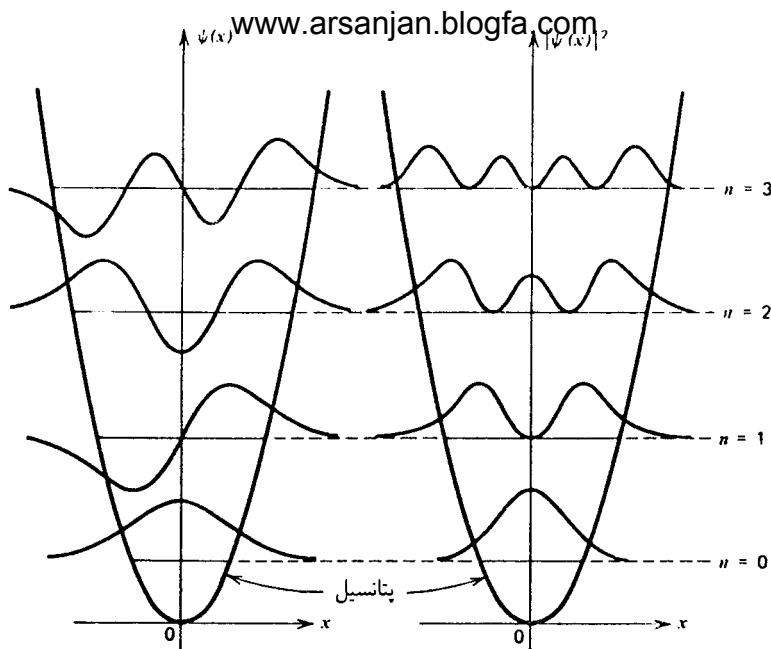


شکل ۱۹-۵ نمودار $\cos x + (\lambda \sin x) / 2x$ بر حسب x . خطهای افقی کرانه‌های ± 1 را نشان می‌دهند. ناحیه‌هایی از x که در آنها منحنی خارج از باریکه $(-1, +1)$ قرار می‌گیرد ممنوع هستند.

هستند، و الکترونها نمی‌توانند در میدان الکتریکی شتاب بگیرند زیرا هیچ حالت خالی نزدیکی وجود ندارد. اگر میدان الکتریکی به اندازه کافی شدید باشد، این الکترونها می‌توانند از گاف انرژی ممنوع "بجهند" و به یک نوار انرژی مجاز خالی بروند. این جهش متناظر است با خراب شدن عایق. نیمرسانا عایقی است که گاف ممنوع آن بسیار باریک است. در اینجا، تغییر وضعیت کوچکی، مثلاً افزایش دما، می‌تواند باعث "جهش" شود و عایق به رسانا تبدیل می‌شود.

نوسانگر هماهنگ

به عنوان آخرین مثال، نوسانگر هماهنگ را در نظر می‌گیریم (شکل ۵-۲۰). برخلاف مثالهایی که تاکنون بررسی کردیم، حل معادله دیفرانسیل نوسانگر هماهنگ چندان ساده نیست، و یک دلیل



شکل ۵-۲۰ ویژه تابعهای نوسانگر هماهنگ، و چگالیهای احتمال برای چهار ویژه مقدار اول. به زوج و فرد بودن ویژه تابعها توجه کنید.

بررسی این مسئله یادگیری روش حل این نوع معادلات است. هامیلتونی کلاسیک برای نوسانگر هماهنگ عبارت است از

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 \quad (۱۲۱-۵)$$

و در نتیجه معادله ویژه مقداری آن به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 u(x) = E u(x) \quad (۱۲۲-۵)$$

با استفاده از بسامد نوسانگر

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (۱۲۳-۵)$$

و با معرفی

$$\epsilon = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (۱۲۴-۵)$$

$$y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \quad (۱۲۵-۵)$$

صورت ساده‌تر زیر را برای معادله به دست می‌آوریم

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + (\epsilon - y^2)u = 0 \quad (۱۲۶-۵)$$

که در آن تمام کمیتها بی‌بعد هستند.

وقتی $y^2 \rightarrow \infty$ ، جمله شامل ϵ به ازای هر ویژه مقدار ϵ قابل چشمپوشی است، و از این رو $u(y)$ باید در معادله مجانبی زیر صدق کند

$$\frac{d^2 u_0(y)}{dy^2} - y^2 u_0(y) = 0 \quad (۱۲۷-۵)$$

که با ضرب کردن در $2 du_0/dy$ می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 - y^2 \frac{d}{dy} (u_0^2) = 0 \quad (۱۲۸-۵)$$

یا

$$\frac{d}{dy} \left[\left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 - y^2 u_0^2 \right] = -2yu_0^2 \quad (۱۲۹-۵)$$

اگر جمله طرف راست را حذف کنیم این معادله تا حد زیادی ساده می‌شود. فرض می‌کنیم این کار را می‌توان انجام داد، و سپس درستی این فرض را واری می‌کنیم. با حذف طرف راست به دست می‌آوریم

$$\frac{du_0}{dy} = (C + y^2 u_0^2)^{1/2}$$

که در آن C ثابت انتگرال‌گیری است. چون $u_0(y)$ و du_0/dy باید در بینهایت صفر شوند، باید داشته باشیم $C = 0$. بنابراین،

$$\frac{du_0}{dy} = \pm y u_0 \quad (۱۳۰-۵)$$

که جواب آن، که در بینهایت قابل قبول است، عبارت است از

$$u_0(y) = e^{-y^2/2} \quad (۱۳۱-۵)$$

اکنون می‌توان دید که جمله $2yu_0'' = 2ye^{-y^2}$ در مقایسه با

$$\frac{d}{dy}(y^2 u_0') = \frac{d}{dy}(y^2 e^{-y^2}) \simeq -4y^2 e^{-y^2}$$

به‌ازای y های بزرگ واقعاً قابل چشمپوشی است. اگر تابع جدیدی مانند $h(y)$ را وارد کنیم به طوری که

$$u(y) = h(y)e^{-y^2/2} \quad (۱۳۲-۵)$$

آنگاه معادلهٔ دیفرانسیل به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^2 h(y)}{dy^2} - 2y \frac{dh(y)}{dy} + (\epsilon - 1)h(y) = 0 \quad (۱۳۳-۵)$$

این نتیجه ممکن است ساده‌سازی چندانی به نظر نرسد، اما اکنون می‌توان با دانستن رفتار جواب در بینهایت رفتار آن را در نزدیکی $y = 0$ بررسی کرد. رشتهٔ توانی زیر را امتحان می‌کنیم

$$h(y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y^m \quad (۱۳۴-۵)$$

با قرار دادن این رشته در معادلهٔ ۱۳۳-۵، معلوم می‌شود که ضرایب y^m در رابطهٔ بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$(m+1)(m+2)a_{m+2} = (2m - \epsilon + 1)a_m \quad (۱۳۵-۵)$$

بنابراین، با داشتن a_0 و a_1 ، می‌توان رشته‌های زوج و فرد جداگانه‌ای به دست آورد. اینکه این رشته‌ها با هم مخلوط نمی‌شوند نتیجهٔ ناوردایی هامیلتونی تحت بازتاب است. به‌ازای یک مقدار اختیاری ϵ ، برای m های بزرگ (مثلاً $m > N$) به دست می‌آوریم

$$a_{m+2} \simeq \frac{2}{m} a_m \quad (۱۳۶-۵)$$

بنابراین، جواب تقریباً برابر است با www.arsanjan.blogfa.com

$$h(y) = (y \text{ چندجمله‌ای بر حسب } y) + \\ + a_N \left[y^N + \frac{2}{N} y^{N+2} + \frac{2^2}{N(N+2)} y^{N+4} + \frac{2^3}{N(N+2)(N+4)} y^{N+6} + \dots \right]$$

در اینجا برای سادگی تنها جواب زوج را در نظر گرفته‌ایم. رشته نامتناهی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$A_N y^2 \left(\frac{N}{2} - 1 \right)! \left[\frac{(y^2)^{N/2-1}}{(N/2-1)!} + \frac{(y^2)^{N/2}}{(N/2)!} + \frac{(y^2)^{N/2+1}}{(N/2+1)!} + \dots \right]$$

بتر است قرار می‌دهیم $N = 2k$ ، و در نتیجه رشته به صورت زیر درمی‌آید

$$y^2 (k-1)! \left[\frac{(y^2)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{(y^2)^k}{k!} + \frac{(y^2)^{k+1}}{(k+1)!} + \dots \right] \\ = y^2 (k-1)! \left[e^{y^2} - \left\{ 1 + y^2 + \frac{(y^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(y^2)^{k-2}}{(k-2)!} \right\} \right]$$

که به صورت یک چندجمله‌ای + یک ثابت $\times e^{y^2}$ است. وقتی این را در ۵-۱۳۲ می‌گذاریم جوابی به دست می‌آوریم که در بینهایت صفر نمی‌شود. جواب قابل قبول وقتی به دست می‌آید که رابطه بازگشتی ۳-۱۳۵ در جایی قطع شود. بنابراین، باید

$$\epsilon = 2.N + 1 \quad (137-5)$$

به‌ازای این مقدار خاص ϵ ، از ترکیب روابط بازگشتی به دست می‌آوریم

$$a_{2k} = (-2)^k \frac{N(N-2) \dots (N-2k+4)(N-2k+2)}{(2k)!} a_0 \quad (138-5)$$

$$a_{2k+1} = (-2)^k \frac{(N-1)(N-3) \dots (N-2k+3)(N-2k+1)}{(2k+1)!} a_1 \quad (139-5)$$

بنابراین، به نتیجه‌های زیر می‌رسیم:

۱. ویژه‌مقدارها گسسته و هم‌فاصله هستند. معادله ۱۳۷-۵ تبدیل می‌شود به

$$E = h\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (۱۴۰-۵)$$

که صورت آشنایی دارد، زیرا این رابطه میان انرژی و بسامد همان رابطه‌ای است که پلانک برای مدهای میدان تابش کشف کرد. این نتیجه اتفاقی نیست، زیرا تجزیه میدان الکترومغناطیسی به مدهای بهنجار اساساً تجزیه به نوسانگرهای هماهنگی است که واجتیده‌اند.

۲. چندجمله‌ایهای $h(y)$ ، با تقریب ثابتهای بهنجارش، چندجمله‌ایهای هرمیت $H_n(y)$ هستند که ویژگیهای آنها را می‌توان در بیشتر کتابهای درسی ریاضی فیزیک یافت. در اینجا تنها به بیان کلی ویژگیهای آنها بسنده می‌کنیم:

$H_n(y)$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند

$$\frac{d^2 H_n(y)}{dy^2} - 2y \frac{dH_n(y)}{dy} + 2n H_n(y) = 0 \quad (۱۴۱-۵)$$

رابطه‌های بازگشتی برای چندجمله‌ایهای هرمیت عبارت‌اند از

$$H_{n+1} - 2y H_n + 2n H_{n-1} = 0 \quad (۱۴۲-۵)$$

$$H_{n+1} + \frac{dH_n}{dy} - 2y H_n = 0 \quad (۱۴۳-۵)$$

همچنین داریم

$$\sum_n H_n(y) \frac{e^{-y^2}}{n!} = e^{y^2 - y^2} \quad (۱۴۴-۵)$$

و

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \quad (۱۴۵-۵)$$

بهنجارش چندجمله‌ایهای هرمیت به‌گونه‌ای است که

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} H_n(y)^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (۱۴۶-۵)$$

www.arsanjan.blogfa.com
 صورت صریح تعدادی از چندجمله‌ایهای هرمیت را در اینجا می‌نویسیم

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1 \\ H_1(y) &= 2y \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2 \\ H_3(y) &= 8y^3 - 12y \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12 \\ H_5(y) &= 32y^5 - 160y^3 + 129y \end{aligned} \quad (147-5)$$

تعامد ویژه‌تابه‌های متناظر با مقادیر مختلف n را می‌توان به‌سادگی اثبات کرد. اگر معادله‌های ویژه‌مقداری

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} = \frac{mk}{\hbar^2} x^2 u_n - \frac{2mE_n}{\hbar^2} u_n$$

و

$$\frac{d^2 u_l^*}{dx^2} = \frac{mk}{\hbar^2} x^2 u_l^* - \frac{2mE_l}{\hbar^2} u_l^*$$

را به ترتیب در u_n و u_l^* ضرب کنیم و سپس معادله دوم را از معادله اول کم کنیم، به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx} \left(u_l^* \frac{du_n}{dx} - \frac{du_l^*}{dx} u_n \right) = \frac{2m}{\hbar^2} (E_l - E_n) u_l^* u_n$$

با انتگرال‌گیری از این معادله روی x از $-\infty$ تا $+\infty$ ، طرف چپ صفر می‌شود زیرا ویژه‌تابه‌ها و مشتق‌های آنها در $x = \pm\infty$ صفر می‌شوند. بنابراین، داریم

$$(E_l - E_n) \int_{-\infty}^{\infty} dx u_l^*(x) u_n(x) = 0 \quad (148-5)$$

که نشان می‌دهد ویژه‌تابه‌هایی که برای آنها $E_l \neq E_n$ متعامد هستند. دلیل اهمیت نوسانگر هماهنگ در مکانیک کوانتومی، همچون در مکانیک کلاسیک، این است که هراختلال کوچک دستگاه از حالت تعادل آن باعث نوسانهایی کوچکی می‌شود که در نهایت به مدهای بهنجار، یعنی نوسانگرهای مستقل، قابل تجزیه‌اند.

۳. چنانکه ۵-۱۴۰ نشان می‌دهد، حتی پایینترین حالت دارای مقداری انرژی است، که انرژی نقطه صفر نامیده می‌شود. وجود این انرژی یک اثر صرفاً کوانتوم-مکانیکی است، و می‌توان آن را با توجه به اصل عدم قطعیت تعبیر کرد. همین انرژی نقطه صفر است که باعث می‌شود هلیوم در دماهای فوق‌العاده کم "منجمد" نشود بلکه در فشارهای عادی تا دماهایی از مرتبه $10^{-2} K$ مایع باقی بماند. برای اتمهای سبکتر بسامد ω بزرگتر است، و به همین دلیل این اثر برای مثلاً نیتروژن روی نمی‌دهد. این اثر همچنین به جزئیات نیروهای میان اتمی نیز بستگی دارد، و از این رو است که هیدروژن مایع منجمد می‌شود.

مسائل

۵-۱ یک پتانسیل اختیاری جایگزیده در یک بخش متناهی از محور x را در نظر بگیرید. جوابهای معادله شرودینگر در ناحیه‌های چپ و راست این پتانسیل در شکل زیر داده شده‌اند

نشان دهید اگر بنویسیم

$$C = S_{11}A + S_{12}D$$

$$B = S_{21}A + S_{22}D$$

یعنی امواج "ورودی" و امواج "خروجی" را با معادله ماتریسی زیر به هم مربوط کنیم

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix}$$

آنگاه رابطه‌های زیر برقرارند

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

$$|S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1$$

$$S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^* = 0$$

با استفاده از این رابطه‌ها نشان دهید ماتریس پراکندگی

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

www.arsanjan.blogfa.com و ترانهاد آن یکانی هستند.

[راهنمایی: از پایستگی شار و اینکه A و B می‌توانند اعداد مختلط اختیاری باشند استفاده کنید.]

۲-۵ عناصر ماتریسی پراکندگی $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ را برای پتانسیل زیر محاسبه کنید

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 & x < -a \\ &= V_0 & -a < x < a \\ &= 0 & x > a \end{aligned}$$

و نشان دهید شرایط کلی مسئله ۱-۵ واقعاً برقرار هستند.
۳-۵ عناصر ماتریسی S_{11}, \dots, S_{22} تابعی از k هستند. نشان دهید

$$S_{11}(-k) = S_{11}^*(k)$$

$$S_{22}(-k) = S_{22}^*(k)$$

$$S_{12}(-k) = S_{12}^*(k)$$

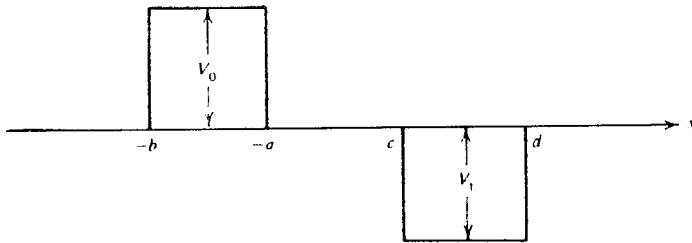
یعنی ماتریس S دارای خاصیت زیر است

$$S(-k) = S^+(k)$$

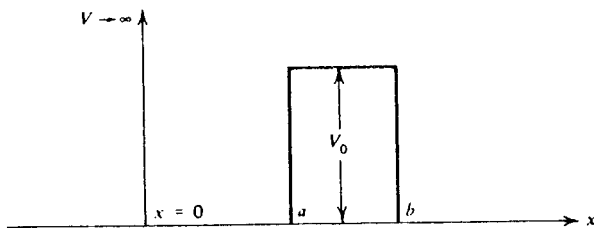
۴-۵ جواب فرد مربوط به چاه پتانسیل (مثلاً معادله ۶۷-۵) را در نظر بگیرید، که می‌توان از آن به عنوان الگو برای پتانسیل سه‌بعدی با تکانه زاویه‌ای صفر استفاده کرد. اگر عرض چاه را 1.4×10^{-12} cm و انرژی بستگی دستگاه را 22 MeV بگیریم، و اگر جرم مربوط 8×10^{-24} g باشد، عمق چاه پتانسیل را برحسب MeV به دست آورید.

[راهنمایی: (۱) ابتدا فاصله‌ها و جرمها را برحسب جرمی بیان کنید، که در نتیجه عرض چاه به صورت $d(h/\mu c)$ و انرژی بستگی به صورت $\epsilon(\mu c^2)$ درآید. جرم داده شده می‌تواند جرم مناسبی باشد. (۲) انرژی بستگی بسیار کوچک، تقریباً برابر با صفر، است. اگر این انرژی صفر می‌بود ۵-۶۹ مقدار V_0 را به دست می‌داد. حول این مقدار بسط دهید.]

۵-۵ بدون حل معادله شرودینگر جوابها را برای موارد زیر به دست آورید به طوری که تنها جور



(الف) اگر پتانسیل نبود شار $\hbar k/m$ از سمت چپ می آمد؛ فرض کنید $E < V_0$.



(ب) اگر پتانسیل نبود شار $\hbar k/m$ از سمت راست می آمد؛ فرض کنید $E < V_0$.

۶-۵ نشان دهید شرایط مربوط به حالت مقید ۶۳-۵ را می توان با صفر کردن مخرج کسرها در

۲۶-۵ به ازای $k = ik$ به دست آورد. ثابت کنید که این نتیجه اتفاقی نیست.

۷-۵ نشان دهید که برای پتانسیل

$$\frac{\gamma m}{\hbar^2} V(x) = \frac{\lambda}{a} \delta(x - b)$$

ماتریس پراکندگی به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} \frac{\gamma ika}{\gamma ika - \lambda} & \frac{\lambda}{\gamma ika - \lambda} e^{-\gamma ikb} \\ \frac{\lambda}{\gamma ika - \lambda} e^{\gamma ikb} & \frac{\gamma ika}{\gamma ika - \lambda} \end{pmatrix}$$

ثابت کنید این ماتریس یکانی است، و اگر عناصر آن بینهایت شوند شرط مربوط به حالت های مقید به دست می آید. (این نتیجه تنها برای $\lambda < 0$ برقرار است.)

۸-۵ مقدار α در ۹۰-۵ را چنان محاسبه کنید که ذره تا حد امکان دور از مبدأ و در سمت راست آن جایگزین شود.

۹-۵ توابع موج مربوط به سه ویژه مقدار اول نوسانگر هماهنگ را به تفصیل محاسبه کنید.

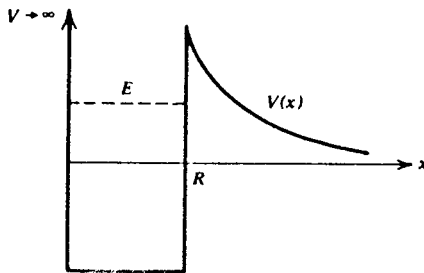
۱۰- پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده را که با یک جمله کوچک درجه سوم مختل شده است در نظر بگیرید:

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x^2 - \frac{1}{a}x^3 \right)$$

اگر a در مقایسه با اندازه مشخصه $(\hbar/m\omega)^{1/2}$ بزرگ باشد، مدت زمانی را برآورد کنید که طول می کشد تا ذره ای در حالت پایه به ناحیه دور در سمت راست "نشت" کند. توجه کنید که فقط با این اختلال حالت کمترین انرژی وجود ندارد، زیرا به ازای x های به اندازه کافی بزرگ پتانسیل بینهایت عمیق می شود.

۱۱- پتانسیلی را که با شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید، که در آن

$$V(x) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m a x^2} \quad x > R.$$



طول عمر ذره ای با انرژی E را در این چاه پتانسیل برآورد کنید. پتانسیل $V(x)$ نمایشگر یک سد مرکزگریز در جهان سه بعدی است. نتیجه را برحسب کمیت بی بعد l/kR بیان کنید، که در آن $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ و $l \gg 1$.

۱۲- پتانسیل کرونینگ-پنی را با شرط زیر در نظر بگیرید

$$\lambda = 3\pi$$

(الف) نمودار تفصیلی

$$\cos x + \frac{\lambda}{2} \frac{\sin x}{x}$$

را برحسب $x = ka$ ترسیم کنید.

(ب) نشان دهید نوارهای انرژی ممنوع درست بالاتر از $ka = n\pi$ شروع می‌شوند.

(ج) نشان دهید با افزایش λ نوارهای انرژی مجاز باریکتر می‌شوند.

(د) انرژی $\hbar^2 k^2 / 2m$ را برحسب q ترسیم کنید.

۱۳-۵ پتانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} V(X) &= \infty & x < 0 \\ &= -V_0 & 0 < x < a \\ &= 0 & a < x \end{aligned}$$

فرض کنید موج تختی با تکانه $\hbar k$ و شار $\hbar k/m$ از $+\infty$ فرستاده شده است. (الف) نشان دهید دامنه موج بازتابیده را می‌توان به صورت $Ce^{i\delta}$ نوشت. (ب) C را محاسبه کنید و رابطه‌ای به دست آورید که از آن بتوان δ را تعیین کرد.

۱۴-۵ استدلال زیر را در نظر بگیرید: اگر الکترونی در پتانسیلی به عرض a داشته باشیم، انرژی جنبشی آن بنا به اصل عدم قطعیت بزرگتر از $\hbar^2 / 2ma^2$ است. بنابراین، برای اینکه حالت مقیدی وجود داشته باشد، انرژی پتانسیل نه تنها باید منفی باشد بلکه قدرمطلق آن باید بزرگتر از $\hbar^2 / 2ma^2$ باشد. از طرف دیگر، چنانکه دیدیم، برای چاه یک بعدی هر قدر هم که عمق چاه کم باشد همیشه یک حالت مقید وجود دارد. در این استدلال چه چیزی غلط است؟

۱۵-۵ پتانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & x < 0 \\ &= 0 & x > a \\ &= \text{یک تابع منفی از } a \end{aligned}$$

فرض کنید تابع موج داخلی به گونه‌ای است که

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} \Big|_{x=a} = f(E)$$

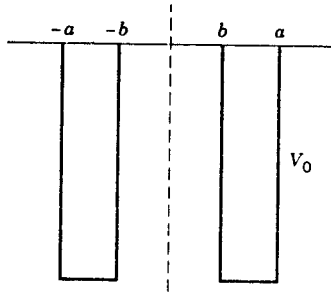
(الف) انرژی بستگی یک حالت مقید را برحسب $f(E_B)$ تعیین کنید.

(ب) فرض کنید $f(E)$ برحسب E به‌کندی تغییر می‌کند به طوری که می‌توان آن را ثابت گرفت.

اگر تابع موج برای $x > a$ به صورت $e^{-ikx} + R(k)e^{ikx}$ باشد، دامنه موج بازتابیده $R(k)$ را

www.arsanjan.blogfa.com

به دست آورید، و تحقیق کنید که $|R(\alpha)| = 1$.
 ۱۶-۵ ذره‌ای را در چاه دوگانه شکل زیر در نظر بگیرید



نشان دهید شرایط ویژه مقدار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tan q(a-b) = \frac{q\alpha(1 + \tanh \alpha b)}{q^2 - \alpha^2 \tanh \alpha b}$$

و

$$\tan q(a-b) = \frac{q\alpha(1 + \coth \alpha b)}{q^2 - \alpha^2 \coth \alpha b}$$

که به ترتیب مربوط به جوابهای زوج و فرد هستند، و در آنها

$$E + V_0 = \hbar^2 q^2 / 2m \quad \text{و} \quad -E = \hbar^2 \alpha^2 / 2m$$

۱۷-۵ مثال مسئله ۱۶-۵ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید وقتی $b \rightarrow 0$ شرایط ویژه مقدار به شرایط مربوط به چاه منفرد میل می‌کنند.
 (ب) موردی را در نظر بگیرید که فاصله بین مراکز چاهها زیاد می‌شود اما عرض چاهها ثابت می‌ماند. نشان دهید ویژه مقدارهای زوج و فرد به یکدیگر نزدیک می‌شوند. اختلاف انرژی میان کمترین ویژه مقدارهای زوج و فرد را برآورد کنید.
 [راهنمایی: به ازای مقادیر بزرگ z داریم $\tanh z = 1 - 2e^{-2z}$. e^{-2z} را تا کمترین مرتبه در نظر بگیرید.]

۱۸-۵ قضیه ویریال را ثابت کنید، که در یک بعد به صورت زیر است

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle x \frac{dV}{dx} \right\rangle$$

www.arsanjan.blogfa.com
 برای این کار (الف) نشان دهید برای توابع موج حقیقی $\psi(x)$ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) x \frac{dV(x)}{dx} \psi(x) = -\langle V \rangle + 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x)$$

(ب) با استفاده از معادله ویژه‌مقداری انرژی ثابت کنید

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{d\psi}{dx} x V(x) \psi(x) = E + \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d\psi}{dx} \right)^2$$

مراجع

الگوی کرونیگ-پنی در کتاب زیر نیز به تفصیل بررسی شده است

E Merzbacher, *Quantum Mechanics* (2nd edition), John Wiley & Sons, New York, 1970.

برای بحث مفصلتری درباره "نظریه نواری" مراجعه کنید به

C Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (6th edition), John Wiley & Sons, New York, 1986, Chapter 9.

برای بحث کاملتری درباره نفوذ در سد، با استفاده از تقریب WKB، به کتابهای پیشرفته‌تری که در آخر این کتاب معرفی شده‌اند مراجعه کنید.



ساختار کلی مکانیک موجی

در این فصل به گردآوری و تشریح مفصل اصول و مفاهیمی می‌پردازیم که قبلاً در ضمن حل چند مسئله خاص به تدریج بیان کردیم. اصل موضوعه بسط و معنای فیزیکی آن، عملگرها، بردارهای حالت، واگتی، و حد کلاسیک از این جمله هستند. در این فصل نمادنگاری دیراک را نیز معرفی می‌کنیم. از این نمادنگاری گاهی در بقیه کتاب استفاده خواهیم کرد، اما موجز بودنش ارزش اراته در این مرحله از مطالعه مکانیک کوانتومی را به آن می‌دهد.

ویژه تابعها و ویژه مقدارها عملگر هامیلتونی

حالت یک دستگاه فیزیکی با یک تابع موج توصیف می‌شود که حاوی تمام اطلاعات درباره دستگاه است. تابع موج به زمان وابسته است، و تحول زمانی آن با معادله زیر داده می‌شود

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = H\psi(x, t) \quad (1-6)$$

عملگر H ، هامیلتونی، که در مکانیک کوانتومی دارای نقشی اساسی است، روی تابع موج $\psi(x, t)$ عمل می‌کند. این عملگر برای دستگاه ساده متشکل از یک ذره در پتانسیل V به صورت زیر است

$$H = \frac{p_{\text{op}}^2}{2m} + V(x) \quad (۲-۶)$$

اگر $V(x)$ بستگی صریح به زمان نداشته باشد، می‌توان جواب معادله ۱-۶ را به صورت زیر نوشت

$$\psi(x, t) = u_E(x) e^{-iEt/\hbar} \quad (۳-۶)$$

که در آن $u_E(x)$ جواب معادله زیر است

$$Hu_E(x) = Eu_E(x) \quad (۴-۶)$$

$u_E(x)$ را ویژه‌تابع هامیلتونی و E را ویژه‌مقدار می‌نامند.

در این فصل روی دو ویژگی مهم ویژه‌تابعهای H تأکید می‌کنیم:

۱. ویژه‌تابعهای مربوط به ویژه‌مقدارهای مختلف (یعنی مقادیر مختلف ثابت E) متعامند

— به این معنی که

$$\int dx u_E^*(x) u_{E'}(x) = 0 \quad E \neq E' \quad (۵-۶)$$

۲. این ویژه‌تابعها یک مجموعه کامل تشکیل می‌دهند — به این معنی که تابع اختیاری $\psi(x)$

را که انتگرال‌پذیر مجذوری است به طوری که

$$\int dx \psi^*(x) \psi(x) < \infty \quad (۶-۶)$$

می‌توان برحسب ویژه‌تابعهای هامیلتونی بسط داد:

$$\psi(x) = \sum_E C_E u_E(x) \quad (۷-۶)$$

طیف H ممکن است گسسته باشد، مانند مورد چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ. اگر وقتی $x \rightarrow \infty$ پتانسیل $V(x)$ به صفر میل کند، ویژه‌مقدارها می‌توانند هم گسسته باشند و هم یک پیوستار تشکیل دهند. این وضعیت برای پتانسیل جاذبه‌ای روی می‌دهد که به اندازه کافی عمیق