

معنا داشته باشد که همیشه به صورت  $\frac{1}{|a|} \delta(x/a)$  باشد. [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\int dx f(x) \delta(x - a)$$

که در آن تابع  $f(x)$  در گستره مقادیر شناسه تابع دلتا به اندازه کافی هموار است. با وجود این، می‌توان عملیات را مستقیماً روی تابع دلتا انجام داد، اما باید در نظر داشت که تمام روابطی که می‌نویسیم تنها زیر علامت انتگرال می‌توانند روی دهند. خواص زیر را می‌توان برای تابع دلتا اثبات کرد:

۱.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (\text{الف-۱۶})$$

که پیامد رابطه زیر است

$$f(x) = \int dy f(y) \delta(x - y) \quad (\text{الف-۱۷})$$

اگر بنویسیم  $x = a\xi$  و  $y = a\eta$ ، به دست می‌آوریم

$$f(a\xi) = |a| \int d\eta f(a\eta) \delta[a(\xi - \eta)]$$

از طرف دیگر،

$$f(a\xi) = \int d\eta f(a\eta) \delta(\xi - \eta)$$

از مقایسه به الف-۱۶ می‌رسیم.

۲. رابطه‌ای که از الف-۱۶ نتیجه می‌شود عبارت است از

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)] \quad (\text{الف-۱۸})$$

این رابطه از اینجا به دست می‌آید که شناسه تابع دلتا در  $x = a$  و  $x = -a$  صفر می‌شود. بنابراین،

$$\begin{aligned}\delta(x^2 - a^2) &= \delta[(x - a)(x + a)] \\ &= \frac{1}{|x + a|} \delta(x - a) + \frac{1}{|x - a|} \delta(x + a) \\ &= \frac{1}{2|a|} [\delta(x - a) + \delta(x + a)]\end{aligned}$$

از این کلی‌تر، می‌توان نشان داد

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|df/dx|_{x=x_i}} \quad (\text{الف-۱۹})$$

که در آن  $x_i$ ها ریشه‌های  $f(x)$  در بازه انتگرال‌گیری هستند. علاوه بر نمایش الف-۱۵ برای تابع دلتا، نمایشهای دیگری نیز وجود دارند که می‌توانند مفید باشند. چند نمایش تابع دلتا را در زیر بررسی می‌کنیم. (الف) نمایش الف-۱۵ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dk e^{ikx} \quad (\text{الف-۲۰})$$

انتگرال را می‌توان محاسبه کرد، و به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iLx} - e^{-iLx}}{ix} \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin Lx}{\pi x}\end{aligned} \quad (\text{الف-۲۱})$$

(ب) تابع  $\Delta(x, a)$  را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}\Delta(x, a) &= 0 & x < -a \\ &= \frac{1}{2a} & -a < x < a \\ &= 0 & a < x\end{aligned} \quad (\text{الف-۲۲})$$

بنابراین،

www.arsanjan.blogfa.com

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \Delta(x, a) \quad (\text{الف-۲۳})$$

واضح است که انتگرال حاصلضرب  $\Delta(x, a)$  و یک تابع  $f(x)$  که در نزدیکی مبدأ هموار است تنها در مبدأ سهم خواهد داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \int dx f(x) \Delta(x, a) &= f(0) \lim_{a \rightarrow 0} \int dx \Delta(x, a) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

(ج) به همین ترتیب، هر تابع قله دار، که مساحت زیر آن به ۱ بهنجار شده باشد، در حذی که پهنای قله به صفر میل می کند به یک تابع دلتا نزدیک می شود. می توان نشان داد که دو رابطه زیر نمایشهای تابع دلتا هستند

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} \quad (\text{الف-۲۴})$$

و

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2}$$

(د) گاهی با چندجمله ایهای راست هنجار سروکار داریم، که آنها را با نماد کلی  $P_n(x)$  نشان می دهیم. این چندجمله ایها دارای خاصیت زیر هستند

$$\int dx P_m(x) P_n(x) w(x) = \delta_{mn} \quad (\text{الف-۲۶})$$

که در آن  $w(x)$  ممکن است واحد یا یک تابع ساده باشد، که آن را تابع وزن می نامند. برای توابعی که می توان آنها را برحسب این چندجمله ایهای متعامد بسط داد می توان نوشت

$$f(x) = \sum_n a_n P_n(x) \quad (\text{الف-۲۷})$$

اگر دو طرف این رابطه را در  $w(x) P_m(x)$  ضرب کنیم و روی  $x$  انتگرال بگیریم به دست می آوریم

$$a_m = \int dy w(y) f(y) P_m(y) \quad (\text{الف-۲۸})$$

با جاگذاری در الف-۲۷، و با افتادگی برای باز با توابع تعمیم یافته، جای جمع و انتگرال را بدون هیچ قید و شرطی عوض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n P_n(x) \int dy w(y) f(y) P_n(y) \\ &= \int dy f(y) \left( \sum_n P_n(x) w(y) P_n(y) \right) \end{aligned} \quad (\text{الف-۲۹})$$

بدین ترتیب، به نمایش دیگری از تابع دلتا می‌رسیم. مثالهای  $P_n(x)$  عبارت‌اند از چندجمله‌ایهای لژاندر، چندجمله‌ایهای هرمیت و چندجمله‌ایهای لاگر، که تمام اینها در مسائل مکانیک کوانتومی ظاهر می‌شوند.

چون تابع دلتا همیشه به صورت حاصلضرب با یک تابع هموار زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود، می‌توان برای آن مشتق تعریف کرد. به‌عنوان مثال،

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx f(x) \frac{d}{dx} \delta(x) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{d}{dx} [f(x) \delta(x)] - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{df(x)}{dx} \delta(x) \\ &= - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{df(x)}{dx} \delta(x) \\ &= - \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=0} \end{aligned} \quad (\text{الف-۳۰})$$

و غیره. تابع دلتا ابزار بسیار مفیدی است که در هر بخشی از ریاضی فیزیک با آن روبه‌رو می‌شویم. انتگرال تابع دلتا عبارت است از

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x dy \delta(y - a) &= 0 \quad x < a \\ &= 1 \quad x > a \\ &\equiv \theta(x - a) \end{aligned} \quad (\text{الف-۳۱})$$

که نمادنگاری متعارف برای این تابع ناپیوسته است که تابع پله‌ای نامیده می‌شود. برعکس، مشتق تابع پله‌ای  $\theta(x - a)$  تابع دلتای دیراک است:

$$\frac{d}{dx} \theta(x - a) = \delta(x - a) \quad (\text{الف-۳۲})$$

## پیوست ب

### عملگرها

در این پیوست بعضی از مباحث مربوط به عملگرهای خطی را بررسی می‌کنیم. توابع انتگرال‌پذیر مجذوری مجموعه توابع موج قابل قبول را تشکیل می‌دهند. اگر  $\psi_1(x)$  و  $\psi_2(x)$  انتگرال‌پذیر مجذوری و  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط اختیاری باشند، چون تابع

$$\psi(x) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x) \quad (ب-۱)$$

انتگرال‌پذیر مجذوری است، می‌گوییم  $\psi$ ها یک فضای خطی تشکیل می‌دهند. عملگر  $A$  در این فضا یک نگاشت است:

$$A\psi(x) = \phi(x)$$

توجه کنید که  $A$  یک عملگر خطی است. در میان تمام عملگرها یک زیر مجموعه وجود دارد که عملگرهای خطی نامیده می‌شوند، و این خاصیت را دارند که

$$A\alpha\psi(x) = \alpha A\psi(x)$$

که در آن  $\alpha$  یک ثابت مختلط اختیاری است، و همچنین

$$A[\alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x)] = \alpha A\psi_1(x) + \beta A\psi_2(x) \quad (۴-ب)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط اند. یک زیرمجموعه دیگر عبارت است از عملگرهای هرمیتی که برای آنها مقدار انتظاری به ازای تمام توابع قابل قبول  $\psi(x)$ ، یعنی

$$\langle A \rangle_\psi = \int dx \psi^*(x) A\psi(x) \quad (۵-ب)$$

حقیقی است. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای تمام توابع قابل قبول  $\psi_1$  و  $\psi_2$  رابطه زیر برقرار است

$$\int \psi_1^*(x) A\psi_2(x) dx = \int [A\psi_2(x)]^* \psi_1(x) dx \quad (۶-ب)$$

حقیقی بودن  $\langle A \rangle$  ایجاب می‌کند که

$$\int dx \psi^*(x) A\psi(x) = \int dx [A\psi(x)]^* \psi(x) \quad (۷-ب)$$

اکنون به جای  $\psi(x)$  قرار می‌دهیم

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \lambda\psi_2(x) \quad (۸-ب)$$

و در نتیجه

$$\int dx (\psi_1^* + \lambda^* \psi_2^*) A(\psi_1 + \lambda\psi_2) = \int dx (\psi_1 + \lambda\psi_2) (A\psi_1 + \lambda A\psi_2)^* \quad (۹-ب)$$

با استفاده از هرمیتی بودن  $A$ ، یعنی

$$\int dx \psi_i^* A\psi_j = \int dx \psi_j (A\psi_i)^* \quad i = 1, 2 \quad (۱۰-ب)$$

به دست می‌آوریم

$$\lambda^* \int \psi_2^* A\psi_1 + \lambda \int \psi_1^* A\psi_2 = \lambda \int \psi_2 (A\psi_1)^* + \lambda^* \int \psi_1 (A\psi_2)^* \quad (۱۱-ب)$$

چون  $\lambda$  یک عدد مختلط [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com) و ضرایب  $\lambda^*$  در دو طرف باید جداگانه با هم برابر باشند. بنابراین،

$$\int dx \psi_r^\dagger A \psi_\lambda = \int dx (A \psi_r)^\dagger \psi_\lambda \quad (۱۲-ب)$$

نتیجه دیگری که می‌خواهیم اثبات کنیم این است که ویژه‌تابع‌های یک عملگر هرمیتی، مربوط به ویژه‌مقدارهای مختلف، متعامدند. دو معادله زیر را در نظر بگیرید

$$A \psi_\lambda(x) = a_\lambda \psi_\lambda(x)$$

و

$$[A \psi_r(x)]^\dagger = a_r \psi_r^\dagger(x) \quad (۱۳-ب)$$

توجه کنید که  $a_r$  حقیقی است زیرا ویژه‌مقدارهای عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند.  $a_r$  را در معادله اول و  $\psi_\lambda$  را در معادله دوم ضرب کرده‌ای می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int dx \psi_r^\dagger A \psi_\lambda(x) &= a_\lambda \int dx \psi_r^\dagger(x) \psi_\lambda(x) \\ \int dx (A \psi_r)^\dagger \psi_\lambda(x) &= a_r \int dx \psi_r^\dagger(x) \psi_\lambda(x) \end{aligned} \quad (۱۴-ب)$$

از تفریق این دو به دست می‌آوریم

$$(a_\lambda - a_r) \int dx \psi_r^\dagger(x) \psi_\lambda(x) = \int dx \psi_r^\dagger A \psi_\lambda - \int dx (A \psi_r)^\dagger \psi_\lambda = 0 \quad (۱۵-ب)$$

بنابراین، اگر  $a_\lambda \neq a_r$  داریم

$$\int dx \psi_r^\dagger(x) \psi_\lambda(x) = 0 \quad (۱۶-ب)$$

اگر همیوغ هرمیتی عملگر  $A$  را با  $A^\dagger$  نشان دهیم به طوری که

$$\int dx (A \psi_r)^\dagger \psi_\lambda \equiv \int dx \psi_r^\dagger A^\dagger \psi_\lambda \quad (۱۷-ب)$$

$$A = A^\dagger \quad (\text{ب-۱۸})$$

می‌توان نشان داد

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \quad (\text{ب-۱۹})$$

برای این کار، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \int \psi_\nu^* (AB)^\dagger \psi_\lambda &= \int (AB \psi_\nu)^* \psi_\lambda \\ &= \int (B \psi_\nu)^* (A^\dagger \psi_\lambda) \\ &= \int \psi_\nu^* B^\dagger (A^\dagger \psi_\lambda) \\ &= \int \psi_\nu^* B^\dagger A^\dagger \psi_\lambda \end{aligned} \quad (\text{ب-۲۰})$$

تعمیم این رابطه به صورت زیر است

$$(ABC \dots Z)^\dagger = A^\dagger \dots C^\dagger B^\dagger A^\dagger \quad (\text{ب-۲۱})$$

شرط لازم و کافی برای هرمیتی بودن حاصلضرب دو عملگر هرمیتی این است که این دو عملگر با هم جابه‌جا شوند:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = B.A = AB + [B, A] \quad (\text{ب-۲۲})$$

نتیجه دیگر این است که برای هر عملگر  $A$  عملگرهای زیر هرمیتی هستند

$$\begin{aligned} &A + A^\dagger \\ &i(A - A^\dagger) \\ &AA^\dagger \end{aligned} \quad (\text{ب-۲۳})$$

اکنون "روابط عدم قطعیت" را اثبات می‌کنیم. بنابه تعریف داریم

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \quad (\text{ب-۲۴})$$



$$\begin{aligned} U &= A - \langle A \rangle \\ V &= B - \langle B \rangle \end{aligned} \quad (\text{ب-۲۵})$$

و می‌نویسیم

$$\phi = U\psi + i\lambda V\psi \quad (\text{ب-۲۶})$$

که در آن  $\lambda$  یک پارامتر حقیقی است.  $\phi$  را در خودش ضرب نرده‌ای می‌کنیم:

$$I(\lambda) = \int dx \phi^\dagger \phi \geq 0 \quad (\text{ب-۲۷})$$

اگر  $A$  و  $B$  هرمیتی باشند  $U$  و  $V$  نیز هرمیتی هستند. در نتیجه، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int dx (U\psi + i\lambda V\psi)^\dagger (U\psi + i\lambda V\psi) \\ &= \int dx (U\psi)^\dagger (U\psi) + \lambda^2 \int dx (V\psi)^\dagger (V\psi) \\ &\quad + i\lambda \int dx [(U\psi)^\dagger (V\psi) - (V\psi)^\dagger (U\psi)] \\ &= \int dx \psi^\dagger (U^\dagger + \lambda^2 V^\dagger + i\lambda[U, V])\psi \\ &= (\Delta A)^\dagger + \lambda^2 (\Delta B)^\dagger + i\lambda \int dx \psi^\dagger [U, V]\psi \\ &= (\Delta A)^\dagger + \lambda^2 (\Delta B)^\dagger + i\lambda \langle [A, B] \rangle \end{aligned} \quad (\text{ب-۲۸})$$

این کمیت وقتی کمینه است که

$$2\lambda(\Delta B)^\dagger + i\langle [A, B] \rangle = 0 \quad (\text{ب-۲۹})$$

یا

$$\lambda = -i \frac{\langle [A, B] \rangle}{2(\Delta B)^\dagger} \quad (\text{ب-۳۰})$$

با جاگذاری در  $I(\lambda)$  به دست می‌آوریم [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$(\Delta A)^2 - \frac{\langle [A, B] \rangle^2}{4(\Delta B)^2} + \frac{\langle [A, B] \rangle^2}{2(\Delta B)^2} \geq 0.$$

یعنی

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} \langle i[A, B] \rangle^2 \quad (31\text{-ب})$$

در ضمن، طرف چپ رابطه بالا وقتی کمترین مقدار خود را دارد که  $U\psi$  و  $V\psi$  با یکدیگر متناسب باشند. بنابراین، برای عملگرهای  $x$  و  $p$  در این مورد داریم

$$\frac{\hbar}{i} \frac{d\psi(x)}{dx} + i\beta x\psi(x) = 0 \quad (32\text{-ب})$$

جواب این معادله عبارت است از

$$\psi(x) = C e^{-\beta(x^2/2\hbar)} \quad (33\text{-ب})$$

که ویژه تابع حالت پایه نوسانگر هماهنگ است. شایان توجه است که رابطه عدم قطعیت

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} (\langle i[A, B] \rangle)^2 \quad (34\text{-ب})$$

بدون هیچ استفاده‌ای از مفاهیم موجی یا دوجانبگی بین یک موج و تبدیل فوریه آن به دست آمده است. این نتیجه صرفاً مبتنی بر خواص عملگری مشاهده‌پذیرهای  $A$  و  $B$  است. این پیوست را با بیان چند خاصیت از جابه‌جاگرها به پایان می‌بریم.  
(الف)

$$[A, B] = -[B, A] \quad (35\text{-ب})$$

(ب)

$$\begin{aligned} [A, B]^\dagger &= (AB)^\dagger - (BA)^\dagger \\ &= B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger \\ &= [B^\dagger, A^\dagger] \end{aligned} \quad (36\text{-ب})$$

(ج) اگر  $A$  و  $B$  هرمیتی باشند،  $[A, B]$  نیز هرمیتی است. این نتیجه مستقیماً از خواص بالا به دست می‌آید.

(د)

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC' - C'AB \\ &= ABC' - AC'B + AC'B - C'AB \quad (\text{ب-۳۷}) \\ &= A[B, C'] + [A, C']B \end{aligned}$$

(ه) جمله به جمله می‌توان نشان داد که

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (\text{ب-۳۸})$$

که لم بیکر-هاوسدورف نامیده می‌شود و کاربردهایی در محاسبات با عملگرها دارد. (و) به سادگی می‌توان نشان داد

$$[A, [B, C']] + [B, [C', A]] + [C', [A, B]] = 0 \quad (\text{ب-۳۹})$$

که اتحاد یاکوبی نامیده می‌شود.

برای بحث گسترده‌تر دربارهٔ عملگرها و فضاهاى خطی قلمرو آنها می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید

J D Jackson, *Mathematics for Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1962.

# مبحث ویژه ۱

## سینماتیک نسبیتی

در این بخش چند فرمول را که در ساده کردن اثرات تبدیلهای نسبیتی از یک چارچوب مرجع به دیگری مفیدند به اختصار بیان می‌کنیم. یک کاربرد نمونه در پراکندگی پیش می‌آید: نظریه با چارچوب مرکز جرم و آزمایش با چارچوب آزمایشگاه سروکار دارد، و نتایج این دو را باید با هم مقایسه کرد. روش ساده‌سازی که باید از آن استفاده شود بر مبنای دو نتیجه از نظریه نسبیت خاص است: (الف) حاصلضرب زده‌ای چاربردارهای  $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$  و  $B_\mu = (B_0, \mathbf{B})$  که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$A \cdot B = A_\mu B_\mu \equiv (A_0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1-1)$$

تحت تبدیلات لورنتس ناورد است. (ب) انرژی و تکانه یک ذره به صورت چاربردار زیر تبدیل می‌شوند

$$p_\mu = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (2-1)$$

که مجذور "طول" آن برحسب جرم سکون ذره عبارت است از

$$p^\nu p_\nu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad (3-1)$$

به‌طور کلی، برخورد بین دو ذره که به دو ذره در حالت نهایی منجر می‌شود، مانند

$$A(p_A) + B(p_B) \rightarrow C(p_C) + D(p_D)$$

فقط با دو عدد مشخص می‌توان آن را در یک کتابخانه [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)  $۱۶ = ۴ \times ۴$  مؤلفه مختلف داریم؛ این ۱۶ مؤلفه با چهار شرط جرم (۱-۳) و چهار شرط پایستگی انرژی-تکانه محدود می‌شوند؛ علاوه بر این، ناوردایی تحت انتقال و چرخش ایجاب می‌کند که شش مختصه دیگر، یعنی تکانه مرکز جرم، سمگیری صفحه پراکندگی در فضا، و انتخاب محورها در این صفحه، بی‌تأثیر باشند. از دو ناوردای مشخص‌کننده برخورد، یکی را به صورت

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 \quad (۴-۱م)$$

که جمله دوم آن از پایستگی چارتکانه ناشی می‌شود، و دیگری را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$t = (p_C - p_A)^2 = (p_D - p_B)^2 \quad (۵-۱م)$$

یک انتخاب ممکن دیگر عبارت است از

$$u = (p_D - p_A)^2 = (p_C - p_B)^2 \quad (۶-۱م)$$

این سه ناوردا مستقل از یکدیگر نیستند زیرا، با توجه به رابطه  $p_{A\mu} + p_{B\mu} = p_{C\mu} + p_{D\mu}$  که می‌توان آن را به سادگی اثبات کرد، قانون پایستگی انرژی-تکانه ایجاب می‌کند که

$$s + t + u = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + m_C^2 c^2 + m_D^2 c^2 \quad (۷-۱م)$$

مفهوم این ناورداها را در زیر بیان می‌کنیم:

$s$ : در چارچوب مرکز جرم، که در آن کمیته‌ها را با ستاره نشان می‌دهیم، داریم

$$\mathbf{p}_A^* + \mathbf{p}_B^* = \mathbf{0} \quad (۸-۱م)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} s &= (p_{\circ A}^* + p_{\circ B}^*)^2 - (\mathbf{p}_A^* + \mathbf{p}_B^*)^2 \\ &= \left( \frac{E_A^*}{c} + \frac{E_B^*}{c} \right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2} (E_A^* + E_B^*)^2 \end{aligned} \quad (۹-۱م)$$

[www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

که، با تقریب ضریب  $c^2$ ، مجدود انرژی کل در چارچوب مرکز جرم است.

$t$ : معنی در یک مورد خاص (اما بسیار متداول) که در آن ذرات  $A$  و  $C$  و همچنین  $B$  و  $D$  یکسان هستند، مثلاً در واکنشهای

$$\pi + P \rightarrow \pi + P$$

و

$$\gamma + e \rightarrow \gamma + e$$

تا اندازه‌های روشنتر است. در این مورد، در چارچوب مرکز جرم، از

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_B^* &= -\mathbf{p}_A^* & \mathbf{p}_D^* &= -\mathbf{p}_C^* \\ E_A^* + E_B^* &= E_C^* + E_D^* \end{aligned} \quad (10-1م)$$

و

$$m_A = m_C \quad m_B = m_D \quad (11-1م)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_A^{*2} c^2 + m_A^2 c^4)^{1/2} + (\mathbf{p}_A^{*2} c^2 + m_B^2 c^4)^{1/2} &= (\mathbf{p}_C^{*2} c^2 + m_A^2 c^4)^{1/2} \\ &+ (\mathbf{p}_C^{*2} c^2 + m_B^2 c^4)^{1/2} \end{aligned}$$

یعنی

$$E_A^* = E_C^* \quad E_B^* = E_D^* \quad (12-1م)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} t &= (p_A - p_C)^2 = \left( \frac{E_A^*}{c} - \frac{E_C^*}{c} \right)^2 - (\mathbf{p}_A^* - \mathbf{p}_C^*)^2 \\ &= -(\mathbf{p}_A^* - \mathbf{p}_C^*)^2 \end{aligned} \quad (13-1م)$$

یعنی  $t$  منفی مجذور انتقال [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com) کنید که  $t$  به زاویه پراکندگی مرکز جرمی مربوط می‌شود. از رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned} t &= -\mathbf{p}_A^{*2} - \mathbf{p}_C^{*2} + 2\mathbf{p}_A^* \cdot \mathbf{p}_C^* \\ &= -\mathbf{p}_A^{*2} - \mathbf{p}_C^{*2} + 2|\mathbf{p}_A^*||\mathbf{p}_C^*| \cos \theta^* \end{aligned} \quad (14-1م)$$

چارچوب آزمایشگاه با  $\mathbf{p}_B^L = 0$  مشخص می‌شود، و در آن

$$p_{B\mu} = (m_{BC}, 0) \quad (15-1م)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2 = p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B \\ &= m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2m_B E_A^L \end{aligned} \quad (16-1م)$$

و

$$\begin{aligned} t &= (p_D - p_B)^2 \\ &= m_D^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2m_B E_D^L \\ &= (p_A - p_C)^2 \\ &= m_A^2 c^2 + m_C^2 c^2 - 2E_A^L E_C^L / c^2 + 2\mathbf{p}_A^L \cdot \mathbf{p}_C^L \\ &= m_A^2 c^2 + m_C^2 c^2 - 2E_A^L E_C^L / c^2 + 2|\mathbf{p}_A^L||\mathbf{p}_C^L| \cos \theta^L \end{aligned} \quad (17-1م)$$

از این نتیجه، و با استفاده از

$$E_A^L + m_B c^2 = E_C^L + E_D^L \quad (18-1م)$$

و ناوردایی  $s$  و  $t$ ، یعنی اینکه  $s$  و  $t$  در چارچوبهای مرکز جرم و آزمایشگاه (یا هر چارچوب دیگری) مقادیر یکسانی دارند، می‌توان رابطه میان زاویه پراکندگی مرکز جرمی و زاویه پراکندگی آزمایشگاهی و همچنین رابطه میان انرژیها در دو چارچوب را به دست آورد.

ویژگیهای تبدیل سطح مقطع دیفرانسیلی  $d\sigma/d(\cos \theta)$  از ناوردایی  $d\sigma$ ، که می‌توان آن را با فرمولبندی نسبیتی نظریه پراکندگی اثبات کرد، به دست می‌آید. بنابراین،

$$\frac{d\sigma}{dt} \quad (19-1م)$$

ناوردا است، و برای نمایش سطح مقطع به صورتی که بدیهه از یک چارچوب به چارچوب دیگر از همه آسانتر انجام شوند، بهتر است آن را بر حسب  $s$  و  $t$  بنویسیم. این کار را در اینجا انجام نمی دهیم. به عنوان یک نکته حاشیه ای بھایی، متذکر می شویم که رابطه مربوط به

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

ناوردای نسبیتی نیست. اما ناوردایی آشکار

$$\begin{aligned} & \int \dots \int d^3 p \delta(p^2 - m^2 c^2) \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \int_{p_0 > 0} dp_0 \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2) \quad (م-۱۰) \\ &= \int d^3 \mathbf{p} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}} = \frac{c}{2} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}} \end{aligned}$$

نشان می دهد که

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \quad (م-۱۱)$$

ناوردا است. عناصر ماتریس در نظریه های نسبیتی همیشه به ذراتی مربوط می شوند که نه مطابق با

$$\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

بلکه مطابق با

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{E}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

بهنجار می شوند، و در نتیجه عوامل لازم از مجذور عنصر ماتریس به دست می آیند.



## مبحث ویژه ۲

### عملگر چگالی

در بحثهای خود همیشه با تحول زمانی دستگاههای فیزیکی سروکار داشتیم که حالت‌های اولیه آنها به صورت زیر بودند

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |u_n\rangle \quad (۱-۲م)$$

این نوع آنهایی اولیه غالباً آنهایی نیستند که با روش آماده‌سازی حالتها فراهم می‌شوند. به جای یک مجموعه آماری متشکل از حالت‌های یکسان  $|\psi\rangle$ ، ممکن است تعدادی مجموعه آماری مختلف داشته باشیم که اندازه‌گیریها باید روی آنها انجام شوند. این مجموعه‌های آماری می‌توانند به صورت زیر باشند

$$|\psi^{(i)}\rangle = \sum_n C_n^{(i)} |u_n\rangle \quad (۲-۲م)$$

و همه آنچه می‌دانیم این است که احتمال یافتن یک مجموعه آماری که با  $(i)$  مشخص شده است  $p_i$  است و

$$\sum_i p_i = 1 \quad (۳-۲م)$$

برای مثال، ممکن است باریکه‌ای از اتمهای هیدروژن در یک حالت برانگیخته، با انرژی معین و تکانه زاویه‌ای مداری  $l$ ، و کاملاً ناقطبیده داشته باشیم، و از این رو تمام مقادیر  $m$ ، با  $-l \leq m \leq l$ ،

به یک اندازه محتمل هستند. در این مورد،  $\rho_m = 1/(2m+1)$  که مستقل از  $m$  است. صحیح نیست بگوییم این باریکه با تابع موج

$$|\psi\rangle = \sum_m C_m |Y_{lm}\rangle \quad (4-2م)$$

که در آن  $|C_m|^2 = 1/(2m+1)$ ، توصیف می‌شود، زیرا وضعیت فیزیکی  $2m+1$  باریکه مستقل را نشان می‌دهد، و در نتیجه هیچ رابطه فازی بین مقادیر مختلف  $m$  وجود ندارد. با استفاده از عملگر چگالی می‌توان هر دو مورد را بررسی کرد.

## حالت ناب

ابتدا حالت ناب را در نظر می‌گیریم. عملگر چگالی  $\rho$  با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (5-2م)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\rho = \sum_{m,n} C_n C_m^* |u_n\rangle\langle u_m| \quad (6-2م)$$

عناصر ماتریس  $\rho$  در پایه  $u_n$  عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= \langle u_k | \rho | u_l \rangle = \langle u_k | \sum_{m,n} C_n C_m^* |u_n\rangle\langle u_m| | u_l \rangle \\ &= C_k C_l^* \end{aligned} \quad (7-2م)$$

مشاهده می‌کنیم که  
(الف)

$$\rho^\dagger = |\psi\rangle\langle\psi| \psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho \quad (8-2م)$$

(ب)

$$\text{Tr } \rho = \sum_k \rho_{kk} = \sum_k |C_k|^2 = 1 \quad (9-2م)$$

(ج) همچنین، مقدار انتظاری از  $A$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\langle A \rangle &= \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{m,n} C_m^* \langle u_m | A | u_n \rangle C_n \\ &= \sum_{m,n} C_m^* C_n A_{mn} = \sum_{m,n} A_{mn} \rho_{nm} \quad (۱۰-۲م) \\ &= \text{Tr}(A\rho)\end{aligned}$$

نتایج ۸-۲م تا ۱۰-۲م از انتخاب مجموعه کامل بردارهای پایه  $|u_n\rangle$  مستقل هستند. برای اثبات، مجموعه  $|v_n\rangle$  را در نظر می‌گیریم. بنابه قضیه کلی بسط، می‌توان نوشت

$$|v_n\rangle = \sum_m T_m^{(n)} |u_m\rangle$$

که در آن

$$T_m^{(n)} = \langle u_m | v_n \rangle \equiv T_{mn}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sum_n T_{mn} (T^+)_{nk} &= \sum_n T_{mn} T_{kn}^* = \sum_n \langle u_m | v_n \rangle \langle u_k | v_n \rangle^* \\ &= \sum_n \langle u_m | v_n \rangle \langle v_n | u_k \rangle = \delta_{mk}\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد ماتریس  $T$  یکانی است. بنابراین،

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \sum_k D_k |v_k\rangle \\ &= \sum_k D_k T_{kl} |u_l\rangle\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$C_l = D_k T_{kl} = (T^{\text{tr}})_{lk} D_k \equiv U_{lk} D_k$$

چون  $T$  یکانی است، ترانهاد آن یعنی  $U \equiv T^{\text{tr}}$  نیز یکانی است. بنابراین،

$$\rho_{kl} = C_k C_l^* = (U)_{km} D_m (U)_{ln}^* D_n^*$$

$$= U \rho_D(U)^+$$

که در آن  $\rho_D$  عملگر چگالی در پایه  $v$  است. بدین ترتیب، داریم

$$\rho_D = U^+ \rho U$$

از یکانی بودن  $U$  نتیجه می‌شود که خواص  $\rho$  برای  $\rho_D$  نیز صدق می‌کنند. چون  $\rho = \rho^+$ ، می‌توان  $\rho$  را با یک تبدیل یکانی قطری کرد. این نشان می‌دهد که می‌توان پایه‌ای مانند  $|v_n\rangle$  انتخاب کرد که در آن  $\rho$  قطری باشد. چون  $\rho^2 = \rho$ ، ویژه‌مقدارهای آن تنها می‌توانند ۱ یا ۰ باشند، و چون  $\text{tr}\rho = 1$ ، تنها یکی از ویژه‌مقدارها می‌تواند ۱ باشد و بقیه باید صفر باشند. بنابراین، تنها یکی از  $D_k$ ها می‌تواند مخالف صفر باشد. این نشان می‌دهد که در یک پایه مناسب، حالت ناب حالتی است که ویژه‌حالت بزرگترین مجموعه مشاهده‌پذیرهای جابه‌جاشونده‌ای باشد که ویژه‌تابعهای آنها مجموعه  $|v_n\rangle$  هستند.

### حالت آمیخته

برای حالت آمیخته عملگر چگالی را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho = \sum_i |\psi^{(i)}\rangle p_i \langle \psi^{(i)}| \quad (۱۱-۲م)$$

که در پایه  $|u_n\rangle$  به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\rho = \sum_i \sum_{m,n} C_n^{(i)} C_m^{(i)*} p_i |u_n\rangle \langle u_m|$$

و از این رو

$$\rho_{kl} = \langle u_k | \rho | u_l \rangle = \sum_i p_i C_k^{(i)} C_l^{(i)*} \quad (۱۲-۲م)$$

توجه کنید که  $\rho_{kl} = \rho_{lk}^*$ ، و این نشان می‌دهد که  $\rho$  هرمیتی است. چون

$$\sum_n |C_n^{(i)}|^2 = 1$$

نتیجه می‌گیریم، مانند سابق، [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\text{Tr } \rho = \sum_k \rho_{kk} = \sum_i p_i = 1 \quad (۱۳-۲م)$$

همچنین، مانند مورد حالت ناب، داریم

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi^{(i)} | A | \psi^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{mn} p_i \langle \psi^{(i)} | u_n \rangle \langle u_n | A | u_m \rangle \langle u_m | \psi^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{mn} p_i C_m^{(i)} C_n^{(i)*} A_{nm} \\ &= \sum_{mn} \rho_{mn} A_{nm} = \text{Tr} (\rho A) \end{aligned} \quad (۱۴-۲م)$$

اما رابطه  $\rho^\dagger = \rho$  دیگر صادق نیست. در واقع

$$\rho^\dagger = \sum_j \sum_i |\psi^{(i)}\rangle p_i \langle \psi^{(i)} | \psi^{(j)}\rangle p_j \langle \psi^{(j)} | = \sum_i |\psi^{(i)}\rangle p_i^\dagger \langle \psi^{(i)} |$$

و چون  $\sum_i p_i = 1$ ، برای حالت آمیخته به دست می‌آوریم

$$\text{Tr } \rho^\dagger = \sum_i p_i^\dagger < 1 \quad (۱۵-۲م)$$

از معادله شرودینگر

$$\frac{d}{dt} |\psi^{(i)}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi^{(i)}\rangle$$

و (چون  $H = H^\dagger$ )

$$\frac{d}{dt} \langle \psi^{(i)} | = \frac{i}{\hbar} \langle \psi^{(i)} | H$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d}{dt} \rho = -\frac{i}{\hbar} H \rho + \frac{i}{\hbar} \rho H = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \quad (۱۶-۲م)$$

توجه کنید که علامت در اینجا مخالف علامت رابطه آهنگ تغییر زمانی عملگرهای دیگر است:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

ساده‌ترین کاربرد صورتبندی بالا در توصیف باریکه‌ای از الکترون‌ها یا ذرات دیگر با اسپین  $1/2$  است. در اینجا  $\rho$  یک ماتریس هرمیتی  $2 \times 2$  است. کلی‌ترین شکل این ماتریس عبارت است از

$$\rho = \frac{1}{4}(a\mathbb{1} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (17-2م)$$

که در آن  $a$  و  $\mathbf{b}$  حقیقی هستند. شرط  $\text{Tr}\rho = 1$  ایجاب می‌کند که  $a = 1$ . می‌توان  $\rho^2$  را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{4}(1 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma})(1 + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}(1 + b^2 + 2\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1 + b^2}{2} + \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \quad (18-2م) \end{aligned}$$

ماتریس چگالی  $\rho$  تنها به شرطی یک حالت ناب را توصیف می‌کند که  $\rho^2 = \rho$ ، یعنی اگر  $b^2 = 1$ . برای حالت آمیخته، از  $0 < b^2 < 1$  نتیجه می‌گیریم که  $b^2 < 1$ .

اکنون می‌خواهیم یک تعبیر فیزیکی برای  $\mathbf{b}$  به دست آوریم. مخلوطی از باریکه‌هایی با اسپین  $1/2$  را در نظر بگیرید. هر یک از باریکه‌ها الکترونهایی در راستای محور  $z$  یا  $x$  یا  $y$  دارند. کسری از ذرات را که در یک ویژه حالت  $\sigma_2$  با ویژه مقدار  $+1$  هستند با  $f_3^{(+)}$  نشان می‌دهیم؛ کسری را که در ویژه حالت  $\sigma_2$  با ویژه مقدار  $-1$  هستند با  $f_3^{(-)}$  نشان می‌دهیم، و غیره، به طوری که

$$f_3^{(+)} + f_3^{(-)} + f_1^{(+)} + f_1^{(-)} + f_2^{(+)} + f_2^{(-)} = 1 \quad (19-2م)$$

ویژه حالت‌های  $\sigma_x$ ،  $\sigma_y$  و  $\sigma_z$  با ویژه مقدارهای  $\pm 1$  عبارت‌اند از

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

بنابراین، ماتریس چگالی به [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$\begin{aligned} \rho = & f_r^{(+)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0) + f_r^{(-)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 1) + f_1^{(+)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}) \\ & + f_1^{(-)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2} \ -1/\sqrt{2}) + f_2^{(+)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2} \ -i/\sqrt{2}) \\ & + f_2^{(-)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2} \ i/\sqrt{2}) \end{aligned}$$

با کمی محاسبه، و با استفاده از م ۲-۱۹، این  $\rho$  به صورت زیر درمی آید

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sigma \cdot \mathbf{P} \quad (20-2م)$$

که در آن  $P_i = f_i^{(+)} - f_i^{(-)}$  کسری از ذرات در یک مخلوط که در جهت  $z$  هستند منهای کسری که در جهت  $-z$  هستند قطبش در راستای  $z$  نامیده می شود، و آن را با  $P_z$  نشان می دهیم. برای سایر راستاها نیز به همین ترتیب است. بنابراین، از مقایسه م ۲-۲۰ با م ۲-۱۸، می توان  $\mathbf{b}$  را بردار قطبش برآیند باریکه  $\mathbf{P}$  تعبیر کرد. در مورد باریکه های آنها با تکانه زاویه ای  $l$ ، کلی ترین صورت  $\rho$  یک ماتریس هرمیتی  $(2l+1) \times (2l+1)$  است، و تعبیر عناصر آن پیچیده تر است. بحث بیشتر درباره ماتریس چگالی فراتر از مجال این کتاب است.

## مبحث ویژه ۳

### تقریب و نرتل-کرامرز-بریلوئن

این روش تقریبی مخصوصاً وقتی مفید است که با پتانسیلهای کند تغییر سروکار داریم. معنای دقیق این بعداً روشن خواهد شد. هدف حل معادله زیر است

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (1-3م)$$

و برای این کار، مفید است که بنویسیم

$$\psi(x) = R(x) e^{iS(x)/\hbar} \quad (2-3م)$$

آنگاه

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} = \left[ \frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{dR}{dx} \frac{dS}{dx} + \frac{i}{\hbar} R \frac{d^2 S}{dx^2} - \frac{1}{\hbar^2} R \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 \right] e^{iS(x)/\hbar} \quad (3-3م)$$

پس از جاگذاری در ۱-۳م و تفکیک قسمتهای انگاری و حقیقی، این معادله دیفرانسیل به دو قسمت تقسیم می‌شود. از قسمت انگاری به دست می‌آوریم

$$R \frac{d^2 S}{dx^2} + 2 \frac{dR}{dx} \frac{dS}{dx} = 0 \quad (4-3م)$$



$$\frac{d}{dx} \left( \log \frac{dS}{dx} + \nu \log R \right) = 0$$

که جواب آن عبارت است از

$$\frac{dS}{dx} = \frac{C}{R^\nu} \quad (5-3م)$$

از قسمت حقیقی داریم

$$\frac{d^\nu R}{dx^\nu} - \frac{\nu}{h^\nu} R \left( \frac{dS}{dx} \right)^\nu + \frac{\nu m [E - V(x)]}{h^\nu} R = 0$$

که پس از جاگذاری م ۵-۳ به صورت زیر درمی آید

$$\frac{d^\nu R}{dx^\nu} - \frac{C^\nu}{h^\nu} \frac{\nu}{R^\nu} + \frac{\nu m [E - V(x)]}{h^\nu} R = 0 \quad (6-3م)$$

در اینجا تقریب زیر را به کار می بریم

$$\frac{\nu}{R} \frac{d^\nu R}{dx^\nu} \ll \frac{C^\nu}{h^\nu} \frac{\nu}{R^\nu} = \frac{\nu}{h^\nu} \left( \frac{dS}{dx} \right)^\nu \quad (7-3م)$$

و در نتیجه، با حذف جمله اول در م ۶-۳، به دست می آوریم

$$\frac{C^\nu}{R^\nu} = \nu m [E - V(x)] \quad (8-3م)$$

بنابراین

$$\frac{C}{R^\nu} = \frac{dS}{dx} = \sqrt{\nu m [E - V(x)]} \quad (9-3م)$$

و سرانجام

$$S(x) = \int_{x_0}^x dy \sqrt{\nu m [E - V(x)]} \quad (10-3م)$$

شرط اعتبار را می‌توان به گزاره‌ای دوباره تغییر  $\psi(x)$  تبدیل کرد. این شرط در صورتی برقرار است که  $V(x)$  در یک طول موج به‌کندی تغییر کند؛ طول موج از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند، اما برای پتانسیل کند تغییر  $V(x)$  با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\lambda(x) = \frac{\hbar}{p(x)} = \frac{\hbar}{\{2m[E - V(x)]\}^{1/2}} \quad (۱۱-۳م)$$

نقاطی که در آنها

$$E - V(x) = 0 \quad (۱۲-۳م)$$

نیاز به بررسی خاص دارد، زیرا چنانکه دیده می‌شود  $R(x)$  در معادله تقریبی م ۳-۸ در این نقاط تکین است. چون تابع موج و در نتیجه  $R(x)$  نمی‌تواند تکین باشد، تکینگی  $R(x)$  به معنای این است که تقریب م ۳-۷ در این نقاط ضعیف است. این نقاط ویژه را نقاط برگشت می‌نامند، زیرا در این نقاط است که ذره کلاسیک برمی‌گردد: ذره کلاسیک تنها در ناحیه  $E - V(x)$  می‌تواند حرکت کند. روش بررسی جوابها در نزدیکی نقاط برگشت تا اندازه‌ای فنی‌تر از آن است که در اینجا بیان کنیم. اساس کار این است که یک جواب در طرف چپ نقطه برگشت [ جایی که در آن  $E > V(x)$  ] به صورت زیر داریم

$$\psi(x) = R e^i \int_{x_1}^x dy \sqrt{(2m/\hbar^2)[E - V(y)]} \quad (۱۳-۳م)$$

و جوابی در طرف راست نقطه برگشت [ که در آن  $E < V(x)$  ] داریم، و فرمولی لازم داریم که بین آنها درونیایی کند. در حوالی نقطه برگشت می‌توان  $\sqrt{(2m/\hbar^2)[E - V(x)]}$  را با یک خط راست در یک بازه کوچک تقریب گرفت، و معادله شرودینگر را به‌طور دقیق حل کرد. چون این یک معادله مرتبه دوم است دو ثابت قابل تنظیم خواهیم داشت که یکی از آنها با برازش جواب به م ۳-۱۳ تعیین می‌شود و دیگری با برازش آن به

$$\psi(x) = R e^{-\int_{x_1}^x dy \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(y) - E]}} \quad (۱۴-۳م)$$

که جواب در طرف راست نقطه برگشت است.<sup>۱</sup> وقتی  $x$  افزایش می‌یابد دامنه جواب بالا کاهش

۱. برای تفصیل بیشتر می‌توانید به هر کتاب پیشرفته‌تری درباره مکانیک کوانتومی، از جمله دو کتاب زیر، مراجعه کنید. پاول، ج ل و کریسمن، ب، مکانیک کوانتومی، ترجمه پاشایی‌راد و سعادت، تهران مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸؛

I. I Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

می‌یابد. تضعیف کل در نقطه  $x_1$  و  $x_2$  به صورت  $\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$  می‌باشد. عبارت از  $E$  عبارت است از

$$\frac{\psi(x_2)}{\psi(x_1)} \simeq e^{-\int_{x_1}^{x_2} dy \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(y)-E]}} \quad (م-۱۵)$$

که دقیقاً جذر احتمال تراگسیل است که در فصل ۵ به دست آوردیم.

## مبحث ویژه ۴

### طول عمر، پهنای خط، و تشدید

در این بخش سه کار انجام می‌دهیم:

- (الف) با استفاده از رهیافت کلی وایسکوف و ویگنر، روش نسبتاً دقیقتری برای بررسی آهنگهای گذار بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه افت نمایی به وجود می‌آید.
- (ب) نشان می‌دهیم که چگونه شکل لورنتسی برای پهنای خط به وجود می‌آید.
- (ج) نشان می‌دهیم که دامنه پراکندگی فوتون از اتم در حالت پایه، وقتی انرژی فوتون فرودی برابر با انرژی (جاب‌جا شده) مربوط به حالت برانگیخته است، به شدت قله‌دار می‌شود.
- برای اینکه مسئله تا حد امکان ساده شود، اتمی را تنها با دو تراز، یکی حالت پایه با انرژی صفر و دیگری یک حالت برانگیخته با انرژی  $E$ ، در نظر می‌گیریم. این دو حالت به میدان الکترومغناطیسی، که آن را نرده‌ای می‌گیریم، جفت می‌شوند، و در نتیجه هیچ بردار قطبشی ظاهر نمی‌شود. تنها یک زیرمجموعه از ویژه‌حالت‌های  $H_0$  را انتخاب می‌کنیم که متشکل است از حالت برانگیخته  $\phi_1$  که برای آن

$$H_0 \phi_1 = E \phi_1 \quad (1-4m)$$

و حالت پایه به علاوه یک فوتون،  $\phi(\mathbf{k})$ ، که برای آن

$$H_0 \phi(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) \phi(\mathbf{k}) \quad (2-4m)$$

و در بسط یک تابع اختیاری به این زیرمجموعه بسنده می‌کنیم. این کار مسلماً وقتی موجه است که جفت‌شدگی میان دو حالت  $\phi_1$  و  $\phi(\mathbf{k})$  از طریق پتانسیل  $V$ ، مانند جفت‌شدگی الکترومغناطیسی،

کوچک باشد زیرا آنگاه تأثیر [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com) قابل چشمپوشی است. توجه کنید که حتی وقتی  $\mathbf{k}$  به گونه‌ای است که انرژیهای  $\epsilon(\mathbf{k})$  و  $E$  با هم برابرند، داریم

$$\langle \phi_1 | \phi(\mathbf{k}) \rangle = 0 \quad (3-4م)$$

این حالتها به این دلیل متعامدند که در یکی از آنها فوتون داریم و در دیگری نداریم، و نیز برای یکی از آنها اتم برانگیخته است و برای دیگری نیست. جواب معادله

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = (H_0 + V)\psi(t) \quad (4-4م)$$

را می‌توان برحسب مجموعه کامل بسط داد:

$$\psi(t) = a(t)\phi_1 e^{-iEt/\hbar} + \int d^3\mathbf{k} b(\mathbf{k}, t)\phi(\mathbf{k})e^{-i\epsilon(\mathbf{k})t/\hbar} \quad (5-4م)$$

با جاگذاری در م ۴-۴، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da}{dt} e^{-iEt/\hbar} \phi_1 + Ea e^{-iEt/\hbar} \phi_1 \\ + i\hbar \int d^3\mathbf{k} \frac{db(\mathbf{k}, t)}{dt} e^{-i\epsilon(\mathbf{k})t/\hbar} \phi(\mathbf{k}) + \int d^3\mathbf{k} \epsilon(\mathbf{k})b(\mathbf{k}, t)e^{-i\epsilon(\mathbf{k})t/\hbar} \phi(\mathbf{k}) \\ = Ea(t)e^{-iEt/\hbar} \phi_1 + \int d^3\mathbf{k} \epsilon(\mathbf{k})b(\mathbf{k}, t)e^{-i\epsilon(\mathbf{k})t/\hbar} \phi(\mathbf{k}) \\ + a(t)e^{iEt/\hbar} V \phi_1 + \int d^3\mathbf{k} b(\mathbf{k}, t)e^{-i\epsilon(\mathbf{k})t/\hbar} V \phi(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

حاصلضرب نرده‌ای با  $\phi_1$  را محاسبه می‌کنیم:

$$i\hbar \frac{da}{dt} = a(t)\langle \phi_1 | V | \phi_1 \rangle + \int d^3\mathbf{k} b(\mathbf{k}, t)e^{-i[\epsilon(\mathbf{k})-E]t/\hbar} \langle \phi_1 | V | \phi(\mathbf{k}) \rangle$$

چون  $V$  وقتی روی یک حالت عمل می‌کند تعداد فوتونها را بنابه فرض به اندازه ۱ تغییر می‌دهد، باید  $\langle \phi_1 | V | \phi_1 \rangle = 0$ . با نمادنگاری

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{k}) - E &= \hbar\omega(\mathbf{k}) \\ \langle \phi_1 | V | \phi(\mathbf{k}) \rangle &= M(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (6-4م)$$

$$i\hbar \frac{da(t)}{dt} = \int d^r \mathbf{k} b(\mathbf{k}, t) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} M(\mathbf{k}) \quad (۷-۴م)$$

اگر ضرب نرده‌ای در  $\phi(\mathbf{q})$  را انجام دهیم، و مجدداً با استفاده از شمارش تعداد فوتونها قرار دهیم  $\langle \phi(\mathbf{q}) | V | \phi(\mathbf{k}) \rangle = 0$ ، با توجه به رابطه بهنجارش

$$\langle \phi(\mathbf{q}) | \phi(\mathbf{k}) \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (۸-۴م)$$

معادله زیر را به دست می آوریم

$$i\hbar \frac{db(\mathbf{q}, t)}{dt} = a(t) e^{i\omega(\mathbf{q})t} M^*(\mathbf{q}) \quad (۹-۴م)$$

چون اگر حالت برانگیخته در  $t = 0$  اشغال شده باشد  $b(\mathbf{k}, 0) = 0$ ، جواب این معادله عبارت است از

$$b(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{i\hbar} M^*(\mathbf{k}) \int_0^t dt' e^{i\omega(\mathbf{k})t'} a(t') \quad (۱۰-۴م)$$

با جاگذاری در م ۷-۴ به معادله زیر می رسیم

$$\frac{da(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int d^r \mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \int_0^t dt' a(t') e^{i\omega(\mathbf{k})t'} \quad (۱۱-۴م)$$

اکنون فرض می کنیم جواب این معادله به ازای مقادیر بزرگ  $t$  به صورت زیر است

$$a(t) = a_0 e^{-zt} \quad (۱۲-۴م)$$

با جاگذاری در م ۱۱-۴ به دست می آوریم

$$\begin{aligned} -ze^{-zt} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int d^r \mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{e^{-i\omega(\mathbf{k})t}}{i\omega(\mathbf{k}) - z} (e^{i\omega(\mathbf{k})t} e^{-zt} - 1) \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int d^r \mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{i\omega(\mathbf{k}) - z} (e^{-zt} - e^{-i\omega(\mathbf{k})t}) \end{aligned} \quad (۱۳-۴م)$$

جمله دوم به ازای مقادیر بزرگ  $t$  صفر می شود، و نیز تابع زیر انتگرال حاصلضرب تابعی از  $k$  با تغییرات هموار و تابع کراندار است که به سرعت تغییر می کند، و می توان نشان داد که انتگرال بنابه کم ریمان-لیبگ سریعتر از هر توان  $1/t$  صفر می شود. بنابراین، آنچه باقی می ماند عبارت است از

$$z = \frac{1}{\hbar^2} \int d^3k |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{i\omega(\mathbf{k}) - z} \quad (14-4م)$$

اکنون می نویسیم

$$z = \frac{\gamma}{2} + \frac{i\Delta}{\hbar} \quad (15-4م)$$

و چون  $|M(\mathbf{k})|^2$  کوچک اند،  $\gamma$  و  $\Delta/\hbar$  نیز کوچک اند. با جاگذاری در م ۴-۱۴ و حذف حاصلضرب کوچکتر  $\Delta/\hbar$  و  $|M(\mathbf{k})|^2$ ، به دست می آوریم

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{i\Delta}{\hbar} = \frac{1}{\hbar^2} \int d^3k |M(\mathbf{k})|^2 \frac{-i\omega(\mathbf{k}) + \gamma/2}{(\gamma/2)^2 + (\omega(\mathbf{k}) - \Delta/\hbar)^2} \quad (16-4م)$$

با استفاده از رابطه

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2} = \pi \delta(\sigma) \quad (17-4م)$$

معادله م ۴-۱۶ به دو معادله زیر تفکیک می شود

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\pi}{\hbar} \int d^3k |M(\mathbf{k})|^2 \delta(\hbar\omega(\mathbf{k}) - \Delta) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \int d^3k |M(\mathbf{k})|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{k}) - (E + \Delta)) \end{aligned} \quad (18-4م)$$

و

$$\begin{aligned} \Delta &= - \int d^3k |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{\hbar\omega(\mathbf{k}) - \Delta} \\ &= \int d^3k |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{E + \Delta - \varepsilon(\mathbf{k})} \end{aligned} \quad (19-4م)$$

در هر دو انتگرال، می توان  $\Delta$  را در شناسه تابع دلتا و در مخرج کسر، با توجه به دقت محاسبه، حذف کرد، اما آن را نگه می داریم تا بر این نکته تأکید کنیم که این  $E + \Delta$  است که همه جا ظاهر

می‌شود، یعنی انرژی حالت برانگیخته به اندازه  $\Delta$  جابه‌جا شده است. بدین ترتیب، ضریب  $\phi_1$  در  $\psi(t)$ ، با شرط اولیه

$$a(0) = a_0 = 1 \quad (20-4م)$$

عبارت است از

$$a(t) = e^{-\gamma t/2} e^{-i(E+\Delta)t/\hbar} \quad (21-4م)$$

و احتمال یافتن  $\psi(t)$  در حالت اولیه  $\phi_1$  پس از زمان (طولانی)  $t$  برابر است با

$$|a(t)|^2 = e^{-\gamma t} \quad (22-4م)$$

از م ۱۸-۴ ملاحظه می‌کنیم که  $\gamma$  آهنگ افت است که در نظریهٔ اختلال محاسبه می‌شود. همچنین ضریب فاز، چنانکه مقایسه با ۱۶-۱۶ نشان می‌دهد، متضمن انرژی جابه‌جا شده به اندازهٔ جابه‌جایی انرژی اختلال مرتبهٔ دوم است. تنها تفاوت آن است که حالت‌های میانی که روی آنها جمع زده می‌شود در اینجا یک پیوستار تشکیل می‌دهند. چون مخرج کسر در م ۱۰-۴ می‌تواند صفر شود، باید از فرمول زیر استفاده کنیم

$$i\Delta/\hbar = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{-i\omega(\mathbf{k})}{\lambda^2 + (\omega(\mathbf{k}) - \Delta/\hbar)^2} \quad (23-4م)$$

کمیت قابل توجه دیگر احتمال تحول حالت  $\psi(t)$  به  $\phi(\mathbf{k})$  در  $t = \infty$  است. این احتمال برابر است با  $|b(\mathbf{k}, \infty)|^2$  که در آن بنابه م ۱۰-۴ و م ۱۲-۴ داریم

$$\begin{aligned} b(\mathbf{k}, \infty) &= \frac{1}{i\hbar} M^*(\mathbf{k}) \int_0^\infty dt' e^{-[z - i\omega(\mathbf{k})]t'} \\ &= \frac{M^*(\mathbf{k})}{i\hbar} \frac{1}{z - \omega(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$b(\mathbf{k}, \infty) = \frac{M^*(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}) - E - \int d^3\mathbf{k}' \frac{|M(\mathbf{k}')|^2}{E - \varepsilon(\mathbf{k}')} + i\hbar\gamma/2} \quad (24-4م)$$



و مجذور قدرمطلق آن عبارت [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

$$|b(\mathbf{k}, \infty)|^2 = \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{[\varepsilon(\mathbf{k}) - E - \Delta]^2 + (\hbar\gamma/2)^2} \quad (25-4م)$$

که شکل لورنتسی پهنای خط را می‌دهد: انرژی فوتون حول انرژی جابه‌جاشده تراز برانگیخته، با پهنایی که با  $\hbar\gamma/2$  توصیف می‌شود، متمرکز شده است.

همین شکل در مسئله پراکندگی ظاهر می‌شود. پراکندگی یک "فوتون" با تکانه  $\mathbf{k}_i$  را از اتمی در حالت پایه در نظر بگیرید. حالت دستگاه باز هم با  $m-1$ ،  $m-2$ ،  $m-3$  و  $m-4$  توصیف می‌شود، با این استثنا که در ابتدا، که در اینجا به معنای در  $t = -\infty$  است، حالت با  $\phi(\mathbf{k}_i)$  مشخص می‌شود، و از این رو

$$b(\mathbf{q}, t) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}_i) \quad t = -\infty \quad (26-4م)$$

بنابراین، با انتگرال گرفتن از  $m-4$  به دست می‌آوریم

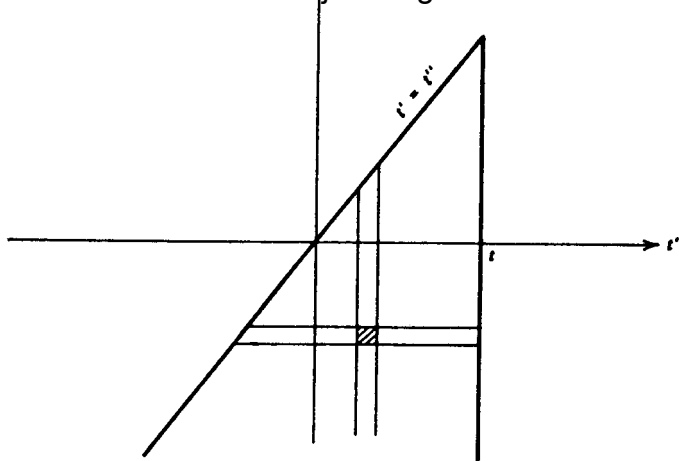
$$b(\mathbf{q}, t) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}_i) + \frac{1}{i\hbar} M^*(\mathbf{q}) \int_{-\infty}^t dt' a(t') e^{i\omega(\mathbf{q})t'} \quad (27-4م)$$

اکنون باید دامنه گذار به یک حالت نهایی را تعیین کنیم که در آن فوتون در  $t = +\infty$  دارای تکانه  $\mathbf{k}_f$  است. با استفاده از معادله بالا داریم

$$\begin{aligned} \langle \phi(\mathbf{k}_f) | \psi(+\infty) \rangle &= b(\mathbf{k}_f, +\infty) \\ &= \delta(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) - \frac{i}{\hbar} M^*(\mathbf{k}_f) \int_{-\infty}^{\infty} dt' a(t') e^{i\omega_f t'} \quad (28-4م) \\ (\omega_f &\equiv \omega(\mathbf{k}_f)) \end{aligned}$$

با جاگذاری  $m-4$  در  $m-4$  به معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} e^{-i\omega_i t} M(\mathbf{k}_i) - \frac{1}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 e^{-i\omega(\mathbf{k})t} \int_{-\infty}^t dt' a(t') e^{i\omega(\mathbf{k})t'} \quad (29-4م)$$



شکل م ۱-۴ انتگرال در معادله م ۳۰-۴ را می‌توان یا به صورت "مجموع" نوارهای قائم، مانند این معادله، یا به صورت مجموع نوارهای افقی، مانند معادله م ۳۲-۴، نوشت. از همین تغییر ترتیب در م ۳۳-۴ استفاده شده است بجز اینکه خط قائم در  $t'$  به  $+\infty$  منتقل شده است.

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت، و با توجه به اینکه  $a(-\infty) = 0$  به دست می‌آوریم

$$a(t) = \frac{M(\mathbf{k}_i)}{i\hbar} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_i t'} - \frac{1}{\hbar^2} \int d^r \mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega(\mathbf{k})t'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' a(t'') e^{i\omega(\mathbf{k})t''} \quad (\text{م } ۳۰-۴)$$

اما انتگرال  $\int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_i t'}$  خوش‌تعریف نیست. روش متعارف این است که آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^t dt' e^{-i(\omega_i + i\varepsilon)t'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \frac{e^{-i(\omega_i + i\varepsilon)t}}{\omega_i + i\varepsilon} \quad (\text{م } ۳۱-۴)$$

استفاده از ضریب همگرایی، که می‌توان بعداً آن را به صورت مناسبی صفر کرد، تا اندازه‌ای شبیه به در نظر گرفتن پتانسیل کولنی به عنوان حد پتانسیل کولنی استتار شده است، که در فصل ۲۳ به آن اشاره شد. اکنون با توجه به شکل م ۱-۴ می‌توان دید که

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega(\mathbf{k})t'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' a(t'') e^{i\omega(\mathbf{k})t''} = \int_{-\infty}^t dt' a(t') e^{i\omega(\mathbf{k})t'} \int_{t''}^t dt'' e^{-i\omega(\mathbf{k})t''}$$

$$= \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^t dt'' a(t'') [e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t'')} - 1]$$

و در نتیجه

$$a(t) = \frac{M(\mathbf{k}_i) e^{-i\omega_i t}}{h(\omega_i + i\varepsilon)} - \frac{i}{\hbar^{\nu}} \int d^{\nu} \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^{\nu}}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^t dt'' a(t'') [e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t'')} - 1] \quad (۳۲-۴م)$$

بنا به م ۴-۲۸، کمیت حائز اهمیت برای پراکندگی در جهتی غیر از جهت جلو (که در نتیجه می توان از جمله اول صرف نظر کرد) عبارت است از

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) e^{i\omega_f t} = \frac{M(\mathbf{k}_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega_f - \omega_i)t}$$

$$- \frac{i}{\hbar^{\nu}} \int d^{\nu} \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^{\nu}}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega_f t} \int_{-\infty}^t dt'' a(t'') [e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t'')} - 1]$$

$$= \frac{\nu \pi M(\mathbf{k}_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} \delta(\omega_f - \omega_i) \quad (۳۳-۴م)$$

$$- \frac{i}{\hbar^{\nu}} \int d^{\nu} \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^{\nu}}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' a(t'') \int_{t''}^{\infty} dt \{ e^{i\omega(\mathbf{k})t''} e^{i[\omega_f - \omega(\mathbf{k})t]} - e^{i\omega_f t} \}$$

که در آن در سطر آخر باز هم انتگرال را با استفاده از شکل م ۴-۱ نوشته ایم. انتگرال گیری روی  $t$  را باز هم می توان با استفاده از روش ضریب همگرایی انجام داد، و در نتیجه م ۴-۳۳ به صورت زیر درمی آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) e^{i\omega_f t} = \frac{\nu \pi M(\mathbf{k}_i) \delta(\omega_f - \omega_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} + \frac{1}{\hbar^{\nu}} \int d^{\nu} \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^{\nu}}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' a(t'') e^{i\omega_f t''}$$

$$\times \left[ \frac{1}{\omega_f - \omega(\mathbf{k}) + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega_f + i\varepsilon} \right]$$

که در واقع معادله‌ای برای یک تابش پهنای خط است! از سوی این معادله می‌آوریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t)e^{i\omega_f t} = \frac{\gamma \pi M(\mathbf{k}_i) \delta(\omega_f - \omega_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} \quad (34-4p)$$

$$\times \frac{1}{1 - \frac{1}{\hbar^2 \omega_f} \int d^r \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\omega_f - \omega(\mathbf{k}) + i\varepsilon}}$$

بنابراین، برای جهت غیر جلو به دست می‌آوریم

$$b(\mathbf{k}_f, \infty) = -\frac{i}{\hbar} M^*(\mathbf{k}_f) \cdot \gamma \pi M(\mathbf{k}_i) \delta(\omega_f - \omega_i)$$

$$\times \frac{1}{\hbar \omega_i + i\varepsilon - \int d^r \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\hbar \omega_f - \hbar \omega(\mathbf{k}) + i\varepsilon}} \quad (35-4p)$$

$$= \frac{-\gamma \pi i \delta(\hbar \omega_f - \hbar \omega_i) M(\mathbf{k}_i) M^*(\mathbf{k}_f)}{\varepsilon(\mathbf{k}_i) - E - \int d^r \mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\varepsilon(\mathbf{k}_i) - \varepsilon(\mathbf{k})} + i\pi \int d^r \mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \delta[\varepsilon(\mathbf{k}_i) - \varepsilon(\mathbf{k})]}$$

وقتی انرژی فرودی  $\varepsilon_i$  (مساوی با انرژی نهایی  $\varepsilon_f$ ) نزدیک به انرژی حالت برانگیخته اتم است، که مانند م ۲۵-۴ به  $E + \Delta E$  جابه‌جا شده است، دامنه قله تیزی پیدا می‌کند. این نتیجه تفسیرهای آخر فصل ۱۸ را تأیید می‌کند.

www.arsanjan.blogfa.com<sup>۱</sup> ثابتهای فیزیکی

$۶.۰۲۲۱۳۶۷(۳۶) \times 10^{23} \text{mol}^{-1}$	$N_0$ (عدد آووگادرو)
$۲.۹۹۷۹۲۴۵۸ \times 10^{10} \text{cms}^{-1}$	$c$ (سرعت نور، تعریف)
$۱.۶۰۲۱۷۷۳۳(۴۹) \times 10^{-19} \text{C}$	$e$ (بار الکترون)
$۴.۸۰۶۵۳۱۹۹(۱۵) \times 10^{-10} \text{esu}$	
$۱.۶۰۲۱۷۷۳۳(۴۹) \times 10^{-6} \text{erg}$	۱MeV
$۱.۰۵۴۵۷۲۶۶(۶۳) \times 10^{-27} \text{erg}\cdot\text{s}$	$\hbar$ (ثابت پلانک بخش بر $2\pi$ )
$۶.۵۸۲۱۲۲۰(۲۰) \times 10^{-22} \text{MeV}\cdot\text{s}$	
$1/137.۰۳۵۹۸۹۵(۶۱)$	$\alpha$ (ثابت ساختار ریز $e^2/\hbar c$ )
$۱.۳۸۰۶۵۸(۱۲) \times 10^{-16} \text{erg}\cdot\text{K}^{-1}$	$k$ (ثابت بولتزمن)
$۹.۱۰۹۳۸۹۷(۵۴) \times 10^{-28} \text{g}$	$m_e$ (جرم الکترون)
$۰.۵۱۰۹۹۹۰۶(۱۵) \text{MeV}/c^2$	
$۱.۶۷۲۶۲۳۱(۱۰) \times 10^{-24} \text{g}$	$m_p$ (جرم پروتون)
$۹۳۸.۲۷۲۳۱(۲۸) \text{MeV}/c^2$	
$۱.۶۷۴۹۲۸۶(۱) \times 10^{-24} \text{g}$	$m_n$ (جرم نوترون)
$۹۳۹.۵۶۵۶۳(۲۸) \text{MeV}/c^2$	
$۱.۶۶۰۵۴۰۲(۱۰) \times 10^{-24} \text{g}$	$(m(C^{12})/12) \text{amu}$
$۹۳۱.۴۹۴۳۲(۲۸) \text{MeV}/c^2$	
$۰.۵۲۹۱۷۷۲۴۹(۲۴) \times 10^{-8} \text{cm}$	$(\hbar/m_e c \alpha) a_0$
$۱۳.۶۰۵۶۹۸(۴۰) \text{eV}$	$(m_e c^2 \alpha^2/2) R_\infty$
$۶.۶۷۲۵۹(۸۵) \times 10^{-8} \text{cm}^2 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}$	$G$ (ثابت گرانش)
$۰.۵۷۸۸۳۸۲۶۳(۵۲) \times 10^{-18} \text{MeV G}^{-1}$	$\mu_B$ (مگنتون بور $e\hbar/2m_e c$ )

۱. اعداد از مقاله بسیار جالب زیر اقتباس شده‌اند:

## مراجع<sup>۱</sup>

G Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1969.

کتابی است بسیار جذاب، با تعادل مناسبی بین صورتبندی، استدلالهای شهودی و کاربرد. این کتاب را باید پیشرفته در نظر گرفت، و قابل فهم برای دانشجویی که مطالب کتاب حاضر را فراگرفته است.<sup>۱</sup>

H A Bethe and R W Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics* (2nd edition), W A Benjamin, New York, 1968.

این کتاب حاوی بحثهای مفصلی درباره روشهای محاسباتی قابل کاربرد در نظریه ساختار اتمی، شکافتگیهای چند تایی، اثر فوتوالکتریک و برخوردهای اتمی است. بسیاری از مطالب در کتابهای درسی دیگر یافت نمی‌شوند، و از این رو یک کتاب درسی پیشرفته و همچنین یک مرجع جامع است.

H A Bethe and E E Salpeter, *Quantum Mechanics of One -and Two- Electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlin/ New York, 1957.

این تجدید چاپ مقاله مؤلفان در *Handbuch der Physik* یک بررسی دقیق، مفصل و قاطع از مسئله مورد نظر است. این کتاب درباره آنهاست نه مکانیک کوانتومی، و سطح آن بالاست. این مقاله یک مرجع عالی است.

D Bohm, *Quantum Theory*, Dover Publ, New York, 1989.

این کتابی است در سطح کتاب حاضر، که با سبکی پراکنده نوشته شده است. مؤلف توجه بسیاری به اصول نظریه کوانتومی دارد و یک بحث عالی درباره نظریه کوانتومی فرایند اندازه‌گیری ارائه می‌کند. چند کاربرد بیان شده‌اند و تعداد مسائل اندک است.

۱. کتابهای بسیاری در (بارۀ) مکانیک کوانتومی نوشته شده‌اند. بعضی از آنها را مطالعه کرده‌ام، بعضی را خوانده‌ام، چندتایی را نگاه کرده‌ام، و احتمالاً تعدادی نیز از نظرم دور مانده‌اند. سیاهه‌ای که در اینجا ارائه کرده‌ام جامع نیست، و اگر اسمی از کتابی برده نشده است به معنای انتقاد از آن نیست. مخصوصاً کتابهای شیمی کوانتومی معرفی نشده‌اند.

S Borowitz, *Fundamentals of Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1967.

این کتابی است که بسیار خوب نوشته شده است و حدود نیمی از آن به نظریهٔ امواج و مکانیک کلاسیک اختصاص یافته است. سطح آن قابل مقایسه با کتاب حاضر است.

J J Brehm and W J Mullin, *Introduction to the Structure of Matter*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

این کتابی است پیشرفته و فراگیر که قسمت اعظم فیزیک نوین را با سبکی بسیار خواندنی دربر می‌گیرد. یک مرجع عالی برای هر کس که خواهان تفصیل کیفی‌تری برای مباحثی است که در کتاب حاضر شتابزده به آنها اشاره شده است.

E U Condon and G H Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1959.

این یک مرجع بسیار مفصل دربارهٔ تمام جوانب طیفهای اتمی است، اگرچه از روشهای جدید مبتنی بر نظریهٔ گروه استفاده نمی‌کند. این کتاب بسیار پیشرفته است، و از این رو نارساییهای آن در توسعهٔ روشها برای هیچکس بجز متخصصان اهمیتی ندارد. برای دانشجو بسیار مفید است.

S Braudt and H D Dahmen, *Quantum Mechanics on the Personal Computer* (3rd edition), Springer-Verlag, New York, 1994.

این کتاب که در آن کامپیوترهای شخصی ابزار اصلی آموزش مکانیک کوانتومی است تنها کتابی است از این نوع که من دیده‌ام. چون کامپیوترهای شخصی روز به روز متداولتر می‌شوند و دانشجویان به استفاده از آنها بیشتر عادت می‌کنند، بهره گرفتن از آنها برای یافتن جوابهای معادلهٔ شرودینگر امری اجتناب‌ناپذیر است.

C Cohen-Tannoudji, B Diu, and F Laloe, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1977.

این کتابی است دانشنامه مانند با بیشتر از هزار صفحه، که در آن بررسی مفصلی از بسیاری از جوانب فیزیک اتمی یافت می‌شود. سطح ریاضی آن تا حد زیادی بالاتر از کتاب حاضر است.

R H Dicke and J P Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1960.

از این کتاب بسیار لذت برده‌ام. سطح آن قابل مقایسه با کتاب حاضر است، و چند مبحث که در اینجا بیان نشده‌اند، مخصوصاً آمار کوانتومی، را بررسی می‌کند. مسائل آن عالی هستند.

P A M Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (4th edition), Oxford University Press (Clarendon), Oxford, 1958.

کتابی است بس عالی از یکی از پدیدآورندگان اصلی مکانیک کوانتومی. دانشجویی که مطالب کتاب حاضر را مطالعه کرده است مشکلی با کتاب دیراک نخواهد داشت، و اگر جداً خواهان مهارت در مکانیک کوانتومی باشد باید دیر یا زود به مطالعه آن پردازد.

R P Feynman and A R Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

در سال ۱۹۴۸، ریچارد فیلیپس فاینمن فرمولبندی متفاوتی برای مکانیک کوانتومی ارائه کرد. در این کتاب هم‌ارزی این فرمولبندی با نظریهٔ متعارف نشان داده شده است، و در چند محاسبه از بیان "انتگرال مسیر" برای دامنهٔ کلی استفاده شده است. انتخاب مطالب بسیار جالب توجه است. دیدگاه کتاب با دیدگاه کتاب حاضر تفاوت دارد، و از این رو این کتاب نسبتاً پیشرفته‌تر می‌تواند یک مکمل عالی برای کتاب حاضر باشد.

R P Feynman, R B Leighton, and M Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol 3, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.

در این مقدمه بر مکانیک کوانتومی، فاینمن انتگرال مسیر را کنار گذاشته است و موضوع را از دیدگاه بردارهای حالت مطرح می‌کند. تعداد زیادی مثال جذاب با حداقل ابزار ریاضی بررسی شده‌اند. یک مکمل عالی که تنها کمبود آن مسائل آخر فصل است.

K Gottfried, *Quantum Mechanics*, Vol 1, *Fundamentals*, W A Benjamin, New York, 1966.

این یک کتاب بسیار پیشرفته است که وجه تمایز دقتی است که با آن مباحث گوناگون بررسی شده‌اند. بررسی فرایند اندازه‌گیری و اصول ناوردایی عالی است. دانشجویی که به مطالب کتاب حاضر احاطه یافته است باید بتواند کتاب گاتفرید را بخواند، به شرط اینکه ریاضیات مورد نیاز را بداند.

D Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J 1995.

این کتاب جذاب بسیار خوب نوشته شده است و تقریباً در سطح دیکی و ویتکه یا ساکسون است، با انتخاب خوبی از مباحث، از جمله بحثی دربارهٔ فاز هندسی.

W Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover, New York, 1930.



این تجدید چاپ سخنرانیهای [www.arsanjaniblogfa.com](http://www.arsanjaniblogfa.com) فیزیکی نظریه کوانتومی هنوز هم خواندنی است. بحث روابط عدم قطعیت مخصوصاً مفید است.

H A Kramers, *Quantum Mechanics*, Interscience, New York, 1957.

این کتابی است از یکی از پایه‌گذاران موضوع که بهترین قسمتهای آن بحث اسپین و درآمدی بر نظریه کوانتومی نسبیتی است، که هر دو نسبتاً پیشرفته‌اند. دانشجویی که مشکلی با مکانیک کوانتومی ندارد پراکنده خوانی این کتاب را لذت‌بخش و آموزنده خواهد یافت

L D Landau and E M Lifshitz, *Quantum Mechanics (Nonrelativistic Theory)* (2nd edition), Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.

این کتاب لاندائو و لیف‌شیتز کتابی از یک دوره بس عالی است که تمام فیزیک نظری را در بر می‌گیرد، و به‌سختی می‌توان گفت که یک کتاب درسی برای دانشجویان است مگر پیشرفته‌ترین آنها. اما هر دانشجویی که به سطح عالی رسید در این کتاب چیزهای مفید زیادی خواهد یافت. دانشجو از لحاظ ریاضی با مشکلی روبه‌رو نخواهد شد.

Richard L Liboff, *Introductory Quantum Mechanics*, Holden-Day, San Francisco, 1980.

این کتابی است بسیار جذاب که تقریباً در سطح ریاضی یکسانی با کتاب حاضر نوشته شده است، و بسیاری از مطالب دوسوم اول کتاب حاضر را با تفصیل بیشتری در برمی‌گیرد. این هم یک مرجع عالی است.

Harry J Lipkin, *Quantum Mechanics – New Approaches to Selected Topics*, North- Holland, Amsterdam, 1973.

این کتاب به تعدادی از مباحث پیشرفته در کاربرد مکانیک کوانتومی با بیانی ساده پرداخته است. فیزیک همیشه مهمترین قسمت بحث است، و دانشجویی که بر کتاب حاضر مسلط است از آن لذت و بهره فراوانی خواهد برد.

A Messiah, *Quantum Mechanics* (in 2 volumes), John Wiley & Sons, New York, 1968.

این کتاب پوشش کاملی از نظریه کوانتومی، از بررسی پتانسیلهای یک‌بعدی تا کوانتوم میدان الکترومغناطیسی و معادله موج نسبیتی دیراک، است. کتابی است پیشرفته، و از لحاظ پیچیدگی ریاضی در حد دانشجویان کارشناسی ارشد است. این کتاب فوق‌العاده با ارزش است.

E Merzbacher, *Quantum Mechanics* (3rd edition), John Wiley & Sons, New York, 1998.

این کتاب همراه با کتاب شیفت به حق، کتاب درستی متعارف برای سال اول کارشناسی ارشد است. گستره کامل مفاهیم و پدیده‌ها با ایجاز و سلیقه بررسی شده است، و برای دانشجویی که مطالب کتاب حاضر را مطالعه کرده است قابل استفاده است.

R. Omnes, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N J, 1994.

یک کتاب مهم که به کارهای اخیر در گسترش تعبیر متعارف مکانیک کوانتومی می‌پردازد.

D Park, *Introduction to the Quantum Theory*, (3rd edition) McGraw-Hill, New York, 1984.

این کتاب جذاب در سطح کتاب حاضر نوشته شده است. از میان مباحث مورد بررسی، موضوع آمار کوانتومی است، که کتاب حاضر فاقد آن است، و با روشنی ارائه شده است.

W Pauli, *Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik Handbuch der Physik*, Vol 5/1, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1958.

دانشجوی پیشرفته‌ای که آلمانی می‌داند در این تجدید چاپ مقاله پاولی در سال ۱۹۳۰ بحث قاطع و فشرده‌ای از مکانیک کوانتومی خواهد یافت. هیچ کاربردی ذکر نشده است. اما تمام مطالب مهم در آن دیده می‌شود.

P J E Peebles, *Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N J, 1992.

این کتاب درسی است که با قلمی شیوا در سطح کارشناسی نوشته شده است. تفاوت آن با کتابهای دیگر در این سطح (بجز کتاب بوهم) بحث مفصلی است درباره اینکه فرایند اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی واقعاً چه معنایی دارد.

A B Pippard, *The Physics of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1978.

این کتاب تمام انواع نوسانگرها، کلاسیک و مکانیک کوانتومی، را در برمی‌گیرد. به معنای متداول، کتاب درسی نیست، اما خواندن آن لذت‌بخش است.

J L Powell and B Crasemann, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1961.

قوت این کتاب در بررسی موشکافانه تمام جزئیات ریاضی مکانیک موجی و مکانیک ماتریسی است. احتمالاً تمام جنبه‌های ریاضی موضوعاتی که در کتاب حاضر نادیده گرفته شده‌اند در این کتاب یافت می‌شوند. حاوی بحث خوبی درباره تقریب WKB و خواص عمومی معادلات

دیفرانسیل مرتبه دوم است. [www.arsanjanart.blogfa.com](http://www.arsanjanart.blogfa.com) درینها بیشتر از تعداد مسائل است.

M E Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, New York, 1937.

بررسی پیشرفته‌ای از تکانه زاویه‌ای و کاربردهای فراوان در فیزیک اتمی و هسته‌ای.

J J Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (S. F. Editor), Addison-Wesley, Reading, Mass, 1994.

این کتاب عالی را ساکورایی فقید در سطح نسبتاً پیشرفته‌تری از کتاب حاضر، مانند کتابهای مرزباخر و شیف، نوشته است. این کتاب درسی سال اول کارشناسی ارشد با انتخاب مباحثی که طبعاً به مکانیک کوانتومی پیشرفته مورد علاقه فیزیکدانهای ذرات بنیادی کشیده می‌شود سبک نوینی دارد. کتاب حاوی مجموعه‌ای عالی از مسائل است.

D S Saxon, *Elementary Quantum Mechanics*, Holden-Day, San Francisco, 1968.

این کتاب در سطح کتاب حاضر و مرجع مفیدی است، زیرا انتخاب مباحث تنها کمی تفاوت دارد، و همچنین تأکید و انتخاب کاربردها. کتاب حاوی مجموعه‌ای عالی از مسائل است.

L I Schiff, *Quantum Mechanics* (3rd edition), McGraw-Hill, New York, 1968.

این یکی از کتابهای درسی متعارف برای سال اول کارشناسی ارشد است. شاید کمی بیش از حد فشرده باشد، و از این رو برای دانشجویی که آمادگی کامل دارد از همه مناسبتر است. پیچیدگی ریاضی آن از سطح کتاب حاضر بالاتر است.

F Schwabl, *Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1992.

این یک کتاب پیشرفته‌تر با انتخاب جالبی از مباحث است.

R Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York, 1980.

این کتابی است پیچیده‌تر و از لحاظ ریاضی پیشرفته‌تر از کتاب حاضر، که حاوی بررسی جانشینی برای بعضی از مباحث این کتاب است، و مرجع خوبی است.

M P Silverman, *And Yet it Moves; Strange Systems and Subtle Questions in Physics*, Cambridge University Press, New York, 1993.

این کتاب به بررسی کیفی مباحثی می‌پردازد که اصول اساسی نظریه کوانتومی را تشکیل می‌دهند. خواندن این کتاب برای دانشجویی که قسمت بیشتر کتاب حاضر را خوانده باشد کاملاً قابل درک و سرگرم‌کننده است.

[www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com)

## فهرست راهنما

- آزمایش
- پراش دیوسون-گرم ۲۰، ۲۱
- پراش نوترون ۲۱
- دوشکافی ۲۹، ۴۵
- ذهنی ۲۹
- آستانه پراکندگی ۵۱۲
- آمار
- بوز-اینشتین ۱۹۶
- فرمی-دیراک ۱۹۶
- آهنگ افت ۵۷۷
- اتم
- بور ۲۲، ۲۸
- دوترازی در میدان الکتريکی ۴۷۸
- هلیوم ۳۷۴
- اثرات اصل طرد در سه ۳۷۷
- در اثر دافعه الکترون-الکترون ۳۷۸
- در اورتوهلیوم (سه‌تایی) و پاراهلیوم (تکتایی) ۳۸۵
- در برهم‌کنش تبادل ۳۸۱، ۳۸۲
- در جابه‌جایی تا مرتبه اول ۳۷۸
- در حالت پایه ۳۸۸
- هیدروژن ۲۶۰
- الگوی بور در ~ ۲۴، ۲۵
- در اثرات انرژی جنبشی نسبی ۳۵۹
- در اثرات جرم کاهیده ۳۷۰
- در جفت‌شدگی اسپین-مدار ۳۵۹
- طیف انرژی ~ ۲۶۱
- مدار دایره‌ای در نظریه کوانتومی ~ ۲۶۸
- معادله شعاعی ~ ۲۶۰
- واگنی طیف ~ ۲۶۴
- اثر
- آهارانوف-بوهم ۲۹۴، ۲۹۷
- اشتارک ۳۴۷
- برای حالت‌های  $n = 2$  ۳۵۰
- در تکانه دوقطبی دائمی ۳۴۸
- در دلیل وجود جمله دوم ۳۴۸
- قطبش‌پذیری ~ ۳۵۰
- اصل طرد ۲۰۷
- انرژی جنبشی نسبی ۳۵۹
- بهنجار زیمان ۲۸۲
- تبادل در هلیوم ۳۸۲، ۳۸۳
- حرکت تقدیمی و توماس ۳۶۰
- رامسائر و تاونزند ۱۰۰
- فوتوالکتريک ۱۵

۳۸۵ ~ وردشی

۵۳۴ ~ عامل زاویه‌ای

~ برای ساختار آنها ۳۹۴

~ کامپتون ۱۷

~ برای مولکول  $H_2$  ۴۱۳، ۴۱۴

~ در فرمول کلاین-نیشینا ۵۳۷

~ ریتز ۳۸۵، ۳۹۵

طول موج ~ ۲۰

~ ریلی-ریتز ۳۸۱، ۳۸۵

~ کوانتومی هال ۲۹۱

اعداد

~ مایسنر ۲۹۵

~ جادویی ۲۳۲

~ موسباور ۴۸۶

~ کوانتومی ۲۸

~ برای استفاده در انتقال به سرخ‌گرانشی

الکترون جفت شده ۴۲۳

۴۹۱

الگوی

~ نابهنجار زیمان ۳۶۴

~ اتمی رادرفورد ۲۲، ۲۳

احتمال

~ گرونیگ-پنی ۱۲۵

~ تراگسیل ۵۷۲

انتشار بسته‌های موج ۳۸

~ گذار ۴۳۸

انتقال فاز ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶

اختلال واگنی برای اثر اشتارک خطی ۳۵۰

~ برای پراکندگی چاه مربعی ۵۰۴، ۵۰۵

ارتعاش

انتگرال

~ مولکولها ۴۲۹

~ پذیری مجذوری توابع موج ۵۵

~ هسته‌ها در مولکولها ۴۲۹

~ فوریه ۳۷، ۵۴۳

اسپین

~ همپوشی ۲۰۰

~ تکتایی ۳۲۶

انرژی

~ سه‌تایی ۳۲۶

~ فرمی ۱۰۵، ۲۰۹

~ و قاعده‌های شدت ۴۵۷

~ نقطه صفر ۱۳۷

اسپینورها ۳۱۰

~ همپاری ۱۰، ۱۱

استار بار هسته‌ای ۳۸۱

اوربیتالها ۳۸۴، ۴۱۹، ۴۲۰

اصل

اورتولیم (سه‌تایی) ۳۸۵

~ بسط و تعبیر ۷۷

اهمیت فازها ۵۵

ضریب ~ ۷۹، ۱۴۷، ۱۴۸

بردار پتانسیل ۲۷۶

~ پاؤلی ۱۹۵، ۱۹۶

~ برای ثابت میدان مغناطیسی ۲۸۰، ۲۸۹

~ در حالت‌های دو اسپینور ۳۳۶، ۳۳۷

~ برای گسیل و جذب فوتون ۴۴۰، ۴۶۶

~ در حالت‌های دو اسپینور ۳۳۶، ۳۳۷

۳۳۸

بسامد

~ تشکیل ۳۹۹

~ دبی ۴۸۹

~ تطابق ۲۸

~ رایبی ۴۸۲

~ بور ۲۸

~ سیکلوترون ۳۱۵

~ در آهنگ واپاشی ۳۴

~ لارمور ۲۸۲

~ عدم قطعیت هایزنبرگ ۳۰

~ مربوط به چگالی دو قطبی تابشی ۴۵۸

- بسته‌های موج ۳۶  
 انتشار ~ ۳۸  
 ~ پهن ۴۱  
 پهنای ~ ۳۸، ۳۷  
 ~ گاوسی ۳۸، ۳۷  
 ~ معادله شرویدینگر ۴۱  
 ~ و قله نامتناهی ۸۴  
 بوزون ۱۹۶
- پاراهلیم (تکتایی) ۳۸۵  
 پاریته ۸۶  
 ~ در تابع موج ۳۳۷  
 ~ در یک پیون کند ۳۳۷  
 پایستگی  
 ~ احتمال ۵۷  
 ~ تکانه ۱۸۶
- ~ در ناوردایی هامیلتونی ۱۸۸  
 ~ زاویه‌ای انرژی ۷۰  
 ~ زاویه‌ای پاریته ۸۷  
 ~ کل ۱۸۸  
 ~ شار در معادله شعاعی ۴۹۴  
 پتانسیل  
 ~ الکترومغناطیسی ۲۷۶  
 ~ بی‌دررو ۴۳۷  
 ~ تابع دلنا ۱۱۸، ۹۶  
 ~ جعبه در جعبه دوار ۲۳۱  
 ~ دوره‌ای ۱۲۵  
 ~ کولنی ۵۱۷  
 ~ وابسته به اسپین ۳۲۸  
 پدیده
- آستانه طول ~ ۵۱۲  
 ~ از قرص سیاه ۵۰۱  
 ~ اورتو- $H_2$  و پارا- $H_2$  ۵۱۴  
 ~ تشدید ۵۰۶  
 ~ در فرمول برایت-ویگنر ۵۰۷  
 ~ در اتمهای شبکه ۵۲۱  
 ~ در انرژیهای کم ۵۰۴  
 ~ در تقریب بورن ۵۱۵  
 ~ در چاه مربعی ۵۰۴  
 ~ ذرات یکسان ۵۱۹  
 ~ سایه ۵۰۲  
 ~ کشسان ۴۹۹  
 ~ موج s برای چاه مربعی ۵۰۹  
 ~ میدان کولنی ۵۱۷  
 ~ ناکشسان ۵۰۲  
 ~ نوترن-فوتون ۵۱۲  
 ~ وابسته به اسپین ۵۱۲  
 ~ همدوس بلور ۵۲۲  
 پس‌زنی در اثر موسباؤر ۴۹۰  
 پله پتانسیل ۹۴  
 ~ بازتابیده ۹۷  
 پمپاژ اپتیکی ۴۷۲  
 پوزیترون ۵۳۸  
 پهن‌شدگی دوپلری ۴۷۴  
 پیامدهای ناوردایی چرخشی ۲۱۷  
 تابش  
 ~ اتمی ۴۳۴  
 ~ در تابش چارقفی الکتریکی ۴۵۳  
 ~ در تابش دوقطبی الکتریکی ۴۵۲  
 ~ در تابش دوقطبی مغناطیسی ۴۵۳  
 ~ در نظریه اختلال ۴۳۴  
 ~ به صورت کوانتومی ۱۲  
 ~ جسم سیاه ۶  
 ~ پراکندگی از قرص سیاه ۵۰۱  
 ~ تونل‌زنی ۱۰۴  
 ~ در حالت ابررسانایی ۱۰۸  
 ~ میکروسکوپی (STM) ۱۰۶  
 ~ فرومغناطیسی در بسط هایزنبرگ ۳۸۳

- چگالی انرژی ~ ۴۷۰  
 قانون ریلی-جینز در ~ ۹  
 قانون وین در ~ ۹  
 میکروموج کیهانی زمینه ۱۳  
 تابع
- بسل ۲۹۹  
 کروی ۲۲۸  
 دلتا ۵۴۳  
 دیراک ۸۱  
 کار ۱۶، ۱۵  
 موج ۱۹۵  
 پادمقارن ۱۹۵  
 حالت‌های یاریده ۴۵۸  
 دامنه مکان ۱۷۳  
 در فضای تکانه ۶۰  
 دوره‌ای ۱۲۶، ۴۴۴  
 فاز ۵۶، ۵۵  
 مستقل از زمان ۷۰  
 نویمان کروی ۲۲۸  
 هنکل کروی ۲۲۹  
 تبدیل داخلی ۴۶۴  
 تداخل سنج فابری-برو ۱۰۰  
 ترازهای لاندائو ۲۸۹  
 تشدید پارامغناطیسی ۳۱۶  
 تعبیر احتمالاتی ۵۴، ۵۳  
 تغییر
- در پراکندگی تشدید ۵۰۶  
 کوآنتوم-الکترو دینامیکی ۴۴۳  
 تقارن هامیلتونی ۸۷، ۸۸  
 تقریب
- بورن ۵۱۵  
 در پراکندگی کولن ۵۱۷  
 محدودیت‌های ~ ۵۱۹  
 دوقطبی الکتریکی ۴۴۹  
 قاعده گزینش در ~ ۴۵۱
- ~ موج چرخان ۴۸۰  
 و نترز-کرامرز-بیرلوئن ۱۰۳، ۵۶۹  
 تکانه
- دوقطبی دائمی ۳۴۸  
 زاویه‌ای ۲۴۰  
 اسپین ۳۱۰  
 پایسته کل ۱۸۸  
 توابع ویژه ~ ۲۴۹  
 در اصول موضوعه بور ۲۳، ۲۴  
 رابطه جابه‌جایی ~ ۲۲۰  
 عملگر ~ ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۴۰، ۲۴۱  
 عملگر افزایشنده و کاهشنده برای ~ ۲۴۵  
 ماتریس ۳۰۵  
 و ناوردایی پایستگی تحت چرخش  
 ۲۱۸، ۲۱۹  
 ویژه‌مقدارهای ~ ۲۴۸  
 طیف پیوسته ۸۱  
 فوتون ۱۸  
 موج الکترومغناطیسی ۱۸  
 ویژه‌تابع بهنجار ۱۴۷  
 توان گسیل ۶  
 توزیع
- احتمال بولتزمن ۱۱  
 پلانک ۹، ۱۰  
 توصیف طیف نمایی حالت‌های پایه ۴۰۳  
 در قاعده هوند ۴۰۳  
 تونل زنی ۱۰۸  
 در ابررساناها ۱۰۸  
 در سد پتانسیل ۱۰۹، ۱۱۰  
 در گسیل سرد ۱۰۵  
 در واپاشی آلفا ۱۰۹
- ثابت
- پلانک ۹، ۱۰، ۲۴، ۲۵  
 حرکت ۸۷



- ~ ساختار ریز ۲۶  
 ~ های فیزیکی ۵۸۲
- ~ در حالت سه بعدی حالت‌های مقید ۲۳۳  
 ۲۳۵
- چرخش مولکولها ۴۲۸  
 چرخنده در معادله ویژه مقدری ۲۴۴  
 چگالی
- ~ انرزی الکترومغناطیسی ۴۴۲  
 ~ دوقطبی تابشی ۴۵۷، ۴۵۸  
 ~ واسپین ۴۵۷  
 چند جمله‌ای
- ~ لاگر ۲۶۶  
 اصل وردشی در ~ ۳۹۶  
 ~ لژاندر ۲۵۱  
 ~ هرمیت ۱۳۵
- حاصلضرب زده‌ای ۱۵۰  
 حالت
- ~ پادمتقارن ۱۹۵  
 ~ پایا ۲۴، ۳۵۵، ۴۷۲  
 ~ پایه ۲۰۰  
 ~ برای ذرات آزاد در یک جعبه ۲۰۰  
 ~ ذره در جعبه ۷۵  
 ~ شبه پایدار ۴۷۲، ۴۷۳  
 ~ مقید در چاه پتانسیل ۱۱۳، ۲۳۵، ۲۳۶  
 ~ مقید در چاه مربعی ۱۱۷  
 ~ همدوس ۱۸۱  
 حد کلاسیک قضیه اهرنفتست ۱۶۱  
 حرکت
- ~ اسپین ۳۱۵  
 ~ در میدان مغناطیسی ۳۱۵  
 ~ در میدان مغناطیسی ۲۸۴  
 ~ کلاسیک الکترون در میدان مغناطیسی  
 ثابت ۲۸۸  
 ~ مرکز جرم ۱۹۱، ۲۱۶
- جدول تناوبی ۴۰۷  
 جذب ۵۰۰، ۴۹۹، ۶  
 ~ تابش ۵۳۸  
 تولید زوج در ~ ۵۳۸  
 ~ در اثر فوتوالکتریک ۵۲۸  
 ~ در اثر کامپتون ۵۳۶  
 ~ در ماده ۵۲۸
- جرم
- ~ ستاره ۲۱۱  
 ~ سکون ذره ۱۸  
 ~ سکون فوتون ۱۸  
 ~ کاهیده ۱۹۲  
 اثرات هیدروژن در ~ ۳۷۰  
 معادله دیفرانسیلی ~ ۲۶۳
- جریان احتمال ۵۶  
 جعبه پتانسیل ۷۳  
 جفت‌شدگی ۴۴۰  
 ~ آنها در میدان تابشی ۴۴۰  
 ~ غیرنسبیتی ۵۳۸
- جمع
- ~ اسپین و تکانه زاویه‌ای مداری ۳۳۰  
 ~ تکانه زاویه‌ای در اسپینهای دوتایی ۳۲۴  
 ~ تکانه زاویه‌ای مدار ۳۳۰  
 جواب منظم تابع بسل کروی ۲۲۸
- چاربردار ۵۵۷  
 چاه
- ~ پتانسیل ۹۹  
 حالت‌های مقید در ~ ۱۱۳  
 ~ در حالت تابع موج-پارایته ۱۱۷  
 ~ نامتناهی ۲۳۰  
 ~ مربعی ۲۳۳

ساختار

- دترمینان اسلیتر ۳۹۸  
 ~ برای تابع موج فرمیون ۱۹۸  
 دستگاہ دو ذره‌ای  
 ~ در معادلهٔ تک‌ذره‌ای ۱۹۳  
 ~ ذرات یکسان ۱۹۳  
 دستگاہ  $N$  ذره‌ای ۱۸۶
- ذره  
 ~ آزاد در جعبه ۲۰۶  
 ~ شرودینگر ۸۰  
 ویژه‌تابع ~ ۸۱، ۸۰  
 ~ در جعبه ۷۳، ۷۴، ۲۰۶، ۲۳۰  
 ~ یکسان ۱۹۳  
 ~ و تقارن تابع موج ۱۹۳، ۱۹۴
- رابطه  
 ~ استغنان-بولتزمن ۱۰  
 ~ تامیت ۱۴۹  
 ~ جابه‌جایی ۶۴  
 ~ برای  $x$  و  $p$  ۶۴  
 ~ عدم قطعیت ۴۳، ۴۴، ۴۶، ۴۷  
 اثبات ~ ۵۵۳  
 ~ انرژی-زمان ۴۷  
 تعریف ~ ۱۵۷  
 برآوردهای مرتبهٔ بزرگی ~ ۴۷  
 ~ کاملیت نمادنگاری دیراک ۱۷۴
- رشتهٔ فوریه ۵۴۳  
 رفتار موجی ۵۶  
 رگبار پرتوکیهانی ۵۳۹  
 روش  
 ~ بورن-اپنهایمر ۴۳۲  
 ~ پیوند والانس، مولکول ۴۲۰
- ~ اتمها ۳۹۴  
 ~ برانگیخته ۳۹۹  
 ~ پوسته در هسته ۲۳۲  
 ~ فوق ریز ۳۶۷  
 ~ کلی مکانیک موجی ۱۴۴  
 ~ نوار ۱۲۹  
 ستارهٔ فوترونی ۲۱۳  
 سد پتانسیل ۱۰۱  
 سرد کردن اتمها ۴۷۴  
 سرعت گروه ۴۰، ۴۱  
 سطح مقطع ۴۹۴  
 ~ برای اثر فوتوالکتریک ۵۳۰، ۵۳۱  
 ~ برخورد ۴۹۴  
 ~ در سطح دیفرانسیلی پراکندگی ۴۹۴  
 ~ پراکندگی  
 ~ ذرات یکسان ۵۱۹، ۵۲۰  
 ~ کولن ۵۱۸، ۵۱۹  
 ~ تامسون ۵۳۶  
 تغییر فازها در ~ ۵۰۴  
 ~ در رابطهٔ میان انرژی بستگی ۵۱۱  
 ~ در قضیهٔ ایتیکی ۴۹۹  
 ~ ذرات یکسان ۵۱۹  
 ~ قرص سیاه ۵۰۱  
 ~ کشسان و ناکشسان ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱  
 ~ کل ۴۹۸  
 سیارهٔ رادرفورد ۲۲  
 سیستم دو ذره‌ای ذرهٔ آزاد ۱۹۰  
 سینماتیک نسبیتی ۵۵۷  
 شاخصهای میلر ۵۲۴  
 شار  
 جریان ~ ۵۶

~ محصور کوانتیده  $195$  [www.arsanjan.blogfa.com](http://www.arsanjan.blogfa.com) و کاهنده  $170$

~ انرزی  $63$  شرط

~ پارته  $87$  ~ بازتاب براگ  $524, 129$

~ تبادل  $194$  ~ راست هنجاری  $146, 75$

~ پارته  $195$  شکل خط لورنتسی  $461$

~ تکانه  $59, 60$

~ در ثابت حرکت  $190$  ضریب

ویژه تابع  $147, 146, 81, 80$  ~ جذب  $6$

~ هرمیتی  $65$  ~ القایی  $468$

~ چگالی  $562$  ~ جرمی  $535$

حالت آمیخته  $565$  ~ بسط  $79$

حالت ناب در  $563$  ~ مقدار انتظاری  $148, 147, 78$

~ خطی  $550, 150, 70$  ~ بهنجارش اوربیتالهای مولکولی  $415$

~ ماتریسهای خطی  $307$  ~ تراگسیل برای سد پتانسیل  $102$

~ مکان  $172$  ~ در روش تقریب و نترزل-کرامرز-بریلوئن

ویژه حالت و ویژه تابع در  $172$   $103$

~ هامیلتونی  $551, 550, 150, 64, 63$  ~ کلبش-گوردان  $335$

~ هرمیتی  $551, 151, 150$  ~  $A$  و  $B$  اینشتین  $467$

~ همیوخ هرمیتی  $152$

عنصر ماتریس برای گذار  $16 \rightarrow 2p$   $455$  طول

~ تابشی  $540$

فرمول ~ تشدید  $573$

~ اثر فوتوالکتریک اینشتین  $16, 15$  ~ عمر  $573$

~ برایت-ویگنر  $507$  ~ پهنای خط  $573$

~ برد مؤثر  $512$  ~ مغناطیسی  $291, 290$

~ رادرفورد برای پراکندگی کولنی  $518, 519$  ~ موج کاهیده  $26$

$519$  طیف

~ فاؤلر-نوردهایم  $106$  ~ اتم هیدروژن  $25, 24$

~ کلاین-نیشینا  $537$  ~ انرزی نوسانگر هماهنگ  $166$

فرمیون  $196$  ~ هلیوم  $377, 376$

~ انرزی کل از  $N$  در یک جعبه  $208$  عدد پیوند  $425$

$209$  عدم قطعیت هایزنبرگ  $43, 44, 46, 47$

~ در چاه پتانسیل  $196$  عملگر  $550, 70, 59$

فشار ~ افزایشده برای تکانه زاویه‌ای  $245$

~ گرانشی  $211$

- ۲۵۴ ~ موج تخت  
۱۲۷ ~ بلوخ  
۴۶۳ ~ بی دررو  
۶۰ ~ پارسوال  
۳۹۱ ~ فاینمن-هلن  
۱۲۷ ~ فلوکه  
۵۱۰ ~ لوینسون  
۲۷۳ ~ ویریال  
قطبش ۵۶۸  
قفس دیکی و ویتکه ۳۰
- کاواک ۴۷۳  
کوانتش  
~ تکانه زاویه‌ای ۲۳، ۲۷، ۲۸، ۳۲  
~ شار ۲۹۴  
~ مغناطیسی ۲۹۴
- گاف انرژی ابرسانی ۱۰۸  
گذار
- ~ چارقطبی الکتريکی ۴۵۳  
~ دوقطبی مغناطیسی ۴۵۳
- گسیل  
~ القایی و جذب ۴۶۷، ۴۶۸  
~ در ضرایب  $A$  و  $B$  اینشتین ۴۶۷  
~ سرد ۱۰۵  
~ و جذب فوتون ۴۴۰، ۴۶۶، ۴۸۲  
گشتاور  
~ دوقطبی مغناطیسی ۳۱۳، ۳۱۴  
~ لختی مولکول هم هسته ۴۲۹
- لم  
~ بیکر-هاوسدورت ۵۵۶  
~ ریمان-لیگ ۴۹۷  
لیزرها ۴۷۰
- فضای فاز  
~ برای الکترونها ۴۴۷  
~ برای بیشتر حالت‌های ویژه ۴۴۷  
~ و برای فوتون ۴۴۴  
~ فوتونی دوترون ۴۵۳  
فرومغناطیس و اثرات تبدلی ۳۸۳، ۳۸۴  
فوتون ۱۶، ۱۷
- قاعده  
~ جمع ۳۳۵  
~ برای ضریب کلش-گوردان ۳۳۵  
~ توماس-رایش-کوهن ۳۵۶  
~ طلائی ۴۴۷  
~ برای آهنگ گذار ۴۴۷، ۴۴۸  
~ کوانتش زومرفلد-ویلسون ۲۸  
~ کلی جمع تکانه‌های زاویه‌ای ۳۳۳  
~ گزینش ۳۸۴، ۴۵۱  
~ گذارهای صفر-صفر ۴۵۴  
~ هوند ۳۸۳، ۴۰۳
- قانون  
~ استفان-بولتزمن ۱۰، ۱۱  
~ پایستگی ۵۷  
~ تکانه زاویه‌ای ۲۱۸، ۲۱۹  
~ تجربی موزلی ۴۳۵  
~ ریلی-جینز ۴۶۸  
~ در تابش جسم سیاه ۸، ۹  
~ کیرشهوف در تابش گرمایی ۶، ۷  
~ گرمایی ویژه-دولون-پتی ۱۱  
~ وین ۴۶۹  
~ در تابش جسم سیاه ۶  
~ همپاری کلاسیک ۱۰
- قضیه  
~ ایتیکی ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱  
~ بسط ۲۵۳

- www.arsanjan.blogfa.com
- مانستگی فضای بردار ۱۴۹  
 ماتریس ۳۰۲، ۳۰۱  
 ~ پاؤلی ۳۰۹  
 ~ ستونی ۳۰۸  
 عملگر اسپین در ~ ۳۰۸  
 ~ همیوغ هرمیتی ۳۰۴  
 مجموعه کامل  
 ~ مشاهده پذیرها ۱۵۶  
 ~ ویژه تابعها ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۸  
 مختصات استوانه‌ای ۲۸۶  
 مدار  
 ~ بور ۲۳  
 ~ دایره‌ای در اتم هیدروژن ۲۶۸  
 ~ در میدان مغناطیسی ثابت ۲۸۷،  
 ۲۸۸  
 مدول کپهای ۲۱۰  
 واگنی ~ ۲۱۰  
 مساحت آزاد میانگین ۵۳۰  
 مسئله ذره-موج ۲۹  
 مشاهده پذیرها(ی) ۱۵۰  
 ~ عملگر تکانه ۱۴۶  
 ~ همزمان ۱۵۴  
 مشاهده جهشهای کوانتومی ۴۸۲  
 معادله  
 ~ شرودینگر ۴۲  
 ~ برای الکترون در میدان مغناطیسی  
 ثابت ۲۸۰  
 ~ برای بار ذره‌ای ۲۷۹  
 ~ برای پتانسیل مرکزی ۲۱۵، ۲۱۶  
 ~ برای ذره  $N$  ۱۸۶  
 جداسازی متغیرها در ~ ۲۲۱  
 ~ در انتگرال پذیری نامتناهی ۵۵  
 ~ در جعبه سه بعدی ۲۰۶، ۲۱۵  
 ~ در مختصه مرکز جرم ۱۹۱  
 ~ ذره آزاد ۵۳
- ساختار مجرد ~ ۱۷۵  
 معادله شعاعی برای پتانسیل مرکزی ~  
 ۲۲۴  
 ~ و تعبیر احتمالاتی ۵۳  
 ~ شعاعی برای پتانسیل مرکزی ۲۲۴  
 ~ برای اتم هیدروژن ۲۶۶  
 ~ برای جواب منظم و نامنظم ۲۲۶،  
 ۲۲۷  
 ~ ذره آزاد ۲۲۸  
 ~ کلاسیک حرکت در حد کوانتومی ۱۶۱  
 ~ ماکسول ۲۷۵  
 ~ ویژه مقدار ۶۹  
 ~ برای ذره در جعبه ۷۳  
 ~ برای  $L_z$  ۲۴۲، ۲۴۳  
 ~ در عملگر خطی ۷۰  
 ~ در نمایش ماتریس ۳۰۸  
 مقادیر انتظاری ۵۸  
 ~ اتم هیدروژن ۲۷۱  
 ~ انرژی در تعداد گرهای ۷۶  
 ~ حقیقی ۶۵  
 مکان عملگر ۱۷۷  
 ملاس نوری ۴۷۷  
 موج پادمقارن  
 دترمینان اسلیتر ~ ۱۹۸  
 کی پادمقارن سازی لازم است؟ در ۱۹۸  
 مولکول  
 انرژی الکترون در ~ ۴۱۴  
 اوربیتالهای ~ ۴۱۴، ۴۱۹، ۴۲۰  
 حالت‌های برانگیخته ~ ۴۱۸  
 حرکت چرخشی ~ ۴۲۸  
 ساختار چند ~ ساده ۴۲۴  
 ~  $H_2$  ۴۱۹  
 ~  $H_2^+$  ۴۱۳  
 مهبانگ ۱۳  
 میدان مغناطیسی ثابت در الکترون ۲۸۰

نوسانگر هماهنگ ۱۳۰، ۱۳۱

~ در روشهای عملگری ۱۶۵

~ در نمایشهای ماتریسی ۳۰۳

عملگر افزایشدهنده و کاهشدهنده ~ ۱۷۰

نیروی لورنتس ۲۷۶

وابستگی زمانی

~ عملگرها ۱۷۷

~ و حد کلاسیک ۱۵۸

واباشی آلفا ۱۰۹

وارونی جمعیت ۴۷۲

واقعیت مدارها در اتم بور ۴۶

واگنی

~ در اثر اشتراک ۳۵۰

~ در پتانسیل ۲۶۳

~ در جعبه سه بعدی ۲۰۶

~ در ذره آزاد توابع ویژه ۸۵، ۸۶

~ و مشاهده پذیرهای همزمان ۱۵۴

وضعیت تعادل در کاواک ۴۶۸

ویژه توابع ۷۳

~ برای ذره در جعبه ۷۳

~ شعاعی ۲۶۶

~ متعامد ۱۵۳، ۵۵۲

~ متناظر ۸۶

~ عملگر تکانه ۸۶

~ واگن ۱۵۵

ویژه حالت ۱۶۵

ویژه مقدار متعامد ۷۵

هامیلتونی ۶۳

~ برای ذرات یکسان ۱۹۳

~ برای بار ذره ای ۲۷۷

هماهنگهای کروی ۲۴۹

نامسای شوارتز ۱۶۲

ناوردایی ۱۲۶

~ پیمانه ای ۲۷۶

~ برای معادله شرودینگر ۲۷۹

~ در پیمانه کولن ۲۷۷

~ در پیمانه لورنتس ۲۷۷

~ تحت تبدیلات پیمانه ای ۲۷۶

~ تحت چرخش ۲۱۸

جابه جایی ~ ۱۸۹

~ چرخشی ۲۱۷

نسبت طول موج دو بروی ۲۰، ۲۱

نشان اسپینی ۱۹۳

نظریه

~ اختلال ۳۴۱

~ برای حالت های واگن ۳۴۱

~ در جابه جایی انرژی ۳۴۴، ۵۷۷

~ در حالت های پایا ۳۰۵

~ در حالت های واگن ۳۴۵

~ مستقل از زمان ۳۴۱

~ وابسته به زمان ۴۳۴

~ وابسته به زمان در تغییر زمانی

هماهنگ پتانسیل ۴۳۷

~ واگن ۳۴۵

~ مزون یوکاوا ۴۹

نقش تداخلی در آزمایش دوشکافی ۴۵، ۴۶

نکاتی درباره یارینه ۳۳۷

نمادنگاری دیراک ۱۴۴، ۱۵۲

نمایش

~ شرودینگر ۱۷۸

~ ماتریسی عملگرهای تکانه زاویه ای ۳۰۵

~ ماتریسی عملگرهای نوسانگر هماهنگ

۳۰۱

~ هایزبرگ ۱۷۸