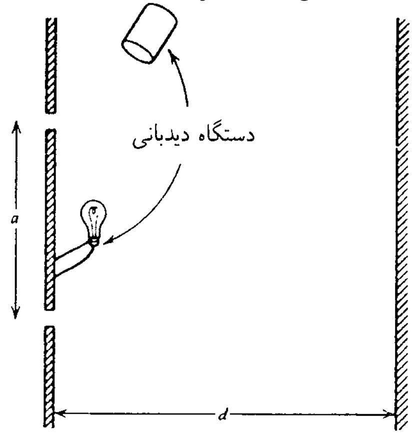
www.arsanjan.blogfa.com



شکل۲ـ۳ آزمایش دوشکافی با دیدبان.

نادقیق است. در نتیجه

$$\frac{\Delta p_y}{p} > \frac{۲}{a}\,\frac{h}{p} = \frac{۲\lambda}{a} \qquad (۳۱\text{ـ}۲)$$

این عدم قطعیت یک ابهام در مکان الکترون روی پرده به‌وجود می‌آورد که حداقل آن $۲\lambda d/a$ است. اما این مقدار بزرگتر از فاصلهٔ میان بیشینه‌ها است، و از این‌رو می‌توان نتیجه گرفت که کار دیدبان باعث از میان رفتن نقش پراش می‌شود، و هیچ‌گونه تناقض منطقی وجود ندارد. برعکس، البته می‌توانستیم استدلال کنیم که سازگاری منطقی ایجاب می‌کند که

$$\Delta p_y \Delta y > h \qquad (۳۲\text{ـ}۲)$$

(ج) "واقعیت" مدارها در اتم بور. چنانکه در فصل ۱ گفته شد، الگوی اتمی بور با مدارهایی سروکار دارد که شعاع آنها با $R_n = hn^۲/\alpha mc$ داده می‌شود. بنابراین، آزمایشی که برای اندازه‌گیری حدود یک مدار خاص طراحی می‌شود باید به‌گونه‌ای باشد که با آن بتوان مکان الکترون در اتم را با دقت زیر اندازه گرفت

$$\Delta x \ll R_n - R_{n-۱} \cong \frac{۲hn}{\alpha mc} \qquad (۳۳\text{ـ}۲)$$

این کار باعث انتقال مهارنشدنی تکانه با بزرگی $\Delta p \gg mc\alpha/۲n$ به‌الکترون می‌شود، و این به‌نوبهٔ

www.arsanjan.blogfa.com

خود عدم قطعیتی را در انرژی الکترون ایجاب می‌کند که مقدار آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\Delta E \simeq \frac{p\Delta p}{m} \gg \frac{mc\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha c}{۲n} = \frac{۱}{۲} \frac{mc^۲\alpha^۲}{n^۲} \qquad (۳۴\text{-}۲)$$

که بسیار بزرگتر از انرژی بستگی الکترون در مدار است. در نتیجه، این اندازه‌گیری به‌احتمال زیاد الکترون را از مدار خارج می‌کند، و از این‌رو نمی‌توان تصویری از مدار به‌دست آورد.

(د) رابطهٔ عدم قطعیت انرژی-زمان. با نوشتن رابطهٔ ۲-۲۵ به‌صورت

$$\frac{p\Delta p}{m} \cdot \frac{\Delta x m}{p} \gtrsim \hbar$$

می‌توان عامل اول را معیاری از عدم قطعیت در انرژی دستگاه دانست، و عامل دوم را، که برابر است با $\Delta x/v$، معیاری از Δt یعنی عدم قطعیت در زمان جایگزینی دستگاه تعبیر کرد. بدین‌ترتیب، به‌رابطهٔ عدم قطعیت انرژی-زمان می‌رسیم:

$$\Delta E\,\Delta t \gtrsim \hbar \qquad (۳۵\text{-}۲)$$

این رابطه را می‌توان از صورت بستهٔ موج ۲-۲۲ هم به‌دست آورد، زیرا E و t در رابطهٔ دوجانبه‌ای همانند مورد x و p ظاهر می‌شوند؛ و همچنین می‌توان آن‌را از نظریهٔ نسبیت هم نتیجه گرفت، زیرا فضا و زمان، و تکانه و انرژی، ارتباط بسیار نزدیکی با هم دارند.[۶] در واقع، فضا و زمان در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی نقشهای نسبتاً متفاوتی دارند، و در حالی‌که می‌توان رابطهٔ ۲-۲۵ را از صورتبندی مکانیک کوانتومی به‌دست آورد برای رابطهٔ ۲-۳۵ این کار ممکن نیست. با وجود این، رابطهٔ عدم قطعیت انرژی-زمان به همان اندازهٔ رابطهٔ ۲-۲۵ قسمتی از ساختار کیفی مکانیک کوانتومی است. در این باره، به مبحث ویژهٔ ۴، "طول‌عمر، پهنای خط، و تشدید"، مراجعه کنید.

براوردهای مرتبهٔ بزرگی

با استفاده از رابطه‌های عدم قطعیت می‌توان مقادیر عددی تقریبی بعضی از کمیتها را در فیزیک میکروسکوپیک براورد کرد. مطالب را با چند مثال روشن می‌کنیم، که اولین آنها به اتم هیدروژن مربوط می‌شود. اگر بگوییم الکترون در داخل اتم هر مکانی می‌تواند داشته باشد، آنگاه اگر r مختصهٔ شعاعی آن باشد داریم

$$pr \sim \hbar \qquad (۳۶\text{-}۲)$$

۶. $(ct, \mathbf{r})$ و $(E/c, \mathbf{p})$ چاربردار هستند، و مؤلفه‌های آنها تحت تبدیلات لورنتس قرار می‌گیرند.

www.arsanjan.blogfa.com

از اینجا می‌توان انرژی را برحسب r بیان کرد:

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^{۲}}{۲m} - \frac{e^{۲}}{r} \\ &= \frac{\hbar^{۲}}{۲mr^{۲}} - \frac{e^{۲}}{r} \end{aligned} \qquad (۲\_۳۷)$$

مقدار کمینهٔ انرژی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{\hbar^{۲}}{mr^{۳}} + \frac{e^{۲}}{r^{۲}} = ۰$$

بنابراین،

$$r = \frac{\hbar^{۲}}{me^{۲}} = \frac{\hbar}{mc\alpha} \qquad (۲\_۳۸)$$

و مقدار Eی متناظر برابر است با

$$E = -\frac{۱}{۲}mc^{۲}\alpha^{۲} \qquad (۲\_۳۹)$$

البته، به‌دست آوردن این مقدار دقیق برای انرژی به این دلیل است که طرف راست ۲_۳۶ را مخصوصاً $\hbar$ گرفتیم. در واقع، به‌جای ۲_۳۶ می‌شد نوشت $pr \sim h$، که به همان اندازه اعتبار دارد، و نتیجهٔ دیگری به‌دست آورد. اما، تفاوت این مقدار جدید E با مقدار درست آن تنها در یک ضریب عددی است، و مرتبهٔ بزرگی عمومی باید باز هم همان باشد (یعنی، $E \sim mc^{۲}\alpha^{۲}$). نکتهٔ مهم این است که، برخلاف نظریهٔ کلاسیک، انرژی به‌موجب اصل عدم قطعیت از پایین کراندار است: افزایش انرژی پتانسیل (منفی)، که از کاهش r یعنی نزدیکتر شدن الکترون به هسته حاصل می‌شود، الزاماً باعث افزایش انرژی جنبشی می‌شود.

به‌عنوان مثالی دیگر، مسئلهٔ نیروهای هسته‌ای را در نظر بگیرید. برد این نیروها از مرتبهٔ یک فرمی، یعنی $۱۰^{-۱۳}\text{cm}$، است. این ایجاب می‌کند که $p \sim h/r \sim ۱۰^{-۱۴}\text{g cm/s}$. انرژی جنبشی متناظر با این تکانه عبارت است از

$$\frac{p^{۲}}{۲M} \sim \frac{۱۰^{-۲۸}}{۳{,}۲ \times ۱۰^{-۲۴}} \sim ۳ \times ۱۰^{-۵}\text{ergs} \qquad (۲\_۴۰)$$

www.arsanjan.blogfa.com

که در آن M جرم نوکلئون (پروتون یا نوترون) و برابر است با $۱٫۶ \times ۱۰^{-۲۴}$ g. چون پتانسیلی که باعث بستگی می‌شود باید بیشتر از این مقدار باشد، نتیجه می‌گیریم که

$$|V| \gtrsim ۳ \times ۱۰^{-۵} \text{ergs} \gtrsim ۲۰\,\text{MeV} \qquad (۲\text{-}۴۱)$$

باز هم، این تنها یک مرتبهٔ بزرگی تقریبی است، اما نشان می‌دهد که انرژی پتانسیل باید برحسب MeV اندازه‌گیری شود نه برحسب eV که در مورد اتمها به‌کار می‌رود.

یک مثال دیگر از نظریهٔ مزون یوکاوا برای نیروهای هسته به‌دست می‌آید. در سال ۱۹۳۵ یوکاوا نظر داد که نیروهای هسته‌ای از گسیل یک کوانتوم جدید (مزون یا پیون) توسط یکی از نوکلئونها و جذب آن توسط یک نوکلئون دیگر ناشی می‌شوند. اگر جرم این کوانتوم را با μ نشان دهیم، گسیل آن باعث عدم موازنه‌ای در انرژی به مقدار $\Delta E \sim \mu c^۲$ می‌شود که تنها می‌تواند در مدت $\Delta t \sim \hbar/E \sim \hbar/\mu c^۲$ روی دهد. برد متناظر با این زمان حرکت ذره از مرتبهٔ $c\Delta t \sim \hbar/\mu c$ است. اگر این برد را برابر با $r_۰ = ۱٫۴ \times ۱۰^{-۱۳}\text{cm}$ بگیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mu c^۲ &\cong \frac{\hbar c}{r_۰} = \frac{۱۰^{-۲۷} \times ۳ \times ۱۰^{۱۰}}{۱٫۴ \times ۱۰^{-۱۳}} \text{ergs} \\ &\simeq ۱۳۰\ \text{MeV} \end{aligned} \qquad (۲\text{-}۴۲)$$

وقتی سرانجام پیون کشف شد، معلوم شد که این براورد دقت قابل‌ملاحظه‌ای دارد، زیرا برای پیون $\mu c^۲ \simeq ۱۴۰\ \text{MeV}$.

به‌طور خلاصه، کوشش آزمونی ما برای تلفیق ویژگیهای موجی و ذره‌ای به‌گونه‌ای که به ساده‌ترین وجه با آزمایش سازگار باشد به عدم قطعیت در توصیف پدیده‌های اتمی در سطح کلاسیک منجر شد، و این عدم قطعیت هم برای توصیف سازگار آزمایشهای (ذهنی) ما لازم است و هم با مشاهدات ما توافق دارد.

مسائل

۲ـ۱ بستهٔ موج ۲ـ۱ را در نظر بگیرید که در آن $g(k)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} g(k) &= ۰ & k &< -K/۲ \\ &= N & -K/۲ < k &< K/۲ \\ &= ۰ & K/۲ &< k \end{aligned}$$

(الف) تابع $f(x)$ را به‌دست آورید.

www.arsanjan.blogfa.com

(ب) مقدار N را طوری تعیین کنید که

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|f(x)|^۲ = ۱$$

(ج) این مقدار را مقایسه کنید با مقداری که برای N از شرط زیر به‌دست می‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk|g(k)|^۲ = \frac{۱}{۲\pi}$$

(د) نشان دهید که تعریف موجهی برای Δx، پهنای $f(x)$ در قسمت (الف)، رابطهٔ زیر را به‌دست می‌دهد

$$\Delta k \, \Delta x > ۱$$

که به مقدار K بستگی ندارد.

۲ـ۲ با فرض اینکه

$$g(k) = \frac{N}{k^۲ + \alpha^۲}$$

تابع $f(x)$ را به‌دست آورید. با ترسیم این دو تابع، باز هم نشان دهید

$$\Delta k \, \Delta x > ۱$$

که مستقل از مقدار α است.

۳ـ۲ مسئلهٔ پهن‌شدن بستهٔ موج گاؤسی مربوط به ذرهٔ آزاد را در نظر بگیرید که برای آن رابطهٔ زیر برقرار است

$$\omega = \frac{\hbar k^۲}{۲m}$$

با استفاده از ۲ـ۱۷، تغییر نسبی اندازهٔ بستهٔ موج در یک ثانیه را برای موارد زیر محاسبه کنید

(الف) بستهٔ موجی که نمایشگر یک الکترون با اندازهٔ $۱۰^{-۴}$cm و $۱۰^{-۸}$cm است.

(ب) بستهٔ موجی که جسمی به جرم ۱g و با اندازهٔ ۱cm را نمایش می‌دهد.

بهتر است پهنا را برحسب $\hbar/mc$ بیان کنید، که در آن m جرم ذره‌ای است که با بستهٔ موج نمایش داده می‌شود.

www.arsanjan.blogfa.com

۲ـ۴ می‌خواهیم یک باریکهٔ الکترونی را به هدفی در فاصلهٔ 10^4km بتابانیم. اگر اندازهٔ بستهٔ موج اولیه 1mm باشد، اندازهٔ آن‌را پس از رسیدن به هدف به‌ازای انرژی جنبشی (الف) $13{,}6\text{eV}$، و (ب) $100\,\text{MeV}$ به‌دست آورید.

[تذکر: رابطهٔ میان انرژی جنبشی و تکانه همیشه $p^2/2m$ نیست!]

۲ـ۵ رابطهٔ میان طول‌موج و بسامد در یک موجبر به‌صورت زیر است

$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\nu^2 - \nu_0^2}}$$

سرعت گروه این امواج را تعیین کنید.

۲ـ۶ برای امواج کشش سطحی در آب کم‌عمق، رابطهٔ میان بسامد و طول‌موج عبارت است از

$$\nu = \left(\frac{2\pi T}{\rho\lambda^3}\right)^{1/2}$$

که در آن T کشش سطحی و ρ چگالی است. سرعت گروه این امواج را محاسبه کنید و رابطهٔ آن‌را با سرعت فاز، که با $v_p = \lambda\nu$ تعریف می‌شود، به‌دست آورید. برای امواج‌گرانی (آب‌عمیق)، این رابطه به‌صورت زیر است

$$\nu = \left(\frac{g}{2\pi\lambda}\right)^{1/2}$$

سرعت گروه و سرعت فاز را تعیین کنید.

۲ـ۷ انرژی حالت پایهٔ نوسانگر هماهنگ را با استفاده از رابطهٔ عدم قطعیت براورد کنید. انرژی نوسانگر هماهنگ برابر است با

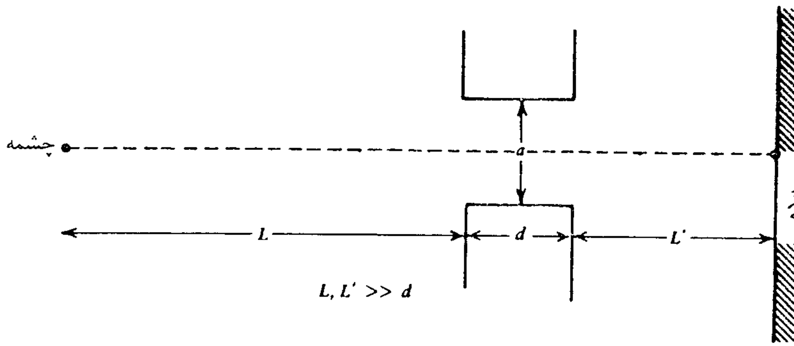
$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

۲ـ۸ با استفاده از رابطهٔ عدم قطعیت، انرژی حالت پایهٔ ذره‌ای در پتانسیل $V(x) = gx^4$ را براورد کنید. ابعاد جواب خود را وارسی کنید.

۲ـ۹ بعضی هسته‌ها، با اندازهٔ نوعی 10^{-12}cm، الکترونهایی با انرژی ۱ تا $10\,\text{MeV}$ گسیل می‌کنند. با استفاده از اصل عدم قطعیت نشان دهید که الکترون با انرژی 1MeV نمی‌تواند قبل از واپاشی در هسته وجود داشته باشد.

www.arsanjan.blogfa.com

۲ـ۱۰ به‌نظر می‌رسد دستگاهی که در زیر ترسیم شده است نقض رابطهٔ عدم قطعیت را ممکن می‌سازد. موقعیت عرضی را می‌توان با دقت $\Delta y \sim a$ تعیین کرد، و تکانهٔ عرضی باریکهٔ فرودی را می‌توان با بزرگ کردن اختیاری L تا حد امکان کوچک کرد. این دستگاه را به‌تفصیل تحلیل کنید، نکات پنهان فرضهای بالا را روشن کنید، و نشان دهید که رابطهٔ عدم قطعیت نقض نمی‌شود.



۲ـ۱۱ عدم قطعیت انرژی (پهنای خط) را برای حالتهایی که طول‌عمر آنها برابر است با (الف) $۲٫۶ \times ۱۰^{-۱۰}\text{s}$، (ب) $۱۰^{-۲۳}\text{s}$، و (ج) ۱۲ دقیقه (برحسب الکترون ولت) به‌دست آورید.

۲ـ۱۲ نور تکفامی به طول‌موج $۶۰۰۰\,\text{Å}$ از یک بستاور سریع که برای $۱۰^{-۹}\text{s}$ باز است عبور می‌کند. پهن‌شدگی طول‌موجهای نور (ناتکفام) عبور کرده را تعیین کنید.

مراجع

بسته‌های موج در بسیاری از کتابهای درسی توضیح داده می‌شوند. مفیدترین آنها در سطح این کتاب عبارت‌اند از

پاول جی، ال و ب کریسمن، مکانیک کوانتومی، ترجمهٔ پاشایی‌راد و سعادت، تهران مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸، ۵۴۸ صفحه.

S Borowitz, *Fundamentals of Wave Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1967.

D Bohm, *Quantum Theory*, Dover Publications Inc. New York, 1989.

تمام کتابهای درسی مکانیک کوانتومی الزاماً رابطه‌های عدم قطعیت را بررسی می‌کنند. جامعترین آنها را می‌توان درکتاب بوهم، که در بالا معرفی شد، و درکتاب زیر ملاحظه کرد.

W Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover Publications, New York, 1930.

بحثهای مربوط به رابطه‌های عدم قطعیت را همچنین می‌توان درکتابهای پیشرفته‌تری که در آخر این کتاب معرفی شده‌اند یافت.

www.arsanjan.blogfa.com

۳

معادلهٔ موج شرودینگر و تعبیراحتمالاتی

در این فصل بعضی از ویژگیهای معادلهٔ شرودینگر ذرهٔ آزاد را که در فصل ۲ به‌دست آوردیم بررسی می‌کنیم. با تعبیر احتمالاتی تابع موج آشنا می‌شویم، و آنگاه به تعریف تکانه در مکانیک کوانتومی و سپس به معادلهٔ شرودینگر مربوط به ذره در پتانسیل $V(x)$ می‌پردازیم. نقطهٔ شروع بحث ما معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زیر است

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \qquad (۳\_۱)$$

که آن‌را معادلهٔ درست برای توصیف ذرهٔ آزاد می‌گیریم.

با وارون کردن روندی که با آن به ۲_۲۳ رسیدیم، می‌بینیم که عمومی‌ترین جواب این معادله عبارت است از

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\ \phi(p)e^{i[px-(p^2/2m)t]/\hbar} \qquad (۳\_۲)$$

(دلیل ضریب بهنجارش در جلو انتگرال را در ۳_۲۷ خواهیم دید.) قبل از اینکه به بحث بسیار مهم تعبیر جواب معادلهٔ ۳_۱ یعنی $\psi(x,t)$ بپردازیم، باید تأکید کنیم که این معادله برحسب مشتق

www.arsanjan.blogfa.com

زمانی از مرتبهٔ اول است. بنابراین، اگر مقدار اولیهٔ ψ، مثلاً $\psi(x,0)$ معلوم باشد، می‌توان مقدار آن‌را در همهٔ زمانهای دیگر به‌دست آورد. این امر از صورت معادله برای کار با کامپیوتر[1]

$$\psi(x,t+\Delta t)=\psi(x,t)+\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\Delta t \qquad (۳\_۳)$$

یا از صورت عمومی‌ترین جواب آشکار است. با داشتن $\psi(x,0)$ می‌توان تابع $\phi(p)$ را از ۳ـ۲ به‌دست آورد. انتگرال فوریهٔ

$$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\ \phi(p)e^{ipx/\hbar} \qquad (۴\_۳)$$

را می‌توان وارون کرد، و با معلوم شدن $\phi(p)$ جواب به‌ازای تمام مقادیر t معلوم می‌شود. توجه کنید که در این معادلهٔ دیفرانسیل "عدم قطعیت" وجود ندارد: همینکه حالت اولیهٔ بستهٔ موج مشخص شد ـــ و تا کنون هیچ محدودیتی برای $\psi(x,0)$ در نظر نگرفته‌ایم ـــ آنگاه این بستهٔ موج در تمام زمانهای بعدی کاملاً مشخص می‌شود.

تعبیر احتمالاتی

در جستجوی تعبیری برای $\psi(x,t)$ باید به‌خاطر داشته باشیم که اولاً $\psi(x,t)$ به‌طور کلی یک تابع مختلط (مانند تابع ۲ـ۱۶) است، و ثانیاً تابع $|\psi(x,t)|$ در جایی‌که باید ذره وجود داشته باشد بزرگ و در جاهای دیگر کوچک است. این تابع همچنین دارای ویژگی پهن شدن است، که در فصل ۲ بررسی شد. تقریباً بلافاصله پس از کشف معادلهٔ شرودینگر (که تنها شش ماه پس از کشف مکانیک کوانتومی توسط هایزنبرگ در سال ۱۹۲۵ صورت گرفت)، ماکس بورن پراکندگی باریکه‌ای از الکترونها توسط یک هدف را مطالعه کرد، و از اینجا به تعبیر درست تابع موج پی برد. او نظر داد که کمیت

$$P(x,t)dx=|\psi(x,t)|^2dx \qquad (۵\_۳)$$

عبارت است از احتمال اینکه ذره‌ای را که با تابع موج $\psi(x,t)$ توصیف می‌شود بتوان در زمان t بین x و $x+dx$ یافت. چگالی احتمال $P(x,t)$ حقیقی است، و در جایی که باید ذره وجود داشته باشد بزرگ است، و پهن‌شدگی آن به این معنا نیست که یک ذرهٔ معین پهن می‌شود، بلکه

---

۱. برای یک شبکهٔ گسسته، باید به‌جای $\partial\psi(x,t)/\partial t$ قرار دهیم $[\psi(x,t+\Delta t)-\psi(x,t)]/\Delta t$ که در آن Δt کوچک است اما صفر نیست.

www.arsanjan.blogfa.com
صرفاً به این معنا است که با گذشت زمان احتمال یافتن ذره در جایی که در $t = ۰$ قرار داشته است کمتر می‌شود.

برای صادق بودن این تعبیر باید شرط زیر برقرار باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x,t)dx = ۱ \qquad (۳\text{-}۶)$$

زیرا ذره باید به هر حال در جایی باشد. در یک معادلهٔ خطی مانند ۳ـ۱، جواب $\psi(x,t)$ را می‌توان در یک ثابت ضرب کرد و نتیجه باز هم یک جواب خواهد بود. بنابراین، رابطهٔ ۳ـ۶ جوابهای $\psi(x,t)$ را به‌دسته‌ای از توابع محدود می‌کند که انتگرال‌پذیری مجذوری هستند. بعداً خواهیم دید که کافی است شرط زیر برقرار باشد

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx|\psi(x,۰)|^۲ < \infty \qquad (۳\text{-}۷)$$

یعنی توابع موج حالت اولیه باید انتگرال‌پذیر مجذوری باشند. وقتی بازهٔ انتگرال‌گیری نامتناهی است، این شرط ایجاب می‌کند که $\psi(x,۰)$ سریعتر از $x^{-۱/۲}$ به‌صفر میل کند. همچنین ضروری است که توابع موج $\psi(x,t)$ نسبت به x پیوسته باشند.

اهمیت فازها

چون کمیتی که معنای فیزیکی دارد $|\psi(x,t)|^۲$ است، به‌نظر می‌رسد که فاز جواب معادله به‌نحوی بی‌اهمیت است. این نتیجه‌گیری نادرست است! چون معادلهٔ ۳ـ۱ خطی است، اگر $\psi_۱(x,t)$ و $\psi_۲(x,t)$ جواب باشند، ترکیب خطی زیر نیز یک جواب است

$$\psi(x,t) = \psi_۱(x,t) + \psi_۲(x,t) \qquad (۳\text{-}۸)$$

اگر $\psi_۱(x,t) = R_۱e^{i\theta_۱}$ و $\psi_۲(x,t) = R_۲e^{i\theta_۲}$ که در آنها $R_۱$، $R_۲$، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ حقیقی هستند، آنگاه

$$\begin{aligned} |\psi(x,t)|^۲ &= |e^{i\theta_۱}(R_۱ + R_۲e^{i(\theta_۲-\theta_۱)})|^۲ \\ &= R_۱^۲ + R_۲^۲ + ۲R_۱R_۲\cos(\theta_۱ - \theta_۲) \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۹)$$

که نشان می‌دهد فاز نسبی مهم است. از فاز کل در $\psi(x,t)$ می‌توان صرفنظر کرد؛ تنها فاز نسبی $\theta_۱ - \theta_۲$ بین توابع موج $\psi_۱$ و $\psi_۲$ در $|\psi|^۲$ ظاهر می‌شود.

www.arsanjan.blogfa.com

توجه کنید که سمت راست ۳ـ۹ درست همان چیزی است که در بررسی برهم‌نهش امواج می‌بینیم. در واقع، این خطی بودن توابع موج است که باعث نقش تداخلی می‌شود که ناشی از وجود کسینوس در این رابطه است، و وقتی از "رفتار موجی" الکترونها یا فوتونها صحبت می‌کنیم بیش از هر چیز منظور همین خطی بودن است.

جریان احتمال

اکنون نشان می‌دهیم که شرط ۳ـ۶، که در $t = ۰$ تحمیل شده است، در همهٔ زمانها برقرار است. باید از رابطهٔ ۳ـ۱ و همیوغ مختلط آن

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^۲}{۲m}\,\frac{\partial^۲\psi^*(x,t)}{\partial x^۲} \qquad (۱۰\text{ـ}۳)$$

در مشتق زمانی چگالی جاگذاری کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) &= \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi + \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\\ &= \frac{۱}{i\hbar}\left(\frac{\hbar^۲}{۲m}\,\frac{\partial^۲\psi^*}{\partial x^۲}\psi - \frac{\hbar^۲}{۲m}\psi^*\frac{\partial^۲\psi}{\partial x^۲}\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\hbar}{۲im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)\right]\end{aligned}$$

اگر شار (یا معادل آن، جریان احتمال) را با رابطهٔ زیر تعریف کنیم

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{۲im}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right) \qquad (۱۱\text{ـ}۳)$$

می‌بینیم که

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = ۰ \qquad (۱۲\text{ـ}۳)$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} dx\; P(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) = ۰ \qquad (۱۳\text{ـ}۳)$$

www.arsanjan.blogfa.com

زیرا برای توابع انتگرال‌پذیر مجذوری $j(x,t)$ در بینهایت صفر می‌شود. در ضمن، اگر ناپیوستگیهایی برای $\psi(x)$ در نظر می‌گرفتیم به تکینگیهایی به‌صورت تابع دلتا[۲] در شار، و در نتیجه در چگالی احتمال، می‌رسیدیم که برای یک کمیت فیزیکی مشاهده‌پذیر قابل قبول نیست.

رابطهٔ ۳ـ۱۲ یک قانون پایستگی است، و این واقعیت را بیان می‌کند که هر تغییری در چگالی در ناحیه‌ای از x با تغییری در شار خالص به درون این ناحیه جبران می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_a^b dx\, P(x,t) &= -\int_a^b dx\frac{\partial}{\partial x}j(x,t) \\ &= j(a,t)-j(b,t)\end{aligned} \tag{۱۴ـ۳}$$

اگر معادلهٔ ۳ـ۱ را به‌صورت زیر بنویسیم

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi(x,t) \tag{۱۵ـ۳}$$

تعریف $P(x,t)$ و $j(x,t)$ و قانون پایستگی بالا برقرار می‌مانند به‌شرط اینکه $V(x)$ حقیقی باشد. این نتیجه مهم است، زیرا چنانکه بعداً نشان خواهیم داد، ۳ـ۱۵ معادلهٔ شرودینگر برای ذره در پتانسیل $V(x)$ است. تعمیم به سه بعد ساده است. معادلهٔ ۳ـ۱۵ تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{\partial\psi(x,y,z,t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z,t) \\ &\quad + V(x,y,z)\psi(x,y,z,t)\end{aligned}$$

یعنی

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t)+V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r},t) \tag{۱۶ـ۳}$$

و تعمیم معادلهٔ ۳ـ۱۲ عبارت است از

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{r},t)+\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=0 \tag{۱۷ـ۳}$$

که در آن

$$P(\mathbf{r},t)=|\psi(\mathbf{r},t)|^2 \tag{۱۸ـ۳}$$

---

۲. برای بحثی دربارهٔ توابع دلتا به‌پیوست الف مراجعه کنید.

www.arsanjan.blogfa.com

و

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{\hbar}{2im}[\psi^*(\mathbf{r},t)\nabla\psi(\mathbf{r},t) - \nabla\psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)] \qquad (۱۹\_۳)$$

مقادیر انتظاری، و تکانهٔ ذره

با داشتن چگالی احتمال $P(x,t)$، مقادیر انتظاری توابع x را می‌توان محاسبه کرد. به‌طور کلی، داریم

$$\langle f(x)\rangle = \int dx\, f(x)P(x,t) = \int dx\psi^*(x,t)f(x)\psi(x,t) \qquad (۲۰\_۳)$$

این انتگرال تنها وقتی تعریف می‌شود که همگرا باشد. چون دلیل خاصی برای محدود کردن گسترهٔ تابع $f(x)$ که می‌خواهیم مقدار انتظاری آن‌را محاسبه کنیم وجود ندارد، بیان قبل دربارهٔ رفتار تابع موج در بینهایت را تعمیم می‌دهیم: فرض می‌کنیم تابع موج $\psi(x)$ و تمام مشتقهای آن در بینهایت با سرعت کافی صفر می‌شوند تا مشکلی پیش نیاید.

اگر بخواهیم مقدار انتظاری تکانه را محاسبه کنیم رابطهٔ مربوط به $\langle f(x)\rangle$ قابل استفاده نیست زیرا نمی‌دانیم چگونه می‌توان تکانه را برحسب x نوشت. روش زیر را امتحان می‌کنیم: چون به لحاظ کلاسیک داریم

$$p = mv = m\frac{dx}{dt} \qquad (۲۱\_۳)$$

می‌نویسیم

$$\langle p\rangle = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = m\frac{d}{dt}\int dx\; \psi^*(x,t)x\psi(x,t) \qquad (۲۲\_۳)$$

یا

$$\langle p\rangle = m\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial t}x\psi + \psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$$

توجه کنید که dx/dt زیر انتگرال وجود ندارد. تنها کمیتی که با زمان تغییر می‌کند $\psi(x,t)$ است، و همین تغییر ψ است که باعث تغییر $\langle x\rangle$ با زمان می‌شود. با استفاده از ۳ـ۱ و همیوغ مختلط آن، به‌دست می‌آوریم

$$\langle p\rangle = \frac{\hbar}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}x\psi - \psi^* x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)$$

www.arsanjan.blogfa.com

اما

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x^2}x\psi =&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi\right)-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ =&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi\right)-\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\psi)+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}\\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi^* x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\end{aligned}$$

بنابراین، انتگرالده به‌صورت زیر است

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x}x\psi-\psi^* x\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi^*\psi\right)+2\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

و در نتیجه

$$\langle p\rangle=\int dx\ \psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

زیرا انتگرال مشتقهای توابع انتگرال‌پذیر مجذوری صفر می‌شود.

از ۳ـ۲۳ نتیجه می‌گیریم که تکانه با عملگر زیر نمایش داده می‌شود

$$p=\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial x} \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

با پذیرفتن این نتیجه، به نتیجهٔ کلی‌تر زیر می‌رسیم

$$\langle f(p)\rangle=\int dx\ \psi^*(x,t)f\left(\frac{\hbar}{i}\ \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x,t) \qquad (۳\text{-}۲۵)$$

بنابراین، به‌عنوان مثال داریم

$$\langle p^2\rangle=\int dx\ \psi^*(x,t)\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x,t)$$

www.arsanjan.blogfa.com

تابع موج در فضای تکانه

با این نمایش اکنون می‌توان دربارهٔ معنای فیزیکی $\phi(p)$، که در ۳ـ۲ ظاهر می‌شود، بحث کرد. ابتدا متذکر می‌شویم که کافی است این معادله را تنها در $t = ۰$ در نظر بگیریم، زیرا $\phi(p)$ وابستگی زمانی ندارد. با

$$\psi(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi h}} \int dp\ \phi(p) e^{ipx/h} = \sqrt{\frac{h}{۲\pi}} \int dk\ \phi(hk) e^{ikx}$$

و با استفاده از فرمول وارون انتگرال فوریه، به‌دست می‌آوریم

$$\phi(hk) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi h}} \int dx\ \psi(x) e^{-ikx}$$

یا

$$\phi(p) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi h}} \int dx\ \psi(x) e^{-ipx/h} \qquad (۳\text{ـ}۲۶)$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} \int dp\ \phi^*(p)\phi(p) &= \int dp\ \phi^*(p) \frac{۱}{\sqrt{۲\pi h}} \int dx\ \psi(x) e^{-ipx/h} \\ &= \int dx\ \psi(x) \frac{۱}{\sqrt{۲\pi h}} \int dp\ \phi^*(p) e^{-ipx/h} \qquad (۳\text{ـ}۲۷) \\ &= \int dx\ \psi(x)\psi^*(x) = ۱ \end{aligned}$$

این نتیجه در ریاضیات قضیهٔ پارسوال نامیده می‌شود. بنابه این قضیه، اگر تابعی به ۱ بهنجار شده باشد تبدیل فوریهٔ آن نیز چنین است.

www.arsanjan.blogfa.com

اکنون می‌نویسیم

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= \int dx\, \psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d\psi(x)}{dx}\\ &= \int dx\, \psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, \phi(p)e^{ipx/\hbar}\\ &= \int dp\, \phi(p)p\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dx\, \psi^*(x)e^{ipx/\hbar}\\ &= \int dp\, \phi(p)p\phi^*(p)\end{aligned} \qquad (۳\_۲۸)$$

این نتیجه، همراه با ۳ـ۲۷، به‌وضوح نشان می‌دهد که $\phi(p)$ را باید تابع موج در فضای تکانه تعبیر کرد، و از این‌رو $|\phi(p)|^2$ چگالی احتمال یافتن ذره با تکانهٔ p را به‌دست می‌دهد. اگر $\psi(x,t)$ جواب معادلهٔ ۳ـ۱۵ باشد، می‌توان $\phi(p,t)$ را با رابطهٔ زیر تعریف کرد

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dp\, \phi(p,t)e^{ipx/\hbar} \qquad (۳\_۲۹)$$

این واقعیت که به‌طورکلی $\phi(p,t)$ دارای وابستگی زمانی است رابطه‌های ۳ـ۲۷ و ۳ـ۲۸ یا تعبیر آن‌را تغییر نمی‌دهد. برای اینکه این توهم پیش نیاید که با وجود تقارنی که میان فضاهای x و p، $p = (\hbar/i)(\partial/\partial x)$ عملگر است اما x عملگر نیست، متذکر می‌شویم که x هم در واقع یک عملگر است اما اتفاقاً صورت کاملاً ساده‌ای در فضای x دارد. برای محاسبهٔ $\langle f(x)\rangle$ در فضای تکانه، می‌توان با روشی بسیار شبیه به روش بالا نشان داد که

$$\langle x\rangle = \int dp\, \psi^*(p,t)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\phi(p,t) \qquad (۳\_۳۰)$$

به‌عبارت دیگر، نمایش عملگر x در فضای تکانه به‌صورت زیر است

$$x = i\hbar\frac{\partial}{\partial p} \qquad (۳\_۳۱)$$

مثال زیر بعضی از محاسبات را برای یک تابع موج خاص $\psi(x)$ روشن می‌کند.

مثال: ذره‌ای را در نظر بگیرید که تابع موج بهنجارشدهٔ آن عبارت است از

$$\begin{aligned}\psi(x) &= 2\alpha\sqrt{\alpha}\, xe^{-\alpha x} & x > 0\\ &= 0 & x < 0\end{aligned}$$

www.arsanjan.blogfa.com

(الف) چگالی احتمال $P(x) = |\psi(x)|^۲$ به‌ازای چه مقداری از x بیشینه می‌شود؟

(ب) مقادیر $\langle x \rangle$ و $\langle x^۲ \rangle$ را محاسبه کنید.

(ج) احتمال وجود ذره در بازهٔ $x = ۰$ تا $x = ۱/\alpha$ را به‌دست آورید.

(د) تابع $\phi(p)$ را تعیین کنید و با استفاده از آن $\langle p \rangle$ و $\langle p^۲ \rangle$ را به‌دست آورید.

(الف) چگالی احتمال $P(x)$ جایی بیشینه است که $dP(x)/dx = ۰$:

$$\frac{d}{dx}(x^۲ e^{-۲\alpha x}) = ۲x(۱ - \alpha x)e^{-۲\alpha x} = ۰$$

یعنی در $x = ۱/\alpha$.

(ب)

$$\langle x \rangle = \int_۰^\infty dx\ x(۴\alpha^۳ x^۲ e^{-۲\alpha x}) = \frac{۱}{۴\alpha}\int_۰^\infty dy\ y^۳ e^{-y} = \frac{۳!}{۴\alpha} = \frac{۳}{۲\alpha}$$

$$\langle x^۲ \rangle = \int_۰^\infty dx\ x^۲(۴\alpha^۳ x^۲ e^{-۲\alpha x}) = \frac{۴!}{۸\alpha^۲} = \frac{۳}{\alpha^۲}$$

(ج) احتمال مزبور برابر است با

$$P = \int_۰^{۱/\alpha} dx(۴\alpha^۳)x^۲ e^{-۲\alpha x} = \frac{۱}{۲}\int_۰^۲ dy\ y^۲ e^{-y} = ۰/۳۲$$

(د)

$$\phi(p) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\int_۰^\infty dx\ e^{-ipx/\hbar}(۲\alpha\sqrt{\alpha})xe^{-\alpha x}$$
$$= \sqrt{\frac{۴\alpha^۳}{۲\pi\hbar}}\ \frac{d}{d\alpha}\int_۰^\infty dx\ e^{-(\alpha+ip/\hbar)x} = -\sqrt{\frac{۴\alpha^۳}{۲\pi\hbar}}\ \frac{۱}{(\alpha + ip/\hbar)^۲}$$

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^\infty dp\ p\ |\phi(p)|^۲ = \frac{۴\alpha^۳}{۲\pi\hbar}\int_{-\infty}^\infty dp\frac{p}{(\alpha^۲ + p^۲/\hbar^۲)^۲} = ۰$$

$$\langle p^۲ \rangle = \frac{۴\alpha^۳}{۲\pi\hbar}\int_{-\infty}^\infty dp\frac{p^۲}{(\alpha^۲ + p^۲/\hbar^۲)^۲} = \frac{۸\alpha^۳}{۲\pi\hbar}\int_۰^\infty dp\frac{p^۲}{(\alpha^۲ + p^۲/\hbar^۲)^۲}$$

www.arsanjan.blogfa.com

با تعویض متغیر $p = \hbar\alpha \tan\theta$ داریم

$$\langle p^2 \rangle = \frac{4\alpha^2\hbar^2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta \ \sin^2\theta = \alpha^2\hbar^2$$

معادلهٔ شرودینگر برای ذره در یک پتانسیل

معادلهٔ

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \ \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}$$

را می‌توان با توجه به اتحاد $(\hbar/i)(\partial/\partial x) = p_{\mathrm{op}}$ به‌صورت زیر نوشت

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{p_{\mathrm{op}}^2}{2m}\psi(x,t) \qquad (۳\text{–}۳۲)$$

عملگر طرف راست انرژی ذرهٔ آزاد است. اگر آن‌را به مورد ذره در یک پتانسیل تعمیم دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{p_{\mathrm{op}}^2}{2m} + V(x)\right]\psi(x,t) \qquad (۳\text{–}۳۳)$$

یا به‌طور صریحتر

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \ \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x) \ \psi(x,t) \qquad (۳\text{–}۳۴)$$

این معادله، که تعمیم ۳ـ۱ است، معادلهٔ اساسی مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی است. معادلهٔ شرودینگر، اکنون به‌دست آوردیم، می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H \ \psi(x,t) \qquad (۳\text{–}۳۵)$$

که در آن H عملگر انرژی است. H را عموماً هامیلتونی می‌نامند زیرا صورت عملگری تابع هامیلتون مکانیک کلاسیک است.

www.arsanjan.blogfa.com

خواهیم دید که عملگرها نقشی اساسی در مکانیک کوانتومی دارند، و به موقع خود چیزهای زیادی دربارهٔ ویژگیهای آنها می‌آموزیم. در این جا چند خاصیت مهم را بیان می‌کنیم:

۱. برخلاف اعداد معمولی، عملگرها همیشه جابه‌جا نمی‌شوند. اگر تعریف کنیم

$$[A, B] = AB - BA \tag{۳_۳۶}$$

آنگاه

$$\begin{aligned}[p, x]\psi(x, t) &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} x\psi(x, t) - x\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial x} \\ &= \frac{\hbar}{i}\psi(x, t)\end{aligned} \tag{۳_۳۷}$$

بنابراین، رابطهٔ جابه‌جایی زیر را به‌دست می‌آوریم

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i} \tag{۳_۳۸}$$

این جابه‌جاناپذیری در تبدیل یک تابع کلاسیک $f(x, p)$ به‌صورت عملگری آن ابهام به‌وجود می‌آورد، و این قاعده را می‌پذیریم که $f(x, p)$ باید نسبت به x و p متقارن شود. برای مثال

$$\begin{aligned}xp &\to \frac{۱}{۲}(xp + px) \\ x^{۲}p &\to \frac{۱}{۴}(x^{۲}p + ۲xpx + px^{۲})\end{aligned} \tag{۳_۳۹}$$

و غیره. بعداً خواهیم دید که رابطهٔ عدم قطعیت میان x و p ناشی از همین جابه‌جاناپذیری این دو متغیر است.

۲. وجود i در عملگر p ممکن است باعث تردید دربارهٔ حقیقی بودن مقدار انتظاری p شود. اما می‌توان وارسی کرد که $\langle p\rangle$ حقیقی است. داریم

$$\begin{aligned}\langle p\rangle - \langle p\rangle^* &= \int dx\, \psi^*(x)\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \int dx\, \psi(x) \left(-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\hbar}{i}\int dx \left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right) \\ &= \frac{\hbar}{i}\int dx\frac{\partial}{\partial x}(\psi^*\psi) \\ &= ۰\end{aligned} \tag{۳_۴۰}$$

www.arsanjan.blogfa.com

و این به‌شرطی است که تابع موج در بینهایت صفر شود، که برای هر تابع انتگرال‌پذیر مجذوری صدق می‌کند. گاهی از تابعهایی استفاده می‌کنیم که انتگرال‌پذیر مجذوری نیستند اما شرایط دوره‌ای مشخصی دارند، برای مثال

$$\psi(x) = \psi(x+L) \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

اگر کار را به ناحیهٔ $0 \leq x \leq L$ محدود کنیم آنگاه $(h/i)d/dx$ باز هم دارای مقدار انتظاری حقیقی است، زیرا در ۳-۴۰ داریم

$$\begin{aligned}\langle p\rangle - \langle p\rangle^* &= \frac{h}{i}\int_0^L dx \frac{\partial}{\partial x}(\psi^*(x)\psi(x)) \\ &= \frac{h}{i}|\psi(L)|^2 - \frac{h}{i}|\psi(0)|^2 = 0\end{aligned} \qquad (۴۲\text{-}۳)$$

عملگری که برای تمام توابع موج قابل قبول دارای مقدار انتظاری حقیقی است عملگر هرمیتی نامیده می‌شود، و از این‌رو p نیز مانند x یک عملگر هرمیتی است.[۳] همچنین p^2 یک عملگر هرمیتی است،[۴] و اگر $V(x)$ حقیقی باشد هامیلتونی نیز هرمیتی است:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \qquad (۴۳\text{-}۳)$$

به‌طور خلاصه:

۱. وابستگی زمانی تابع موج با معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول زیر داده می‌شود

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\ \psi(x,t) \qquad (۴۴\text{-}۳)$$

که در آن H عملگر $p^2/2m + V(x)$ است.

۲. تابعهای موج به تابعهای انتگرال‌پذیر مجذوری محدود می‌شوند.

۳. چگالی احتمال برای یافتن ذره در x عبارت است از

$$P(x,t) = |\psi(x,t)|^2 \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

---

۳. مختصری از مبانی ریاضی عملگرها در پیوست ب بیان شده است.

۴. از این پس عملگر تکانه را با p (بدون شاخص op) نشان می‌دهیم مگر در مواردی که امکان اشتباه با کمیت p وجود داشته باشد.

www.arsanjan.blogfa.com

۴. تابع $\phi(p,t)$ که در رابطهٔ زیر وارد می‌شود

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\ \phi(p,t) e^{ipx/\hbar} \qquad (۳\text{-}۴۶)$$

تابع موج در فضای تکانه است، و چگالی احتمال برای یافتن ذره‌ای با تکانهٔ p برابر است با $|\phi(p,t)|^2$.

۵. تکانهٔ p و مکان x عملگر هستند، یعنی کمیتهایی هستند که چون با هم جابه‌جا نمی‌شوند با اعداد تفاوت دارند. در فضای x، عملگر تکانه به‌صورت زیر است

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \qquad (۳\text{-}۴۷)$$

و در فضای p، صورت عملگر x عبارت است از

$$x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \qquad (۳\text{-}۴۸)$$

و هر دو با رابطهٔ جابه‌جایی اساسی زیر سازگار هستند

$$[p,x] = \frac{\hbar}{i} \qquad (۳\text{-}۴۹)$$

اکنون برای بررسی کمی مکانیک کوانتومی آمادگی داریم. مفهوم بستهٔ موج به عنوان نمایشگر ذره را کنار گذاشته‌ایم. این مفهوم در موجه کردن معادلهٔ شرودینگر مفید بود، اما اکنون این $\psi(x,t)$ و تعبیر احتمالاتی آن است که می‌گوید ذره کجا هست، بدون اینکه ذره "متشکل از امواج" در نظر گرفته شود.

مسائل

۳_۱ با محاسبهٔ صریح نشان دهید

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x) x \psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\ \phi^*(p) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \right) \phi(p)$$

[راهنمایی: رفتار $\phi(p)$ را در $p = \pm\infty$ در نظر بگیرید.]

۳_۲ نشان دهید قانون پایستگی ۳_۱۱، که در آن $\psi(x,t)$ جواب معادلهٔ شرودینگر ۳_۱۵ با

www.arsanjan.blogfa.com

پتانسیل $V(x)$ است، وقتی برقرار است که $V(x)$ حقیقی باشد.

۳ـ۳ فرض کنید $V(x)$ مختلط است. رابطه‌ای برای $\partial P(x,t)/\partial t$ و $(d/dt)\int dx P(x,t)$ به‌دست آورید. برای جذب، کمیت دوم باید منفی باشد. از اینجا چه نتیجه‌ای دربارهٔ $V(x)$ می‌گیرید؟

۴ـ۳ فرض کنید

$$\psi(x) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} e^{-\alpha x^2/2}$$

(الف) مقدار $\langle x^n \rangle$ را برای nهای زوج محاسبه کنید. (چرا $\langle x^n \rangle$ برای nهای فرد صفر می‌شود؟)

(ب) بعداً خواهیم دید که در مکانیک کوانتومی عدم قطعیت در مکان را می‌توان با رابطهٔ $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ توصیف کرد. Δx را برای تابع موج داده شده به‌دست آورید.

۵ـ۳ (الف) تابع $\phi(p)$ را برای دستگاهی که با تابع موج مسئلهٔ ۳ـ۴ توصیف می‌شود محاسبه کنید.

(ب) مقدار $\langle p^n \rangle$ را محاسبه کنید و نشان دهید که به‌ازای nهای فرد صفر می‌شود.

(ج) با فرض اینکه عدم قطعیت در تکانه با $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ داده می‌شود، Δp را به‌دست آورید.

(د) با استفاده از نتیجهٔ بالا و مقدار Δx که در مسئلهٔ ۳ـ۴ محاسبه کرده‌اید مقدار حاصلضرب $\Delta p \, \Delta x$ را تعیین کنید.

۶ـ۳ مقادیر $\langle x \rangle$، $\langle x^2 \rangle$ و Δx، و همچنین $\langle p \rangle$، $\langle p^2 \rangle$ و Δp، را برای دستگاهی محاسبه کنید که با تابع‌موج بهنجارشدهٔ زیر توصیف می‌شود

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2a^3}{\pi}} \, \frac{1}{x^2 + a^2}$$

با استفاده از این نتیجه‌ها، $\Delta x \, \Delta p$ را به‌دست آورید.

[تذکر: با استفاده از انتگرالهای پربندی می‌توان نشان داد

$$\varphi(p) = \sqrt{\frac{a}{\hbar}} e^{-a|p|/\hbar}$$

از این نتیجه، یا

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2 + a^2} = \pi (a^2)^{-1/2}$$

www.arsanjan.blogfa.com

(و مشتقهای آن نسبت به $a^۲$) می‌توان برای محاسبهٔ انتگرالها استفاده کرد.]

۳ـ۷ مقادیر $\langle p \rangle$ و $\langle p^۲ \rangle$ را برای تابع موج $\psi(x) = R(x)e^{iS(x)/\hbar}$، که در آن $R(x)$ و $S(x)$ توابع حقیقی از x هستند، به‌دست آورید.

۳ـ۸× نشان دهید رابطهٔ عملگری زیر برقرار است

$$e^{ipa/\hbar}xe^{-ipa/\hbar} = x + a$$

عملگر e^A با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$e^A = \sum_{n=\circ}^{\infty} A^n/n!$$

[راهنمایی: $e^{ipa/\hbar}xe^{-ipa/\hbar}f(p)$ را، که در آن $f(p)$ یک تابع اختیاری از p است، محاسبه کنید و نمایش $x = ih\, d/dp$ را به‌کار ببرید.]

۳ـ۹ $\psi(\theta)$ را که تابعی از متغیر زاویه‌ای θ است و به بازهٔ $-\pi \le \theta \le \pi$ محدود می‌شود در نظر بگیرید. اگر شرط $\psi(\pi) = \psi(-\pi)$ برقرار باشد، نشان دهید عملگر

$$L = \frac{\hbar}{i}\,\frac{d}{d\theta}$$

دارای مقدار انتظاری حقیقی است.

۳ـ۱۰ $\phi(p)$ را که تابع موج یک ذره در فضای تکانه است در نظر بگیرید. اگر $\phi(p)$ تنها برای مقادیر مثبت p تعریف شده باشد، این تابع باید چه شرایطی را برآورده کند تا مقدار انتظاری x حقیقی باشد؟ (از ۳ـ۳۱ استفاده کنید.)

www.arsanjan.blogfa.com

۴

ویژه‌تابعها و ویژه‌مقدارها

معادلهٔ شرودینگر وابسته به زمان را که در فصل ۳ به‌دست آوردیم در نظر بگیرید:

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t) \qquad (۴\_۱)$$

این معادله را با تبدیل به یک جفت معادلهٔ دیفرانسیل معمولی برحسب یک متغیر می‌توان حل کرد. می‌نویسیم

$$\psi(x,t) = T(t)u(x) \qquad (۴\_۲)$$

که ایجاب می‌کند

$$i\hbar u(x)\frac{dT(t)}{dt} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} + V(x)u(x)\right] T(t)$$

با تقسیم بر $u(x)\,T(t)$ به‌دست می‌آوریم

$$i\hbar\frac{dT(t)/dt}{T(t)} = \frac{-(\hbar^2/2m)(d^2u(x)/dx^2) + V(x)u(x)}{u(x)} \qquad (۴\_۳)$$

www.arsanjan.blogfa.com

این معادله تنها در صورتی صادق است که هر دو طرف آن برابر با یک مقدار ثابت باشند که آن‌را E می‌نامیم. جواب معادلهٔ

$$ih\frac{dT(t)}{dt} = ET(t) \qquad (۴\_۴)$$

عبارت است از

$$T(t) = Ce^{-iEt/h} \qquad (۵\_۴)$$

که در آن C یک ثابت است. معادلهٔ دیگر به‌صورت زیر است

$$-\frac{h^۲}{۲m}\frac{d^۲u(x)}{dx^۲} + V(x)u(x) = Eu(x) \qquad (۶\_۴)$$

این معادله را غالباً معادلهٔ شرودینگر مستقل از زمان می‌نامند، و دارای سرشتی کاملاً متفاوت از معادلهٔ ۴_۱ است. معادلهٔ ۴_۱ تحول زمانی $\psi(x,t)$ را توصیف می‌کند؛ ۴_۶ یک معادلهٔ ویژه‌مقداری است.

معادله‌های ویژه‌مقداری

بحث معادله‌های ویژه‌مقداری به بررسی دقیقتر عملگرها، که در فصل قبل ارائه شد، نیاز دارد. به‌طور کلی، عملگری که روی یک تابع عمل می‌کند آن‌را به تابع دیگری تبدیل می‌کند. چند مثال زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
Of(x) &= f(x) + x^۲ \\
Of(x) &= [f(x)]^۲ \\
Of(x) &= f(۳x^۲ + ۱) \\
Of(x) &= [df(x)/dx]^۳ \\
Of(x) &= df(x)/dx - ۲f(x) \\
Of(x) &= \lambda f(x)
\end{aligned} \qquad (۷_۴)$$

تمام این مثالها در این خاصیت با هم مشترک هستند که با فرض معلوم بودن تابع $f(x)$ قاعده‌ای داریم که $Of(x)$ را تعیین می‌کند. ردهٔ خاصی از عملگرها وجود دارند که عملگرهای خطی

www.arsanjan.blogfa.com

نامیده می‌شوند (این عملگرها را با L نشان می‌دهیم تا آنها را از عملگرهای عام O متمایز کنیم). عملگرهای خطی این خاصیت را دارند که

$$L[f_1(x) + f_2(x)] = Lf_1(x) + Lf_2(x) \tag{۸ـ۴}$$

و، به‌ازای عدد مختلط اختیاری c،

$$Lcf(x) = cLf(x) \tag{۹ـ۴}$$

بنابراین، در چند مثال بالا عملگرهای سوم، پنجم و ششم خطی هستند.

یک عملگر خطی یک تابع را به تابع دیگری تبدیل می‌کند، برای مثال،

$$Lf(x) = \frac{df(x)}{dx} - 2f(x)$$

آموزنده است که تابعها را مانستهٔ بردارهای فضای سه‌بعدی در نظر بگیریم. در اینجا کار یک عملگر تبدیل یک بردار به بردار دیگری است. در مورد خاصی که تمام بردارها دارای طول واحد هستند، یک عملگر یک نقطه روی کرهٔ واحد را به نقطهٔ دیگری روی این کره تبدیل می‌کند. در این مثال خاص (و بسیار مناسب)، عملگر می‌تواند چرخش حول یک محور باشد. فرض کنید عملگر مزبور چرخشی به‌اندازهٔ مثلاً 30° حول محور z است. به‌آسانی می‌توان دید که برای بردارهای مختلف تحت این عمل چه روی می‌دهد (شکل ۴ـ۱). دو بردار با ویژگی خاص وجود دارند: بردارهای یکه به سمت قطبهای شمال و جنوب تحت این چرخش به خودشان تبدیل می‌شوند. این یک مثال خاص از یک معادلهٔ عملگری مانند ۴ـ۶ است، که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

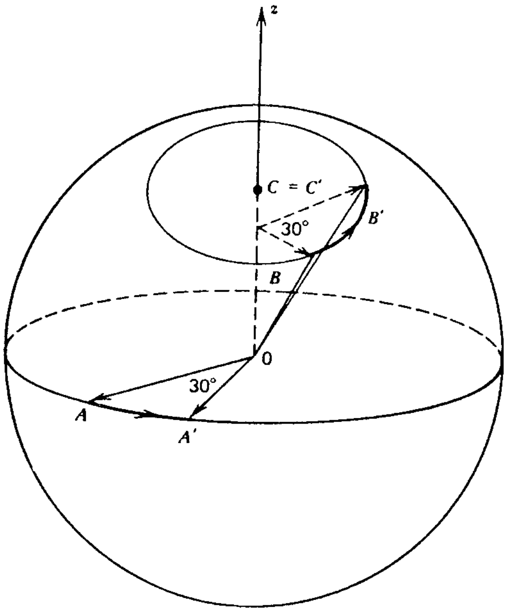
$$Hu_E(x) = Eu_E(x) \tag{۱۰ـ۴}$$

بنابه این معادله، وقتی هامیلتونی H روی ردهٔ خاصی از تابعها عمل می‌کند، دوباره همان تابعی که روی آن عمل کرده است را می‌دهد که در یک مقدار ثابت ضرب شده است. این مقدار ثابت را ویژه‌مقدار می‌نامند. جواب معادله به E بستگی دارد، و از این‌رو آن‌را با E نشانگذاری کرده‌ایم. این جواب $u_E(x)$ را ویژه‌تابع عملگر H، مربوط به ویژه‌مقدار E، می‌نامند. چنانکه خواهیم دید، ویژه‌مقدارها می‌توانند گسسته باشند یا یک پیوستار تشکیل دهند.

مثال: مسئلهٔ ویژه‌مقداری $Lf(x) = \lambda f(x)$ را حل کنید که در آن، در ناحیهٔ $-a \le x \le a$، داریم

$$Lf(x) = \frac{h}{i}\,\frac{df(x)}{dx} - \beta x f(x)$$

 www.arsanjan.blogfa.com



شکل۴ـ۱ نمایش عملگری که تمام بردارهای واقع بر کرهٔ واحد را °۳۰ می‌چرخاند: برای بردارهای روی استوا ($A \rightarrow A'$)، در یک عرض میانه ($B \rightarrow B'$)، و در قطب ($C \rightarrow C' = C$).

و شرط مرزی $f(a) = f(-a)$ برقرار است

حل: این معادله را می‌توان به‌صورت زیر درآورد

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{i}{\hbar}(\beta x + \lambda) f(x)$$

یا

$$\frac{df}{f} = \frac{i}{\hbar}(\beta x + \lambda) dx$$

جواب عبارت است از

$$\ln f(x) = \frac{i}{\hbar}(\beta x^۲/۲ + \lambda x) + \text{const.}$$

یا

$$f(x) = A\, e^{i\beta x^۲/۲\hbar + i\lambda x/\hbar}$$

شرط $f(a) = f(-a)$ ایجاب می‌کند که $e^{i\lambda a} = e^{-i\lambda a}$ یا $e^{۲i\lambda a} = ۱$. بنابراین، ویژه‌مقدارها با رابطهٔ زیر داده می‌شوند
www.arsanjan.blogfa.com

$$\lambda = \pm \frac{n\pi}{a} \qquad (n = ۰, ۱, ۲, ۳, \dots)$$

جواب ۴ـ۲ به‌صورت $u_E(x) e^{-iEt/h}$ است. چون معادلهٔ ۴ـ۱ خطی است، مجموعی از این نوع جوابها، مربوط به مقادیر مجاز E، باز هم یک جواب است. بنابراین، عمومی‌ترین جواب معادلهٔ ۴ـ۱ عبارت است از

$$\psi(x,t) = \sum_n C_n \, u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} + \int dE \; C(E) u_E(x) e^{-iEt/h} \qquad (۴\text{ـ}۱۱)$$

که در آن $u_n(x)$ها مجموعهٔ کامل ویژه‌تابعهای مربوط به ویژه‌مقدارهای گسستهٔ E_n و $u_E(x)$ها ویژه‌تابعهای مربوط به ویژه‌مقدارهای پیوستهٔ E هستند. C_nها ثابتهای اختیاری و $C(E)$ها تابعهای اختیاری از E هستند. این ضرایب به این قید وابسته‌اند که $\psi(x,t)$ باید انتگرال‌پذیر مجذوری باشد.

ویژه‌مقدارهای عملگر H را ویژه‌مقدارهای انرژی می‌نامند، و دلیل آن‌را می‌توان از تعریف زیر استنباط کرد

$$H = \frac{p_{\text{op}}^۲}{۲m} + V(x) \qquad (۴\text{ـ}۱۲)$$

قبل از بررسی یک مثال بسیار ساده اما آموزنده، متذکر می‌شویم که اگر پتانسیل V تابع صریحی از زمان باشد نمی‌توان معادله را جداسازی کرد. بعداً خواهیم دید که در این مورد انرژی یک ثابت حرکت نیست.

مسئلهٔ ویژه‌مقداری برای ذره در جعبه

۴ـ۶ را با پتانسیل زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty \qquad & x < ۰ \\ &= ۰ & ۰ < x < a \\ &= \infty & a < x \end{aligned} \qquad (۴\text{ـ}۱۳)$$

از ۴ـ۶ دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} u(x) &= ۰ \qquad & x < ۰ \\ &= ۰ & a < x \end{aligned} \qquad (۴\text{ـ}۱۴)$$

و داخل چاه، که در آن $V(x) = 0$، معادلهٔ ۴ـ۶ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

www.arsanjan.blogfa.com

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}u(x) = 0 \tag{۴ـ۱۵}$$

ابتدا توجه کنید که اگر $E < 0$، این معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \kappa^2 u(x) = 0$$

که در آن $\kappa^2 = 2m|E|/\hbar^2$. عمومی‌ترین جواب یک ترکیب خطی از $e^{\kappa x}$ و $e^{-\kappa x}$ است، و در حالی‌که $\sinh \kappa x$ در $x = 0$ صفر می‌شود در $x = a$ صفر نیست. بنابراین، E نمی‌تواند منفی باشد. با Eی مثبت و نمادنگاری

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \tag{۴ـ۱۶}$$

معادلهٔ ۴ـ۱۵ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + k^2u(x) = 0 \tag{۴ـ۱۷}$$

عمومی‌ترین جواب به‌صورت $A \sin kx + B \cos kx$ است، اما از شرط $u(0) = 0$ نتیجه می‌گیریم که جواب تنها عبارت است از

$$u(x) = A \sin kx \tag{۴ـ۱۸}$$

شرط $u(a) = 0$ ایجاب می‌کند که

$$ka = n\pi \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۴ـ۱۹}$$

بنابراین، ویژه‌مقدارهای انرژی با رابطهٔ زیر داده می‌شوند

$$E_n = \frac{\hbar^2k^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۴ـ۲۰}$$

به‌سادگی می‌توان دید که جوابها به‌ازای $A = \sqrt{2/a}$ بهنجار شده‌اند:

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \tag{۴ـ۲۱}$$

www.arsanjan.blogfa.com

این جوابها دارای این ویژگی هستند که

$$\int_0^a dx\, u_n^*(x) u_m(x) = \int_0^a dx \frac{2}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}$$
$$= \frac{1}{a}\int_0^a dx\, \left\{\cos\frac{(n-m)\pi x}{a} - \cos\frac{(n+m)\pi x}{a}\right\}$$
$$= \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi} - \frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m)\pi} \qquad (۲۲\text{-}۴)$$
$$= 0 \quad \text{،} \quad n \neq m \quad \text{به‌ازای}$$
$$= 1 \quad \text{،} \quad n = m \quad \text{به‌ازای}$$

این نتیجه که

$$\int_0^a dx\, u_n^*(x) u_m(x) = \delta_{mn} \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

نشان می‌دهد ویژه‌تابعهای مربوط به ویژه‌مقدارهای مختلف متعامد هستند. اگر ویژه‌تابعها درست بهنجار شده باشند، چنانکه در اینجا هستند، ۴ـ۲۳ را شرط راست‌هنجاری می‌نامند. چون جوابهای بالا حقیقی‌اند، همیوغ‌گیری مختلط در این معادله واقعاً لازم نیست، اما آن‌را برای سازگاری با بیان عامتر درج کرده‌ایم که وقتی به‌کار می‌رود که ویژه‌تابعها مختلط سستند. این مورد را در فصل ۶ نشان می‌دهیم.

بعضی اطلاعات فیزیکی را می‌توان از ویژه‌جوابها به‌دست آورد:

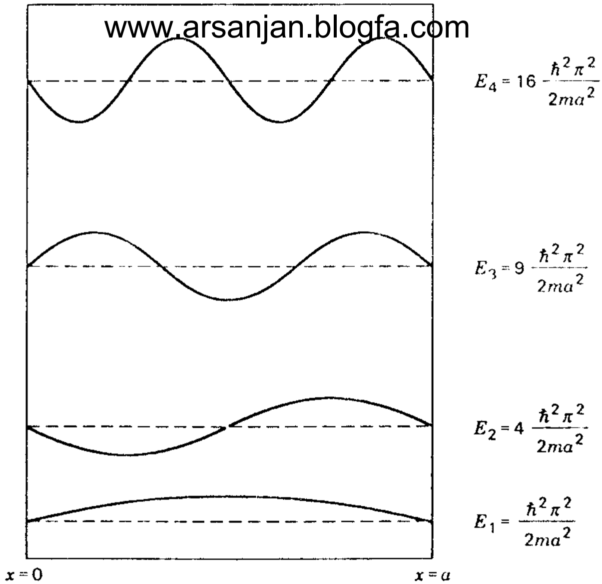
۱. حالت مربوط به کمترین انرژی، حالت پایه، با $u_1(x)$ توصیف می‌شود، و کمترین انرژی برابر است با

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

توجه کنید که از دیدگاه کلاسیک کمترین انرژی باید مربوط به ذرهٔ ساکن در چاه باشد، و با $p = 0$ و $V(x) = 0$ مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل باید صفر باشد. اما در اینجا می‌بینیم یک انرژی کمینه وجود دارد.

۲. چون جوابها حقیقی هستند داریم

$$\langle p \rangle = 0 \qquad (۲۵\text{-}۴)$$



www.arsanjan.blogfa.com

شکل۴ـ۲ ویژه‌جوابها برای ذره در جعبه.

زیرا به‌ازای هر تابع حقیقی انتگرال $\int dx\, R(x)\hbar/i(dR(x)/dx)$ انگاری است، که این با شرط $\langle p\rangle = \langle p\rangle^*$ ناسازگار است مگر اینکه $\langle p\rangle = 0$. از طرف دیگر، $\langle p^2\rangle$ صفر نمی‌شود. در واقع، چون داخل جعبه داریم $p^2 = 2mE$، به‌ازای ویژه‌تابع $u_n(x)$ به‌دست می‌آوریم

$$\langle p^2\rangle = 2mE_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{a^2} \qquad (۲۶\text{ـ}۴)$$

۳. چنانکه از شکل ۴ـ۲ می‌توان دید، هر چه تعداد گرهها (صفرها) در یک جواب بیشتر باشد انرژی مربوط به آن بیشتر است. این موضوع قابل درک است، زیرا انرژی جنبشی با خمیدگی جوابها زیاد می‌شود. مقدار انتظاری انرژی جنبشی عبارت است از

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int dx\, u^*(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int dx\,\left[\frac{d}{dx}\left(u^*(x)\frac{du(x)}{dx}\right) - \frac{du^*(x)}{dx}\,\frac{du(x)}{dx}\right]\end{aligned} \qquad (۲۷\text{ـ}۴)$$

جملهٔ اول صفر می‌شود زیرا $u(x)$ و مشتقهای آن در بینهایت صفر می‌شوند، و در نتیجه باقی

www.arsanjan.blogfa.com

می‌ماند

$$\langle K\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\int dx \left|\frac{du(x)}{dx}\right|^2 \tag{۴\_۲۸}$$

که اگر $u(x)$ زیاد تغییر کند بزرگ است.

اصل بسط و تعبیر فیزیکی آن

بنابه قضیهٔ فوریه، هر تابع $\psi(x)$ را که برای آن شرایط مرزی $\psi(0) = \psi(a) = 0$ صادق باشند می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\psi(x) = \sum C_n \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{۴\_۲۹}$$

چون ویژه‌تابعهای H برای چاه نامتناهی با $\sin n\pi x/a$ متناسب‌اند، رابطهٔ بالا را برحسب ویژه‌تابعهای $u_n(x)$ می‌نویسیم:

$$\psi(x) = \sum A_n u_n(x) \tag{۴\_۳۰}$$

ضرایب A_n را می‌توان از رابطهٔ راست‌هنجاری ۴ـ۲۳ به‌دست‌آورد. در واقع، داریم

$$\begin{aligned}\int_0^a dx\, u_m^*(x)\psi(x) &= \int_0^a dx\, u_m^*(x) \sum A_n u_n(x)\\ &= \sum A_n \int_0^a dx\, u_m^*(x)u_n(x) = \sum A_n\delta_{mn}\end{aligned}$$

و بنابراین،

$$A_n = \int_0^a dx\, u_n^*(x)\psi(x) \tag{۴\_۳۱}$$

مانند مورد بستهٔ موج آزاد، می‌توان تحول زمانی این تابع‌موج اولیهٔ اختیاری $\psi(x)$ را محاسبه کرد. چون هر یک از ویژه‌تابعهای $u_n(x)$ وابستگی زمانی خاص خود را به‌صورت $e^{-iE_nt/\hbar}$ اختیار می‌کند، رابطهٔ کلی زیر را داریم

$$\psi(x,t) = \sum A_n u_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \tag{۴\_۳۲}$$

www.arsanjan.blogfa.com

می‌توان ویژه‌تابعها را به‌مثابه مجموعهٔ کاملی از بردارهای یکه متعامد $\mathbf{i}_k$ در یک فضای برداری در نظر گرفت. هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به‌صورت $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \cdots$ نوشت، و ضریبهای a_k با استفاده از راست‌هنجاری بردارهای یکه $(\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m = \delta_{km})$ از $a_k = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_k$ به‌دست می‌آیند.

برای تعبیر ضریبهای A_n، مقدار انتظاری انرژی را در یک حالت اختیاری $\psi(x)$ محاسبه می‌کنیم. چون داخل جعبه داریم $H = p^2/2m$ و خارج از آن $\psi(x) = 0$، و از آنجا که

$$Hu_n(x) = E_n u_n(x)$$

به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \langle H \rangle = \int_0^a dx\ \psi^*(x) H \psi(x) &= \int_0^a dx\ \psi^*(x) H \sum A_n u_n(x) \\ &= \sum A_n \int_0^a dx\ \psi^*(x) E_n u_n(x) \qquad (۳۳\_۴) \\ &= \sum E_n |A_n|^2 \end{aligned}$$

علاوه بر این، شرط

$$\int_0^a dx\ \psi^*(x)\psi(x) = 1 \qquad (۳۴\_۴)$$

ایجاب می‌کند که

$$1 = \int_0^a dx\ \psi^*(x) \sum A_n u_n(x) = \sum A_n A_n^* = \sum |A_n|^2 \qquad (۳۵\_۴)$$

از معادلهٔ ۴ـ۳۳ و شرط بهنجارش ۴ـ۳۵ استنباط می‌شود که $|A_n|^2$ که در آن

$$A_n = \int dx\ u_n^*(x)\psi(x) \qquad (۳۶\_۴)$$

باید احتمال اینکه از اندازه‌گیری انرژی برای حالت $\psi(x)$ ویژه‌مقدار E_n به‌دست آید تعبیر کرد. برای تکمیل تعبیر A_n باید این حکم را پذیرفت که تابع‌موج دستگاه، $\psi(x)$، هر چه باشد ویژه‌مقدارهای E_n تنها نتیجه‌های ممکن اندازه‌گیری انرژی هستند.

اگر دستگاه به‌عنوان مثال در ویژه‌حالت $u_k(x)$ باشد آنگاه از اندازه‌گیری انرژی الزاماً E_k به‌دست می‌آید. چون از تکرار اندازه‌گیری باید همان جواب اول به‌دست آید (وگرنه چگونه می‌توان

www.arsanjan.blogfa.com

درستی یک اندازه‌گیری را امتحان کرد؟)، ناچار باید نتیجه گرفت همینکه اندازه‌گیری انرژی روی یک حالت کلی $\psi(x)$ انجام شد، و مقدار E_k به‌دست آمد، این اندازه‌گیری حالت را به $u_k(x)$ تغییر می‌دهد. اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی عملاً یک فرایند دسته‌بندی است. وقتی می‌گوییم دستگاهی با تابع‌موج $\psi(x)$ توصیف می‌شود، مجموعهٔ بزرگی از دستگاههای یکسان (یک مجموعهٔ آماری) را در نظر داریم که همگی با $\psi(x)$ توصیف می‌شوند. اندازه‌گیریهای انرژی روی اعضای این مجموعه تعیین می‌کنند که چند تا از آنها دارای انرژی E_1، چند تا دارای انرژی E_2 هستند، و الی آخر. اندازه‌گیری دستگاهها را به مجموعه‌هایی دسته‌بندی می‌کند که، پس از اندازه‌گیری، دارای توابع موج $u_1(x)$، $u_2(x)$، و غیره هستند.

این حکمها به مسئلهٔ ذره در جعبه منحصر نیستند. آنها برای دستگاههای کلی‌تر با انرژی پتانسیل $V(x)$، و همچنین برای مشاهده‌پذیرهایی (علاوه بر انرژی)، مانند تکانه، تکانهٔ زاویه‌ای، و غیره، صادق‌اند.

مثال: ذره‌ای را در یک جعبه در نظر بگیرید. تابع‌موج ذره به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A(x/a) & 0 < x < a/2 \\ &= A(1 - x/a) & a/2 < x < a \end{aligned}$$

که در آن $A = \sqrt{12/a}$، و در نتیجه $\int_0^a dx |\psi(x)|^2 = 1$. این احتمال را محاسبه کنید که اندازه‌گیری انرژی ویژه‌مقدار E_n را به‌دست دهد.

حل: باید ضریب بسط A_n را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^a dx\ \psi(x) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \\ &= \frac{\sqrt{24}}{a} \left[\int_0^{a/2} dx \left(\frac{x}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a} + \int_{a/2}^a dx \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin\frac{n\pi x}{a} \right] \end{aligned}$$

با تعویض متغیر $\pi x/a = u$ در انتگرال اول و $\pi x/a = \pi - u$ در انتگرال دوم، به‌دست می‌آوریم

$$A_n = \frac{\sqrt{24}}{\pi} \int_0^{\pi/2} du \frac{u}{\pi} \sin nu (1 - (-1)^n)$$

با توجه به عبارت داخل پرانتز، می‌بینیم که A_n به‌ازای nهای زوج صفر می‌شود. انتگرال را می‌توان

www.arsanjan.blogfa.com

به آسانی محاسبه کرد، و در نتیجه تنها به‌ازای nهای فرد داریم

$$A_n = \frac{\sqrt{24}}{\pi} 2 \frac{1}{\pi n^2} (-1)^{n+1}$$

بنابراین،

$$|A_n|^2 = \frac{96}{\pi^4 n^4} \qquad \text{به‌ازای } n \text{ فرد،}$$
$$= 0 \qquad \text{به‌ازای } n \text{ زوج،}$$

با استفاده از این واقعیت که $\sum_{\text{همه}} n^{-4} = \pi^4/90$ و

$$\sum_{\text{همه}} n^{-4} = \sum_{\text{زوج}} n^{-4} + \sum_{\text{فرد}} n^{-4} = \sum_{\text{فرد}} n^{-4} + (1/16) \sum_{\text{همه}} n^{-4}$$

به‌آسانی می‌توان دید که مجموع تمام احتمالها برابر با ۱ است:

$$\frac{96}{\pi^4} \sum_{\text{فرد}} n^{-4} = \frac{96}{\pi^4} \left(1 - \frac{1}{16}\right) \sum_{\text{همه}} n^{-4} = \frac{96}{\pi^4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{\pi^4}{90} = 1$$

ویژه‌تابع تکانه، و ذرهٔ آزاد

عملگر انرژی H تنها عملگری‌نیست که دارای ویژه‌تابع و ویژه‌مقدار است. می‌خواهیم معادلهٔ ویژه‌مقداری برای عملگر تکانه، یعنی معادلهٔ

$$p_{\text{op}} u_p(x) = p u_p(x) \qquad (۴\text{–}۳۷)$$

را حل کنیم. چون $p_{\text{op}} = (h/i)(d/dx)$، این معادله به‌صورت زیر در می‌آید

$$\frac{du_p(x)}{dx} = \frac{ip}{h} u_p(x) \qquad (۴\text{–}۳۸)$$

و جواب آن عبارت است از

$$u_p(x) = C' e^{ipx/h} \qquad (۴\text{–}۳۹)$$

www.arsanjan.blogfa.com

که در آن C ثابتی است که باید با بهنجارش به‌دست آوریم، و ویژه‌مقدار p حقیقی است، که در نتیجه ویژه‌تابع در $+\infty$ یا $-\infty$ نامتناهی نمی‌شود. این تنها قید روی p است: می‌گوییم p_{op} دارای طیف پیوسته است. بنابه تشابه با ۴ـ۲۳، می‌توان انتظار داشت که ویژه‌تابعها از یک شرط راست‌هنجاری پیروی کنند. می‌بینیم که

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_{p'}^*(x) u_p(x) &= |C|^۲ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{i(p-p')x/\hbar} \\ &= ۲\pi |C|^۲ \hbar \delta(p-p')\end{aligned} \qquad (۴۰\text{ـ}۴)$$

با انتخاب

$$u_p(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \qquad (۴۱\text{ـ}۴)$$

۴ـ۴۰ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, u_{p'}^*(x) u_p(x) = \delta(p-p') \qquad (۴۲\text{ـ}۴)$$

تفاوت این نتیجه با ۴ـ۲۳ تنها در آن است که دلتای کرونکر δ_{mn}، که برای شاخصهای گسسته مناسب است، با تابع دلتای دیراک $\delta(p-p')$ برای شاخصهای پیوسته تعویض شده است.

این حکم که هر بستهٔ موج $\psi(x)$ را می‌توان برحسب مجموعهٔ کاملی از ویژه‌تابعها بسط داد در اینجا نیز قابل اثبات است. برای به‌دست آوردن مانستهٔ ۴ـ۳۰، باید در نظر داشت که روی شاخص پیوستهٔ p جمع می‌زنیم، و از این‌رو می‌نویسیم

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\, \phi(p) \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{۲\pi\hbar}} \qquad (۴۳\text{ـ}۴)$$

بنابه تعبیر تلویحی در ۴ـ۳۶، مجذور قدرمطلق

$$\phi(p) = \int dx \left(\frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{۲\pi\hbar}}\right)^* \psi(x) \qquad (۴۴\text{ـ}۴)$$

یعنی $|\phi(p)|^۲$ این احتمال را تعیین می‌کند که از اندازه‌گیری تکانه برای بستهٔ موج اختیاری $\psi(x)$ ویژه‌مقدار p به‌دست آید. بدین‌ترتیب، حدسی که در فصل ۳ دربارهٔ $\phi(p)$ زدیم توجیه می‌شود.

www.arsanjan.blogfa.com

مثال: ذره‌ای در حالت پایهٔ یک جعبه با دیواره‌هایی در $x = 0$ و $x = a$ قرار دارد. دیواره‌های جعبه ناگهان به $\pm\infty$ برده می‌شوند، و در نتیجه ذره آزاد می‌شود. احتمال اینکه ذره تکانه‌ای در بازهٔ $(p, p + dp)$ داشته باشد چقدر است؟ چون ذرهٔ آزاد با تکانهٔ p دارای انرژی $p^2/2m$ است، که لزومی ندارد با انرژی حالت پایه برابر باشد، انرژی پایسته نیست. چگونه این ناپایستگی امکانپذیر است؟

حل: تابع‌موج اولیه به‌صورت زیر است

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} \qquad 0 \le x \le a$$

چنانکه در ۴ـ۴۴ دیدیم، دامنهٔ احتمال اینکه ذره در این حالت دارای تکانهٔ p باشد با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^a dx\, e^{ipx/h} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a}$$

حدود انتگرال از این شرط تعیین شده‌اند که $\psi(x)$ در سمت چپ $x = 0$ و سمت راست $x = a$ صفر است، زیرا دیواره‌ها ابتدا در این دو نقطه قرار دارند. این انتگرال را می‌توان به‌سادگی محاسبه کرد. به‌دست می‌آوریم

$$\phi(p) = -e^{-ipa/2h} \frac{2\pi/a}{\sqrt{\pi h a}} \; \frac{\cos\, pa/2h}{(\pi/a)^2 - (p/h)^2}$$

و در نتیجه

$$|\phi(p)|^2 dp = \frac{4\pi}{ha^3} \; \frac{\cos^2(pa/2h)}{((\pi/a)^2 - (p/h)^2)^2} dp$$

انرژی پایسته نیست زیرا انرژی پتانسیل واقعاً وابسته به زمان است. در واقع، $V(x)$ با انتقال دیواره‌ها از $x = 0$ و $x = a$ به $\pm\infty$ به‌سرعت تغییر می‌کند.

توجه کنید که (۱) وقتی p بسیار بزرگتر از $h\pi/a$ می‌شود احتمال به‌سرعت افت می‌کند، و (۲) چگالی احتمال در $p = h\pi/a$ نامتناهی نمی‌شود زیرا صورت کسر به‌ازای این مقدار صفر می‌شود.

www.arsanjan.blogfa.com

اکنون به هامیلتونی ذرهٔ آزاد برمی‌گردیم. وقتی $V(x)$ همه جا صفر است، معادلهٔ ویژه‌مقداری انرژی به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^{۲}u(x)}{dx^{۲}} + k^{۲}u(x) = ۰ \qquad (۴۵\_۴)$$

که در آن $k^{۲} = ۲mE/\hbar^{۲}$. جوابهای این معادله e^{ikx} و e^{-ikx}، یا ترکیبهای خطی آنها مانند $\cos\, kx$ و $\sin\, kx$، هستند. اشکال همهٔ این جوابها این است که انتگرال‌پذیر مجذوری نیستند، زیرا $\int_{-\infty}^{\infty} dx|Ae^{ikx} + Be^{-ikx}|^{۲}$ به‌ازای تمام مقادیر A و B واگرا است. این مشکل را می‌توان از سه راه رفع کرد:

(الف) می‌توان مسئلهٔ ذره آزاد را حالت حدی مسئلهٔ ذره در جعبه‌ای در نظر گرفت که دیواره‌های آن در بینهایت‌اند. برای حل این مسئله، باید کار مربوط به مسئلهٔ ویژه‌مقداری ذره در جعبه را کمی تغییر دهیم. اگر دیواره‌های جعبه را در $-a/۲$ و $+a/۲$ بگیریم، می‌توانیم با میل دادن a به‌سمت ∞ جعبه را بزرگ کنیم. این کار چندان پیچیده نیست. کافی است مبدأ را به‌اندازهٔ $a/۲$ به‌سمت راست منتقل کنیم، و اگر $x - a/۲$ را به‌جای x در ویژه‌تابعها بگذاریم این انتقال دیواره‌ها تحقق می‌یابد. ویژه‌تابعها اکنون به‌صورت زیر در می‌آیند

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\frac{n\pi(x - a/۲)}{a} \\ &= \sqrt{\frac{۲}{a}}\left\{\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi}{۲} - \cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi}{۲}\right\} \end{aligned} \qquad (۴۶\_۴)$$

به‌ازای n زوج داریم $\cos(n\pi/۲) = (-۱)^{n/۲}$ و $\sin(n\pi/۲) = ۰$. بنابراین، تنها جملهٔ اول باقی می‌ماند، و می‌توان ضریب فاز $(-۱)^{n/۲}$ را حذف کرد. بدین‌ترتیب، ویژه‌تابعها به‌ازای n زوج عبارت‌اند از

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\frac{n\pi x}{a} \qquad (n = ۲, ۴, ۶, \ldots) \qquad (۴۷\_۴)$$

اگر n فرد باشد، به روش مشابه به‌دست می‌آوریم

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}}\cos\frac{n\pi x}{a} \qquad (n = ۱, ۳, ۵, \ldots) \qquad (۴۸\_۴)$$

www.arsanjan.blogfa.com

در حد $a \to \infty$، این ویژه‌تابعها ظاهراً بی‌معنی می‌شوند. در واقع، تمام آنها به‌ازای n متناهی متناظر با انرژیهای زیرند

$$E_n = \frac{\hbar^۲\pi^۲n^۲}{۲ma^۲} \to ۰$$

وقتی $n \to \infty$، جوابهای غیرصفر را تنها در صورتی به‌دست می‌آوریم که کمیت زیر متناهی باشد

$$k = \frac{n\pi}{a} \qquad (۴\text{_}۴۹)$$

در این مورد، جوابها عبارت‌اند از

$$\sqrt{\frac{۲}{a}}\sin\ kx;\ \sqrt{\frac{۲}{a}}\cos\ kx \qquad (۴\text{_}۵۰)$$

که در آنها عامل $۱/\sqrt{a}$ را می‌توان نگه داشت. این عامل در جواب مربوط به هر پرسشی دربارهٔ دستگاه حذف خواهد شد.

(ب) می‌توان با بسته‌های موج کارکرد. جوابی به‌صورت

$$\psi(x) = e^{ikx} \qquad (۴\text{_}۵۱)$$

یک مورد خاص از ۴ـ۴۳ است که در آن

$$\phi(p) = \sqrt{۲\pi\hbar}\ \delta(p - \hbar k) \qquad (۴\text{_}۵۲)$$

که یک توزیع با قلهٔ نامتناهی در فضای تکانه است. فرض کنید به‌جای این توزیع حدی از تابع $\sqrt{۲\pi\hbar}\ g(p - \hbar k)$ که قلهٔ بسیار تیزی دارد استفاده کنیم. آنگاه به‌جای e^{ikx} خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int\ dp\ e^{ipx/\hbar}g(p - \hbar k)\\ &= e^{ikx}\ \int\ dq\ e^{iqx/\hbar}g(q)\end{aligned} \qquad (۴\text{_}۵۳)$$

که یک موج تخت، e^{ikx}، است که در تابع بسیار پهنی از x ضرب شده است. می‌توان این تابع را چنان پهن گرفت که در ناحیهٔ مورد نظر فیزیکی اساساً ثابت باشد. اما عدم قطعیت تکانه از

www.arsanjan.blogfa.com

مرتبهٔ بزرگی $\hbar$ تقسیم بر پهنای بستهٔ موج در فضای x است، و اگر اندازهٔ این پهنا ماکروسکوپیک باشد عدم قطعیت در تکانه قابل چشمپوشی است. بدین‌ترتیب، شرایط ریاضی بدون هیچ‌گونه تغییری در فیزیک مسئله برآورده می‌شوند. این توصیف بستهٔ‌موجی در واقع به آنچه از لحاظ فیزیکی روی می‌دهد از همه نزدیکتر است، زیرا هیچ راهی برای آماده‌سازی حالت اولیه، به‌عنوان مثال شلیک یک تفنگ الکترونی، هرگز نمی‌تواند در عمل یک ویژه‌حالت دقیق تکانه به‌وجود آورد.

(ج) می‌توان مسئله را با توجه به این نکته بررسی کرد که مشکل بهنجارش ناشی از این است که ذره با تابع موجی مانند e^{ikx} نمی‌تواند در هیچ ناحیه‌ای از فضا محبوس باشد، و در نتیجه احتمال یافتن آن همه جا صفر است. اگر به پرسشهایی که متضمن احتمال یافتن ذره در هر ناحیهٔ متناهی هستند نپردازیم، هیچ مشکلی پیش نمی‌آید. یک راه احتراز از مشکل بهنجارش کار کردن با جریان احتمال یا شار

$$j(x) = \frac{\hbar}{۲im}\left[\psi^*(x)\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d\psi^*(x)}{dx}\psi(x)\right] \qquad (۵۴\text{-}۴)$$

است که در اوایل فصل ۳ معرفی کردیم. برای تابع‌موج $Ce^{ipx/\hbar}$، شار برابر است با $|C|^۲p/m$؛ برای تابع‌موج $Ce^{-ipx/\hbar}$، شار برابر است با $-|C|^۲p/m$. با توجه به اینکه در یک مسئلهٔ یک‌بعدی، شار ذرات با چگالی ۱ ذره بر سانتی‌متر که با سرعت $v = p/m$ حرکت می‌کنند ـــ یعنی تعدادی که از یک نقطه مانند $x = x_۰$ در هر ثانیه می‌گذرد ـــ درست برابر با v است، می‌بینیم که $|C|^۲$ نشاندهندهٔ چگالی ذرات بر سانتی‌متر است. بنابراین، ۴ـ۴۱ ذراتی با چگالی $۱/۲\pi\hbar$ بر سانتی‌متر را نمایش می‌دهد.

در سه‌بعد، با

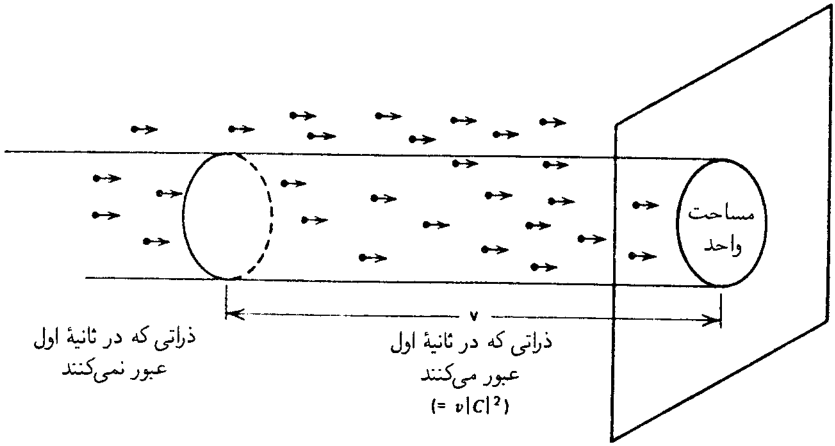
$$u_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = C\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \qquad (۵۵\text{-}۴)$$

شار برابر است با $|C|^۲\mathbf{p}/m$ که به شارش ذراتی مربوط می‌شود که با چگالی $|C|^۲$ بر سانتی‌مترمکعب با سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ از واحد سطح عمود بر $\mathbf{p}$ می‌گذرند (شکل ۴ـ۳).

واگنی

معادلهٔ ویژه‌مقداری انرژی ۴ـ۴۵ دارای دو جواب مستقل e^{ikx} و e^{-ikx} است. همچنین، جفت جوابهای حقیقی $\cos kx$ و $\sin kx$ نیز مستقل از یکدیگرند. هر جفتی که انتخاب کنیم می‌بینیم که، برخلاف مسئلهٔ ذره در جعبه، دو جواب وجود دارند که به یک مقدار انرژی مربوط می‌شوند. این نمونه‌ای است از آنچه غالباً روی می‌دهد: ممکن است بیش از یک ویژه‌تابع مستقل برای یک ویژه‌مقدار عملگر هرمیتی وجود داشته باشند. در چنین مواردی می‌گوییم واگنی داریم.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۴ـ۳ رابطهٔ میان سرعت ذرات و شار، یعنی تعداد ذراتی که از واحد سطح عمود بر سرعت در واحد زمان می‌گذرند.

در دو موردی که قبلاً بیان کردیم، هر دو جفت جواب متعامدند: یعنی به‌ازای $k \neq 0$ داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{-ikx})^* e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ e^{2ikx} = 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \sin\ kx \ \cos\ kx = 0 \tag{۴ـ۵۶}$$

همیشه می‌توان ترکیبهای خطیی ساخت که رابطهٔ تعامد صادق باشد. مستقل از وجود واگنی، ویژه‌تابعهای متناظر با یک انرژی معین $E = \hbar^2 k^2/2m$ بر ویژه‌تابعهای متناظر با یک انرژی دیگر عمودند.

چه چیز دو ویژه‌تابع واگن را از هم متمایز می‌کند؟ برای مجموعهٔ (e^{ikx} و e^{-ikx})، تفاوت در این است که آنها ویژه‌تابعهای عملگر تکانه متناظر با ویژه‌مقدارهای مختلف تکانه هستند:

$$p_{\text{op}} e^{\pm ikx} = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} e^{\pm ikx} = \pm \hbar k \ e^{\pm ikx} \tag{۴ـ۵۷}$$

برای پاسخ به همین پرسش دربارهٔ جوابهای $\sin\ kx$ و $\cos\ kx$، مفهوم پاریته را معرفی می‌کنیم.

پاریته

ویژه‌تابعهای ذرهٔ آزاد $(\sin\ kx, \cos\ kx)$ و همچنین ویژه‌تابعهای ذره در جعبه‌ای بین $-a/2$ تا $+a/2$ که با ۴ـ۴۷ و ۴ـ۴۸ داده شده‌اند، تحت تعویض $x \to -x$ یا زوج هستند یا فرد. ذره را

www.arsanjan.blogfa.com

در جعبه‌ای می‌گیریم که حول $x = 0$ متقارن است. فرض کنید حالت اولیهٔ $\psi(x)$ نسبت به x زوج است. بنابراین، $\psi(x)$ باید به‌صورت زیر باشد

$$\psi(x) = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} \qquad (۵۸\text{–}۴)$$

که در آن جمع روی $n = 1, 3, 5, \ldots$ گرفته می‌شود. در زمانهای بعد این تابع‌موج به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\psi(x,t) = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a} e^{-iE_n t/h} \qquad (۵۹\text{–}۴)$$

یعنی تابع‌موج در زمانهای بعد باز هم نسبت به x زوج است. به‌همین ترتیب، تابع‌موجی که ابتدا فرد است فرد باقی می‌ماند. بنابراین، برای جعبهٔ مزبور که حول $x = 0$ تقارن دارد، زوجیت و فردیت ویژگیهایی مستقل از زمان هستند. می‌توان گفت که زوجبت و فردیت ثابتهای حرکت‌اند. چون هر ثابت حرکتی برای ما مهم است، این بحث را تا اندازه‌ای فرمولبندی می‌کنیم.

این کار را با معرفی عملگر پاریته انجام می‌دهیم که قاعدهٔ عمل آن انعکاس $x \to -x$ است. بنابراین، برای هر تابع‌موج $\psi(x)$ داریم

$$P\psi(x) = \psi(-x) \qquad (۶۰\text{–}۴)$$

در نتیجه، برای تابع‌موج زوج می‌توان نوشت

$$P\psi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(x) \qquad (۶۱\text{–}۴)$$

و برای تابع موج فرد

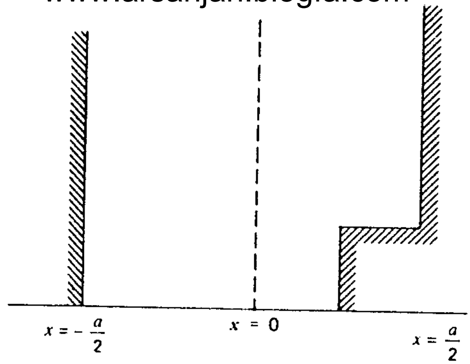
$$P\psi^{(-)}(x) = -\psi^{(-)}(x) \qquad (۶۲\text{–}۴)$$

این دو معادله معادله‌های ویژه‌مقداری‌اند، و آنچه نشان داده‌ایم این است که توابع زوج ویژه‌تابعهای P با ویژه‌مقدار $+1$ و توابع فرد ویژه‌تابعهای P با ویژه‌مقدار -1 هستند. در مسئلهٔ ذره در جعبه، توابع $\cos(n\pi x/a)$ و $\sin(n\pi x/a)$ نه تنها ویژه‌تابعهای H بلکه همزمان ویژه‌تابعهای P نیز هستند.

مقادیر ± 1 تنها ویژه‌مقدارهای ممکن‌اند. فرض کنید

$$Pu(x) = \lambda u(x) \qquad (۶۳\text{–}۴)$$

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۴ـ۴ جعبه‌ای که تحت انعکاس تقارن ندارد.

با اعمال دوبارهٔ P، به‌دست می‌آوریم

$$P^{۲}u(x) = P\lambda u(x) = \lambda^{۲}u(x) \qquad (۶۴\text{ـ}۴)$$

اما $P^{۲}u(x) = u(x)$، زیرا دو انعکاس متوالی نباید چیزی را تغییر دهند. در نتیجه، $۱ = \lambda^{۲}$، یعنی $\lambda = \pm ۱$. هر تابع اختیاری را می‌توان به‌صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت:

$$\psi(x) = \frac{۱}{۲}[\psi(x) + \psi(-x)] + \frac{۱}{۲}[\psi(x) - \psi(-x)] \qquad (۶۵\text{ـ}۴)$$

یعنی، مانند مورد ویژه‌تابعهای H که قبلاً بحث شد، هر تابعی را می‌توان برحسب ویژه‌تابعهای این عملگر جدید بسط داد.

پیدایش صریح زوجیت و فردیت به این دلیل است که جعبه را نسبت به $x = ۰$ متقارن گرفته‌ایم. اگر جعبه را بین ۰ و a گرفته بودیم هیچ چیز تغییر نمی‌کرد، و باز هم تحت انعکاس حول $x = a/۲$ تقارن وجود می‌داشت. اما این نوع تقارن چندان نمایان نیست. درس مهمی که در اینجا باید بیاموزیم این است که در طرح یک مسئلهٔ مکانیک کوانتومی همیشه باید توجه خود را به تقارنهای موجود در هامیلتونی مسئله معطوف کنیم، و مختصات را به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که این تقارنها را به‌روشنی نشان دهند. اگر جعبه نامنظم باشد (شکل ۴ـ۴)، هیچ تغییر مختصاتی باعث ایجاد تقارن نمی‌شود. نکتهٔ مهم این است که تقارن باید در هامیلتونی باشد.[۱] این واقعیت را می‌توان با این پرسش که در چه شرایطی یک تابع زوج برای همیشه زوج باقی می‌ماند روشن‌تر

---

۱. وقتی با جعبه سروکار داریم دیواره‌ها را به‌عنوان قسمتی از پتانسیل، یعنی هامیلتونی، در نظر می‌گیریم. به همین دلیل است که به‌جای شرایط مرزی صحبت از هامیلتونی می‌کنیم.

www.arsanjan.blogfa.com

دید. فرض کنید

$$\psi(x,\circ) = \psi(-x,\circ) \equiv \psi^{(+)}(x) \qquad (۶۶\_۴)$$

تحول زمانی با معادلهٔ زیر داده می‌شود

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t) \qquad (۶۷\_۴)$$

اگر P را بر این معادله اعمال کنیم به‌دست می‌آوریم

$$ih\frac{\partial}{\partial t}P\psi(x,t) = PH\psi(x,t) \qquad (۶۸\_۴)$$

تحت شرایط خاصی که

$$PH\psi(x,t) = HP\psi(x,t) \qquad (۶۹\_۴)$$

که وقتی برقرار است که H تحت $x \to -x$ زوج باشد، یعنی وقتی که $V(x)$ یک تابع زوج باشد (زیرا $d^۲/dx^۲$ زوج است)، داریم

$$ih\frac{\partial}{\partial t}[P\psi(x,t)] = H[P\psi(x,t)] \qquad (۷۰\_۴)$$

بنابراین، توابع

$$\psi^{(+)}(x,t) = \frac{۱}{۲}(۱+P)\psi(x,t) \qquad (۷۱\_۴)$$

و

$$\psi^{(-)}(x,t) = \frac{۱}{۲}(۱-P)\psi(x,t) \qquad (۷۲\_۴)$$

جداگانه در معادلهٔ شرودینگر صدق می‌کنند، و اگر حالت اولیه زوج (یا فرد) باشد با هم مخلوط نمی‌شوند. تنها اگر برای تمام حالتهای ممکن داشته باشیم

$$(PH - HP)\psi(x,t) = \circ \qquad (۷۳\_۴)$$

www.arsanjan.blogfa.com

یعنی اگر P و H با هم جابه‌جا شوند:

$$[P, H] = 0 \qquad (۷۴\text{-}۴)$$

آنگاه شرط استقلال از زمان برای پاریته برقرار است. خواهیم دید که این شرط مهم کاملاً عمومیت دارد: هر عملگری که وابستگی زمانی صریح نداشته باشد و با هامیلتونی H جابه‌جا شود یک ثابت حرکت است. مخصوصاً، اگر پتانسیل با زمان تغییر کند، یعنی داشته باشیم $V(x,t)$، آنگاه مانند مورد مکانیک کلاسیک خود انرژی یک ثابت حرکت نیست. توجه کنید که وقتی V تابع t است، جداسازی معادله به معادلهٔ مربوط به وابستگی زمانی و معادلهٔ ویژه‌مقداری انرژی غیرممکن است.

به‌طور خلاصه، آنچه ویژه‌تابعهای واگن را متمایز می‌کند این است که همهٔ آنها ویژه‌تابعهای همزمان عملگر هرمیتی دیگری هستند. عملگرهای p_{op} و P هر دو این ویژگی را دارند که با هامیلتونی $p_{\text{op}}^2/2m$ در این مسئله جابه‌جا می‌شوند. بعداً خواهیم دید که این یک شرط لازم برای وجود ویژه‌تابعهای همزمان است. به‌عنوان مثال، p_{op} و P با هم جابه‌جا نمی‌شوند (زیرا $(\hbar/i)(d/dx)$ تحت $x \to -x$ تغییر علامت می‌دهد)، و در نتیجه ویژه‌تابعهای یکی از این عملگرها نمی‌توانند ویژه‌تابعهای همزمان دیگری باشند.

از دو مسئلهٔ ساده‌ای که بررسی کردیم مطالب بسیار زیادی دربارهٔ مکانیک کوانتومی یاد گرفته‌ایم. در فصلهای بعد به این مطالب بازمی‌گردیم و آنها را تعمیم می‌دهیم. در فصل ۵ باز هم چند مسئلهٔ بسیار ساده را بررسی می‌کنیم، اما این بار به‌جای پرداختن به ویژگیهای ریاضی، توجه خود را به دستگاههای فیزیکی معطوف می‌کنیم که مسائل مزبور الگوهای سادهٔ آنها هستند.

مسائل

۴ـ۱ از میان عملگرهای زیر آنهایی را که خطی هستند مشخص کنید:

(الف) $O_1\psi(x) = x^3\psi(x)$ (ب) $O_2\psi(x) = x(d/dx)\psi(x)$

(ج) $O_3\psi(x) = \lambda\psi^*(x)$ (د) $O_4\psi(x) = e^{\psi(x)}$

(هـ) $O_5\psi(x) = [d\psi(x)/dx] + a$ (و) $O_6\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} dx'(\psi(x')x')$

۴ـ۲ مسئلهٔ ویژه‌مقداری زیر را حل کنید

$$O_6\psi(x) = \lambda\psi(x)$$

به‌ازای چه مقادیری از ویژه‌مقدار λ ویژه‌تابعها انتگرال‌پذیر مجذوری هستند؟

www.arsanjan.blogfa.com

[راهنمایی: از دو طرف معادله نسبت به x مشتق بگیرید.]

۳ـ۴ جابه‌جاگرهای زیر را به‌دست آورید: (الف) $[O_۲, O_۶]$؛ (ب) $[O_۱, O_۲]$. روش محاسبهٔ $[A, B]$ نوشتن $A(B\psi) - B(A\psi)$ به‌صورت $C\psi$ است.

۴ـ۴ عدم قطعیت

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^۲ \rangle}$$

را برای $u_n(x)$ که در ۴ـ۲۱ داده شده است محاسبه کنید. با استفاده از $\langle p^۲ \rangle$ که با ۴ـ۲۸ داده شده است حاصلضرب

$$\Delta p \, \Delta x$$

را به‌دست آورید. توجه کنید که برای حالتهای بالاتر عدم قطعیت با n افزایش می‌یابد.

۵ـ۴ ذره‌ای در حالت پایهٔ جعبه‌ای است که دیواره‌های آن در $x = \pm a$ قرار دارند. دیواره‌های جعبه ناگهان به $x = \pm b$ (که در آن $b > a$) برده می‌شوند. احتمال اینکه ذره در پتانسیل جدید در حالت پایه یافت شود چقدر است؟ احتمال اینکه ذره در اولین حالت برانگیخته باشد چقدر است؟ جواب سادهٔ این مورد توضیح ساده‌ای دارد. این توضیح چیست؟

۶ـ۴ فرض کنید ذره‌ای با تابع‌موج

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sqrt{\frac{۲}{a}} & \frac{-a}{۲} < x < ۰ \\ &= ۰ & ۰ < x < \frac{a}{۲} \end{aligned}$$

در نیمهٔ چپ جعبه‌ای که دیواره‌های آن در $x = \pm a/۲$ هستند جایگزین شده است.

(الف) آیا این ذره در زمانهای بعد جایگزیده باقی می‌ماند؟

(ب) اگر انرژی ذره را اندازه‌گیری کنیم، انرژی حالت پایه و انرژی اولین حالت برانگیخته با چه احتمالی به‌دست می‌آیند؟

۷ـ۴ برای پتانسیلی به‌صورت

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty & x < ۰;\ \ x > a \\ &= ۰ & ۰ < x < a \end{aligned}$$

www.arsanjan.blogfa.com

ویژه‌تابعها عبارت‌اند از

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{۲}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

فرض کنید تابع‌موج اولیهٔ بهنجارشدهٔ ذره‌ای در این پتانسیل به‌صورت زیر باشد

$$\psi(x, ۰) = A \sin^۵ \left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

(الف) $\psi(x, t)$ را تعیین کنید.
(ب) A را بدون محاسبهٔ انتگرال $\int d\theta \ \sin^{۱۰} \theta$ به‌دست آورید.
(ج) اگر $E_n = n^۲\pi^۲\hbar^۲/۲ma^۲$، احتمال به‌دست آمدن $E_۳$ در اندازه‌گیری انرژی چقدر است؟

[راهنمایی: $[(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/۲i]^۵$ را به‌صورت رشتهٔ توانی $e^{۵i\theta} + \cdots - e^{-۵i\theta}$ بسط دهید و آن‌را به‌یک رشتهٔ شامل $\sin ۵\theta$ و غیره تبدیل کنید.]

۴ـ۸ محاسبه‌های مثال صفحهٔ ۸۲ را برای ذره‌ای که ابتدا در nامین ویژه‌حالت است تکرار کنید. نشان دهید احتمال مربوط عبارت است از

$$\frac{۲n^۲\pi}{\hbar a^۳} \frac{۱ - (-۱)^n \cos \ pa/\hbar}{[(p/\hbar)^۲ - (n\pi/a)^۲]^۲}$$

این توزیع را ترسیم کنید و نشان دهید که با رابطهٔ عدم قطعیت و به‌ازای n بزرگ با اصل تطابق سازگار است.

۴ـ۹ ذره‌ای در فضای آزاد ابتدا به‌صورت بستهٔ موجی است که با رابطهٔ زیر توصیف می‌شود

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{۱/۴} e^{-\alpha x^۲/۲}$$

(الف) احتمال اینکه تکانهٔ ذره در بازهٔ $(p, p + dp)$ باشد چقدر است؟
(ب) مقدار انتظاری انرژی را به‌دست آورید. آیا می‌توانید با استدلالی تقریبی، برمبنای "اندازهٔ" تابع‌موج و اصل عدم قطعیت، نشان دهید که چرا این جواب باید تقریباً همین باشد.

۴ـ۱۰ تابع‌موج ذره‌ای به‌صورت زیر است

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

www.arsanjan.blogfa.com

شار مربوط به آن را به‌دست آورید.

۴ـ۱۱ شار وابسته به ذره‌ای را تعیین کنید که با تابع‌موج زیر توصیف می‌شود

$$\psi(x) = u(x)e^{ikx}$$

که در آن $u(x)$ یک تابع حقیقی است.

۴ـ۱۲ ویژه‌تابعهای مربوط به جعبه‌ای را که دیواره‌های آن در $x = \pm a$ هستند در نظر بگیرید. بدون محاسبهٔ انتگرال، نشان دهید مقدار انتظاری کمیت

$$x^{۲}p^{۳} + ۳xp^{۳}x + p^{۳}x^{۲}$$

برای تمام ویژه‌تابعها صفر می‌شود.

۴ـ۱۳ ثابت کنید عملگر پاریته، که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$P\psi(x) = \psi(-x)$$

یک عملگر هرمیتی است. همچنین ثابت کنید ویژه‌تابعهای P، مربوط به ویژه‌مقدارهای ۱+ و ۱−، متعامد هستند.

۴ـ۱۴ با استفاده از مفهوم پاریته، نشان دهید که در مثال صفحهٔ ۷۹ ضرایب A_n برای nهای زوج باید همگی صفر شوند.

۴ـ۱۵ ویژه‌حالتهای ذره‌ای در جعبهٔ نامتناهی را، که با ۴ـ۲۱ داده می‌شوند، در نظر بگیرید. $\langle x^{۲}\rangle$ و $\langle x\rangle$ را محاسبه کنید. با استفاده از این نتایج، کمیت $\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^{۲}\rangle - \langle x\rangle^{۲}}$ را برای ویژه‌حالت $u_n(x)$ به‌دست آورید. Δx نمایشگر عدم قطعیت در عملگر x است، و باید به براورد سادهٔ $\Delta x \approx a$ نزدیک باشد.

مراجع

بحث مفصلی دربارهٔ خواص معادله‌های دیفرانسیل مرتبهٔ دوم در مکانیک کوانتومی را می‌توان در کتابهای زیر یافت.

پاول ج ل؛ کریسمن ب، مکانیک کوانتومی، ترجمهٔ پاشایی‌راد و سعادت، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸؛ و

D S Saxon, *Elementary Quantum Mechanics*, Holden- Day, San Francisco, 1968.

همچنین به کتابهای پیشرفته‌تری که در آخر این کتاب معرفی شده‌اند مراجعه کنید.

www.arsanjan.blogfa.com

۵

پتانسیلهای یک‌بعدی

در این فصل چند مسئلهٔ ساده مربوط به حرکت یک‌بعدی را حل می‌کنیم. این مسائل از دو لحاظ جالب توجه‌اند: یکی اینکه بعضی اثرات غیرکلاسیک را روشن می‌کنند، و دیگر اینکه، اگرچه جهانی که در آن زندگی می‌کنیم سه‌بعدی است، بسیاری از وضعیتهای فیزیکی عملاً یک‌بعدی هستند.

پلهٔ پتانسیل

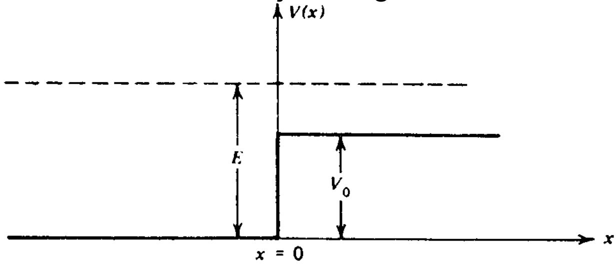
در این مسئله پتانسیل عبارت است از (شکل ۵ـ۱)

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \qquad & x < 0 \\ &= V_0 \qquad & x > 0 \end{aligned} \tag{۵ـ۱}$$

معادلهٔ شرودینگر

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2u(x)}{dx^2} + V(x)u(x) = Eu(x) \tag{۵ـ۲}$$

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۵ـ۱ پلهٔ پتانسیل.

را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{d^۲u(x)}{dx^۲}+\frac{۲m}{\hbar^۲}[E-V(x)]u(x)=۰ \qquad (۵\text{-}۳)$$

مطابق معمول، قرار می‌دهیم

$$\frac{۲mE}{\hbar^۲}=k^۲ \qquad (۵\text{-}۴)$$

و همچنین می‌نویسیم

$$\frac{۲m(E-V_۰)}{\hbar^۲}=q^۲ \qquad (۵\text{-}۵)$$

عمومی‌ترین جواب معادلهٔ ۵ـ۳ به‌ازای $x<۰$، که در آن $V(x)=۰$، عبارت است از

$$u(x)=e^{ikx}+R\,e^{-ikx} \qquad (۵\text{-}۶)$$

اندازهٔ شار خالص در جهت مثبت x برابر است با

$$\begin{aligned} j &= \frac{\hbar}{۲im}[(e^{-ikx}+R^*e^{ikx})(ik\,e^{ikx}-ikR\,e^{-ikx})-\text{همیوغ مختلط}]\\ &=\frac{\hbar k}{m}(۱-|R|^۲) \end{aligned} \qquad (۵\text{-}۷)$$

e^{ikx} با شار $\hbar k/m$ را می‌توان یک موج ورودی در نظر گرفت. اگر هیچ پتانسیلی وجود نداشت، می‌توانستیم e^{ikx} را برای تمام xها به‌عنوان جواب انتخاب کنیم، و از این‌رو R را به‌وجود پتانسیل نسبت