معنا داشته باشد که همیشه به‌صورت ظاهر شود

$$\int dx f(x)\, \delta(x-a)$$

که در آن تابع $f(x)$ در گسترهٔ مقادیر شناسهٔ تابع دلتا به‌اندازهٔ کافی هموار است. با وجود این، می‌توان عملیات را مستقیماً روی تابع دلتا انجام داد، اما باید در نظر داشت که تمام روابطی که می‌نویسیم تنها زیر علامت انتگرال می‌توانند روی دهند.

خواص زیر را می‌توان برای تابع دلتا اثبات کرد:

۱.

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

که پیامد رابطهٔ زیر است

$$f(x) = \int dy f(y)\, \delta(x-y) \qquad \text{(الف-۱۷)}$$

اگر بنویسیم $x = a\xi$ و $y = a\eta$، به‌دست می‌آوریم

$$f(a\xi) = |a| \int d\eta f(a\eta)\, \delta[a(\xi-\eta)]$$

از طرف دیگر،

$$f(a\xi) = \int d\eta f(a\eta)\, \delta(\xi-\eta)$$

از مقایسه به الف-۱۶ می‌رسیم.

۲. رابطه‌ای که از الف-۱۶ نتیجه می‌شود عبارت است از

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

این رابطه از اینجا به‌دست می‌آید که شناسهٔ تابع دلتا در $x = a$ و $x = -a$ صفر می‌شود. بنابراین،

دو سهم وجود دارند:

$$\begin{aligned}\delta(x^2 - a^2) &= \delta[(x-a)(x+a)] \\ &= \frac{1}{|x+a|}\delta(x-a) + \frac{1}{|x-a|}\delta(x+a) \\ &= \frac{1}{2|a|}[\delta(x-a) + \delta(x+a)]\end{aligned}$$

از این کلی‌تر، می‌توان نشان داد

$$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|df/dx|_{x=x_i}} \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

که در آن x_iها ریشه‌های $f(x)$ در بازهٔ انتگرال‌گیری هستند.

علاوه بر نمایش الف-۱۵ برای تابع دلتا، نمایشهای دیگری نیز وجود دارند که می‌توانند مفید باشند. چند نمایش تابع دلتا را در زیر بررسی می‌کنیم.

(الف) نمایش الف-۱۵ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \int_{-L}^{L} dk\, e^{ikx} \qquad \text{(الف-۲۰)}$$

انتگرال را می‌توان محاسبه کرد، و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\delta(x) &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{iLx} - e^{-iLx}}{ix} \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{\sin\ Lx}{\pi x}\end{aligned} \qquad \text{(الف-۲۱)}$$

(ب) تابع $\Delta(x, a)$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}\Delta(x,a) &= 0 & x &< -a \\ &= \frac{1}{2a} & -a &< x < a \\ &= 0 & a &< x\end{aligned} \qquad \text{(الف-۲۲)}$$

بنابراین،

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \Delta(x, a) \qquad \text{(الف-۲۳)}$$

واضح است که انتگرال حاصلضرب $\Delta(x, a)$ و یک تابع $f(x)$ که در نزدیکی مبدأ هموار است تنها در مبدأ سهم خواهد داشت:

$$\lim_{a \to 0} \int dx f(x) \Delta(x, a) = f(0) \lim_{a \to 0} \int dx \Delta(x, a)$$
$$= f(0)$$

(ج) به‌همین ترتیب، هر تابع قله‌دار، که مساحت زیر آن به ۱ بهنجار شده باشد، در حدی که پهنای قله به صفر میل می‌کند به یک تابع دلتا نزدیک می‌شود. می‌توان نشان داد که دو رابطهٔ زیر نمایشهای تابع دلتا هستند

$$\delta(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} \qquad \text{(الف-۲۴)}$$

و

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2}$$

(د) گاهی با چندجمله‌ایهای راست‌هنجار سروکار داریم، که آنها را با نماد کلی $P_n(x)$ نشان می‌دهیم. این چندجمله‌ایها دارای خاصیت زیر هستند

$$\int dx P_m(x)\, P_n(x)\, w(x) = \delta_{mn} \qquad \text{(الف-۲۶)}$$

که در آن $w(x)$ ممکن است واحد یا یک تابع ساده باشد، که آن‌را تابع وزن می‌نامند. برای توابعی که می‌توان آنها را برحسب این چندجمله‌ایهای متعامد بسط داد می‌توان نوشت

$$f(x) = \sum_n a_n P_n(x) \qquad \text{(الف-۲۷)}$$

اگر دو طرف این رابطه را در $w(x) P_m(x)$ ضرب کنیم و روی x انتگرال بگیریم به‌دست می‌آوریم

$$a_m = \int dy w(y)\, f(y)\, P_m(y) \qquad \text{(الف-۲۸)}$$

با جاگذاری در الف-۲۷، و با آمادگی برای کار با «توابع تعمیم‌یافته»، جای جمع و انتگرال را بدون هیچ قید و شرطی عوض می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_n P_n(x) \int dy w(y)\, f(y)\, P_n(y)$$
$$= \int dy f(y) \left(\sum_n P_n(x)\, w(y)\, P_n(y) \right) \qquad \text{(الف-۲۹)}$$

بدین‌ترتیب، به نمایش دیگری از تابع دلتا می‌رسیم. مثالهای $P_n(x)$ عبارت‌اند از چندجمله‌ایهای لژاندر، چندجمله‌ایهای هرمیت و چندجمله‌ایهای لاگر، که تمام اینها در مسائل مکانیک کوانتومی ظاهر می‌شوند.

چون تابع دلتا همیشه به‌صورت حاصلضرب با یک تابع هموار زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود، می‌توان برای آن مشتق تعریف کرد. به‌عنوان مثال،

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx f(x) \frac{d}{dx}\delta(x) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{d}{dx}[f(x)\delta(x)] - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{df(x)}{dx}\delta(x)$$
$$= -\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx \frac{df(x)}{dx}\delta(x) \qquad \text{(الف-۳۰)}$$
$$= -\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0}$$

و غیره. تابع دلتا ابزار بسیار مفیدی است که در هر بخشی از ریاضی فیزیک با آن روبه‌رو می‌شویم.

انتگرال تابع دلتا عبارت است از

$$\int_{-\infty}^{x} dy\, \delta(y-a) = 0 \qquad x < a$$
$$= 1 \qquad x > a \qquad \text{(الف-۳۱)}$$
$$\equiv \theta(x-a)$$

که نمادنگاری متعارف برای این تابع ناپیوسته است که تابع پله‌ای نامیده می‌شود. برعکس، مشتق تابع پله‌ای $\theta(x-a)$ تابع دلتای دیراک است:

$$\frac{d}{dx}\theta(x-a) = \delta(x-a) \qquad \text{(الف-۳۲)}$$

پیوست ب

عملگرها

در این پیوست بعضی از مباحث مربوط به عملگرهای خطی را بررسی می‌کنیم. توابع انتگرال‌پذیر مجذوری مجموعهٔ توابع موج قابل قبول را تشکیل می‌دهند. اگر $\psi_1(x)$ و $\psi_2(x)$ انتگرال‌پذیر مجذوری و α و β اعداد مختلط اختیاری باشند، چون تابع

$$\psi(x) = \alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x) \tag{ب-۱}$$

انتگرال‌پذیر مجذوری است، می‌گوییم ψها یک فضای خطی تشکیل می‌دهند. عملگر A در این فضا یک نگاشت است:

$$A\psi(x) = \phi(x)$$

[illegible] نیز [illegible]گرال‌پذیر مجذوری است. در میان تمام عملگرها یک زیر مجموعه وجود دارد [illegible] نامیده می‌شوند، و این خاصیت را دارند که

$$A\alpha\psi(x) = \alpha A\psi(x)$$

که در آن α یک ثابت مختلط اختیاری است، و همچنین

$$A[\alpha\psi_1(x) + \beta\psi_2(x)] = \alpha A\psi_1(x) + \beta A\psi_2(x) \qquad \text{(ب-۴)}$$

که در آن α و β اعداد مختلط‌اند. یک زیرمجموعهٔ دیگر عبارت است از عملگرهای هرمیتی که برای آنها مقدار انتظاری به‌ازای تمام توابع قابل قبول $\psi(x)$، یعنی

$$\langle A\rangle_\psi = \int dx\psi^*(x)\ A\psi(x) \qquad \text{(ب-۵)}$$

حقیقی است. ابتدا ثابت می‌کنیم که برای تمام توابع قابل قبول ψ_1 و ψ_2 رابطهٔ زیر برقرار است

$$\int \psi_2^*(x)\ A\psi_1(x)\ dx = \int [A\psi_2(x)]^*\psi_1(x)\ dx \qquad \text{(ب-۶)}$$

حقیقی بودن $\langle A\rangle$ ایجاب می‌کند که

$$\int dx\psi^*(x)\ A\psi(x) = \int dx[A\psi(x)]^*\psi(x) \qquad \text{(ب-۷)}$$

اکنون به‌جای $\psi(x)$ قرار می‌دهیم

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \lambda\psi_2(x) \qquad \text{(ب-۸)}$$

و در نتیجه

$$\int dx(\psi_1^* + \lambda^*\psi_2)A(\psi_1 + \lambda\psi_2) = \int dx(\psi_1 + \lambda\psi_2)(A\psi_1 + \lambda A\psi_2)^* \qquad \text{(ب-۹)}$$

با استفاده از هرمیتی بودن A، یعنی

$$\int dx\psi_i^* A\psi_i = \int dx\psi_i(A\psi_i)^* \qquad i = 1, 2 \qquad \text{(ب-۱۰)}$$

به‌دست می‌آوریم

$$\lambda^*\int \psi_2^* A\psi_1 + \lambda\int \psi_1^* A\psi_2 = \lambda\int \psi_2(A\psi_1)^* + \lambda^*\int \psi_1(A\psi_2)^* \qquad \text{(ب-۱۱)}$$

چون λ یک عدد مختلط اختیاری است، ضرایب λ و همچنین ضرایب λ^* در دو طرف باید جداگانه با هم برابر باشند. بنابراین،

$$\int dx\psi_2^* A\psi_1 = \int dx(A\psi_2)^* \psi_1 \qquad (\text{ب-۱۲})$$

نتیجهٔ دیگری که می‌خواهیم اثبات کنیم این است که ویژه‌تابعهای یک عملگر هرمیتی، مربوط به ویژه‌مقدارهای مختلف، متعامدند. دو معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید

$$A\psi_1(x) = a_1\psi_1(x)$$

و

$$[A\psi_2(x)]^* = a_2\psi_2^*(x) \qquad (\text{ب-۱۳})$$

توجه کنید که a_2 حقیقی است زیرا ویژه‌مقدارهای عملگرهای هرمیتی حقیقی هستند. ψ_2^* را در معادلهٔ اول و ψ_1 را در معادلهٔ دوم ضرب نرده‌ای می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int dx\psi_2^* A\psi_1(x) &= a_1 \int \psi_2^*(x)\psi_1(x)dx \\ \int dx(A\psi_2)^*\psi_1(x) &= a_2 \int \psi_2^*(x)\psi_1(x)dx \end{aligned} \qquad (\text{ب-۱۴})$$

از تفریق این دو به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (a_1 - a_2)\int \psi_2^*(x)\psi_1(x)dx &= \int dx\psi_2^* A\psi_1 - \int dx(A\psi_2)^*\psi_1 \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (\text{ب-۱۵})$$

بنابراین، اگر $a_1 \neq a_2$ داریم

$$\int \psi_2^*(x)\psi_1(x)dx = 0 \qquad (\text{ب-۱۶})$$

اگر همیوغ هرمیتی عملگر A را با $A^\dagger$ نشان دهیم به‌طوری که

$$\int dx(A\psi_2)^*\psi_1 \equiv \int dx\psi_2^* A^\dagger\psi_1 \qquad (\text{ب-۱۷})$$

آنگاه برای عملگر هرمیتی داریم

$$A = A^\dagger \tag{ب-۱۸}$$

می‌توان نشان داد

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{ب-۱۹}$$

برای این کار، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \int \psi_2^*(AB)^\dagger \psi_1 &= \int (AB\psi_2)^* \psi_1 \\ &= \int (B\psi_2)^*(A^\dagger \psi_1) \\ &= \int \psi_2^* B^\dagger (A^\dagger \psi_1) \\ &= \int \psi_2^* B^\dagger A^\dagger \psi_1 \end{aligned} \tag{ب-۲۰}$$

تعمیم این رابطه به‌صورت زیر است

$$(ABC\cdots Z)^\dagger = A^\dagger \cdots C^\dagger B^\dagger A^\dagger \tag{ب-۲۱}$$

شرط لازم و کافی برای هرمیتی بودن حاصلضرب دو عملگر هرمیتی این است که این دو عملگر با هم جابه‌جا شوند:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger = BA = AB + [B, A] \tag{ب-۲۲}$$

نتیجهٔ دیگر این است که برای هر عملگر A عملگرهای زیر هرمیتی هستند

$$\begin{gathered} A + A^\dagger \\ i(A - A^\dagger) \\ AA^\dagger \end{gathered} \tag{ب-۲۳}$$

اکنون "روابط عدم قطعیت" را اثبات می‌کنیم. بنابه تعریف داریم

$$(\Delta A)^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \tag{ب-۲۴}$$

قرار می‌دهیم

$$U = A - \langle A \rangle$$
$$V = B - \langle B \rangle \qquad (ب\text{ـ}۲۵)$$

و می‌نویسیم

$$\phi = U\psi + i\lambda V\psi \qquad (ب\text{ـ}۲۶)$$

که در آن λ یک پارامتر حقیقی است. ϕ را در خودش ضرب نرده‌ای می‌کنیم:

$$I(\lambda) = \int dx \phi^\dagger \phi \geq ۰ \qquad (ب\text{ـ}۲۷)$$

اگر A و B هرمیتی باشند U و V نیز هرمیتی هستند. در نتیجه، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int dx (U\psi + i\lambda V\psi)^\dagger (U\psi + i\lambda V\psi) \\ &= \int dx (U\psi)^\dagger (U\psi) + \lambda^۲ \int dx (V\psi)^\dagger (V\psi) \\ &\quad + i\lambda \int dx [(U\psi)^\dagger (V\psi) - (V\psi)^\dagger (U\psi)] \\ &= \int dx \psi^\dagger (U^۲ + \lambda^۲ V^۲ + i\lambda [U, V])\psi \\ &= (\Delta A)^۲ + \lambda^۲ (\Delta B)^۲ + i\lambda \int dx \psi^\dagger [U, V])\psi \\ &= (\Delta A)^۲ + \lambda^۲ (\Delta B)^۲ + i\lambda \langle [A, B] \rangle \end{aligned} \qquad (ب\text{ـ}۲۸)$$

این کمیت وقتی کمینه است که

$$۲\lambda (\Delta B)^۲ + i\langle [A, B] \rangle = ۰ \qquad (ب\text{ـ}۲۹)$$

یا

$$\lambda = -i \frac{\langle [A, B] \rangle}{۲(\Delta B)^۲} \qquad (ب\text{ـ}۳۰)$$

با جاگذاری در $I(\lambda)$ به‌دست می‌آوریم

$$(\Delta A)^{۲} - \frac{\langle [A,B]\rangle^{۲}}{۴(\Delta B)^{۲}} + \frac{\langle [A,B]\rangle^{۲}}{۲(\Delta B)^{۲}} \geq ۰$$

یعنی

$$(\Delta A)^{۲}(\Delta B)^{۲} \geq \frac{۱}{۴}\langle i[A,B]\rangle^{۲} \tag{ب-۳۱}$$

در ضمن، طرف چپ رابطهٔ بالا وقتی کمترین مقدار خود را دارد که $U\psi$ و $V\psi$ با یکدیگر متناسب باشند. بنابراین، برای عملگرهای x و p در این مورد داریم

$$\frac{\hbar}{i}\,\frac{d\psi(x)}{dx} + i\beta x\psi(x) = ۰ \tag{ب-۳۲}$$

جواب این معادله عبارت است از

$$\psi(x) = C\, e^{-\beta(x^{۲}/۲\hbar)} \tag{ب-۳۳}$$

که ویژه تابع حالت پایهٔ نوسانگر هماهنگ است. شایان توجه است که رابطهٔ عدم قطعیت

$$(\Delta A)^{۲}(\Delta B)^{۲} \geq \frac{۱}{۴}(\langle i[A,B]\rangle)^{۲} \tag{ب-۳۴}$$

بدون هیچ استفاده‌ای از مفاهیم موجی یا دوجانبگی بین یک موج و تبدیل فوریهٔ آن به‌دست آمده است. این نتیجه صرفاً مبتنی بر خواص عملگری مشاهده‌پذیرهای A و B است.

این پیوست را با بیان چند خاصیت از جابه‌جاگرها به‌پایان می‌بریم.

(الف)

$$[A,B] = -[B,A] \tag{ب-۳۵}$$

(ب)

$$\begin{aligned}[A,B]^\dagger &= (AB)^\dagger - (BA)^\dagger \\ &= B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger \\ &= [B^\dagger, A^\dagger]\end{aligned} \tag{ب-۳۶}$$

(ج) اگر A و B هرمیتی باشند، $i[A, B]$ نیز هرمیتی است. این نتیجه مستقیماً از خواص بالا به‌دست می‌آید.

(د)

$$
\begin{aligned}
[AB, C] &= ABC - CAB \\
&= ABC - ACB + ACB - CAB \qquad \text{(ب\_۳۷)} \\
&= A[B, C] + [A, C]B
\end{aligned}
$$

(ه) جمله به جمله می‌توان نشان داد که

$$
e^{A} B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{۱}{۲!}[A, [A, B]] + \frac{۱}{۳!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \qquad \text{(ب\_۳۸)}
$$

که لم بیکر_هاوسدورف نامیده می‌شود و کاربردهایی در محاسبات با عملگرها دارد.

(و) به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$
[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = ۰ \qquad \text{(ب\_۳۹)}
$$

که اتحاد یاکوبی نامیده می‌شود.

برای بحث گسترده‌تر دربارهٔ عملگرها و فضاهای خطیِ قلمرو آنها می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید

J D Jackson, *Mathematics for Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1962.

مبحث ویژهٔ ۱
سینماتیک نسبیتی

در این بخش چند فرمول را که در ساده کردن اثرات تبدیلهای نسبیتی از یک چارچوب مرجع به دیگری مفیدند به‌اختصار بیان می‌کنیم. یک کاربرد نمونه در پراکندگی پیش می‌آید: نظریه با چارچوب مرکز جرم و آزمایش با چارچوب آزمایشگاه سروکار دارد، و نتایج این دو را باید با هم مقایسه کرد. روش ساده‌سازی که باید از آن استفاده شود بر مبنای دو نتیجه از نظریهٔ نسبیت خاص است:

(الف) حاصلضرب نرده‌ای چاربردارهای $A_\mu = (A_\circ\,, \mathbf{A})$ و $B_\mu = (B_\circ\,, \mathbf{B})$ که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$A \cdot B = A_\mu B_\mu \equiv (A_\circ B_\circ - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \qquad \text{(م۱ـ۱)}$$

تحت تبدیلات لورنتس ناوردا است.

(ب) انرژی و تکانهٔ یک ذره به‌صورت چاربردار زیر تبدیل می‌شوند

$$p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \qquad \text{(م۱ـ۲)}$$

که مجذور "طول" آن برحسب جرم سکون ذره عبارت است از

$$p^{۲} = p_\mu p_\mu = \frac{E^{۲}}{c^{۲}} - \mathbf{p}^{۲} = m^{۲} c^{۲} \qquad \text{(م۱ـ۳)}$$

به‌طور کلی، برخورد بین دو ذره که به دو ذره در حالت نهایی منجر می‌شود، مانند

$$A(p_A) + B(p_B) \to C(p_C) + D(p_D)$$

فقط با دو عدد مشخص می‌شود. [illegible] چارتکانه‌ها $4 \times 4 = 16$ مؤلفهٔ مختلف داریم؛ این ۱۶ مؤلفه با چهار شرط جرم (م۱ـ۳) و چهار شرط پایستگی انرژی‌ـتکانه محدود می‌شوند؛ علاوه بر این، ناوردایی تحت انتقال و چرخش ایجاب می‌کند که شش مختصهٔ دیگر، یعنی تکانهٔ مرکز جرم، سمتگیری صفحهٔ پراکندگی در فضا، و انتخاب محورها در این صفحه، بی‌تأثیر باشند.

از دو ناوردای مشخص‌کنندهٔ برخورد، یکی را به‌صورت

$$s = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2 \qquad \text{(م۱ـ۴)}$$

که جملهٔ دوم آن از پایستگی چارتکانه ناشی می‌شود، و دیگری را به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$t = (p_C - p_A)^2 = (p_D - p_B)^2 \qquad \text{(م۱ـ۵)}$$

یک انتخاب ممکن دیگر عبارت است از

$$u = (p_D - p_A)^2 = (p_C - p_B)^2 \qquad \text{(م۱ـ۶)}$$

این سه ناوردا مستقل از یکدیگر نیستند زیرا، با توجه به رابطهٔ $p_{A\mu} + p_{B\mu} = p_{C\mu} + p_{D\mu}$ که می‌توان آن‌را به‌سادگی اثبات کرد، قانون پایستگی انرژی‌ـتکانه ایجاب می‌کند که

$$s + t + u = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + m_c^2 c^2 + m_D^2 c^2 \qquad \text{(م۱ـ۷)}$$

مفهوم این ناورداها را در زیر بیان می‌کنیم:

s: در چارچوب مرکز جرم، که در آن کمیتها را با ستاره نشان می‌دهیم، داریم

$$\mathbf{p}_A^* + \mathbf{p}_B^* = 0 \qquad \text{(م۱ـ۸)}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} s &= (p_{0A}^* + p_{0B}^*)^2 - (\mathbf{p}_A^* + \mathbf{p}_B^*)^2 \\ &= \left(\frac{E_A^*}{c} + \frac{E_B^*}{c}\right)^2 \\ &= \frac{1}{c^2}(E_A^* + E_B^*)^2 \end{aligned} \qquad \text{(م۱ـ۹)}$$

که، با تقریب ضریب c^2، مجذور انرژی کل در چارچوب مرکز جرم است.

t: معنی t در یک مورد خاص (اما بسیار متداول) که در آن ذرات A و C و همچنین B و D یکسان هستند، مثلاً در واکنشهای

$$\pi + P \to \pi + P$$

و

$$\gamma + e \to \gamma + e$$

تا اندازه‌ای روشنتر است. در این مورد، در چارچوب مرکز جرم، از

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_B^* = -\mathbf{p}_A^* \qquad \mathbf{p}_D^* = -\mathbf{p}_C^* \\ E_A^* + E_B^* = E_C^* + E_D^* \end{aligned} \qquad \text{(م۱ـ۱۰)}$$

و

$$m_A = m_C \qquad\qquad m_B = m_D \qquad \text{(م۱ـ۱۱)}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}_A^{*2} c^2 + m_A^2 c^4)^{1/2} + (\mathbf{p}_A^{*2} c^2 + m_B^2 c^4)^{1/2} =& (\mathbf{p}_C^{*2} c^2 + m_A^2 c^4)^{1/2} \\ &+ (\mathbf{p}_C^{*2} c^2 + m_B^2 c^4)^{1/2} \end{aligned}$$

یعنی

$$E_A^* = E_C^* \qquad\qquad E_B^* = E_D^* \qquad \text{(م۱ـ۱۲)}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} t = (p_A - p_C)^2 &= \left(\frac{E_A^*}{c} - \frac{E_C^*}{c}\right)^2 - (\mathbf{p}_A^* - \mathbf{p}_C^*)^2 \\ &= -(\mathbf{p}_A^* - \mathbf{p}_C^*)^2 \end{aligned} \qquad \text{(م۱ـ۱۳)}$$

یعنی t منفی مجذور انتقال ت[illegible] کنید که t به زاویهٔ پراکندگی مرکز جرمی مربوط می‌شود. از رابطهٔ بالا داریم

$$\begin{aligned} t &= -\mathbf{p}_A^{*2} - \mathbf{p}_C^{*2} + 2\mathbf{p}_A^{*} \cdot \mathbf{p}_C^{*} \\ &= -\mathbf{p}_A^{*2} - \mathbf{p}_C^{*2} + 2|\mathbf{p}_A^{*}||\mathbf{p}_C^{*}| \cos\ \theta^{*} \end{aligned} \tag{م۱ـ۱۴}$$

چارچوب آزمایشگاه با $\mathbf{p}_B^L = 0$ مشخص می‌شود، و در آن

$$p_{B\mu} = (m_B c, 0) \tag{م۱ـ۱۵}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} s = (p_A + p_B)^2 &= p_A^2 + p_B^2 + 2p_A p_B \\ &= m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 + 2m_B E_A^L \end{aligned} \tag{م۱ـ۱۶}$$

و

$$\begin{aligned} t &= (p_D - p_B)^2 \\ &= m_D^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2m_B E_D^L \\ &= (p_A - p_C)^2 \\ &= m_A^2 c^2 + m_C^2 c^2 - 2E_A^L E_C^L / c^2 + 2\mathbf{p}_A^L \cdot \mathbf{p}_c^L \\ &= m_A^2 c^2 + m_C^2 c^2 - 2E_A^L E_C^L / c^2 + 2|\mathbf{p}_A^L|\ |\mathbf{p}_C^L| \cos\ \theta^L \end{aligned} \tag{م۱ـ۱۷}$$

از این نتیجه، و با استفاده از

$$E_A^L + m_B c^2 = E_C^L + E_D^L \tag{م۱ـ۱۸}$$

و ناوردایی s و t، یعنی اینکه s و t در چارچوبهای مرکز جرم و آزمایشگاه (یا هر چارچوب دیگری) مقادیر یکسانی دارند، می‌توان رابطهٔ میان زاویهٔ پراکندگی مرکز جرمی و زاویهٔ پراکندگی آزمایشگاهی و همچنین رابطهٔ میان انرژیها در دو چارچوب را به‌دست آورد.

ویژگیهای تبدیل سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma / d(\cos\ \theta)$ از ناوردایی $d\sigma$، که می‌توان آن‌را با فرمولبندی نسبیتی نظریهٔ پراکندگی اثبات کرد، به‌دست می‌آید. بنابراین،

$$\frac{d\sigma}{dt} \tag{م۱ـ۱۹}$$

ناوردا است، و برای نمایش سطح مقطع به‌صورتی که تبدیلها از یک چارچوب به چارچوب دیگر از همه آسانتر انجام شوند، بهتر است آن‌را برحسب s و t بنویسیم. این کار را در اینجا انجام نمی‌دهیم. به عنوان یک نکتهٔ حاشیه‌ای بهایی، متذکر می‌شویم که رابطهٔ مربوط به

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3}$$

ناوردای نسبیتی نیست. اما ناوردایی آشکار

$$\begin{aligned}
&\int \cdots \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2c^2) \\
&= \int d^3\mathbf{p} \int_{p_0>0} dp_0\, \delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2c^2) \\
&= \int d^3\mathbf{p} \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}} = \frac{c}{2} \frac{d^3\mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{م۱ـ۲۰}$$

نشان می‌دهد که

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{E} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \tag{م۱ـ۲۱}$$

ناوردا است. عناصر ماتریس در نظریه‌های نسبیتی همیشه به ذراتی مربوط می‌شوند که نه مطابق با

$$\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

بلکه مطابق با

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{E}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

بهنجار می‌شوند، و در نتیجه عوامل لازم از مجذور عنصر ماتریس به‌دست می‌آیند.

مبحث ویژهٔ ۲
عملگر چگالی

در بحثهای خود همیشه با تحول زمانی دستگاههای فیزیکیی سروکار داشتیم که حالتهای اولیهٔ آنها به‌صورت زیر بودند

$$|\psi\rangle = \sum_n C_n |u_n\rangle \qquad (\text{م}۲\text{ـ}۱)$$

این نوع آنهایی اولیه غالباً آنهایی نیستند که با روش آماده‌سازی حالتها فراهم می‌شوند. به‌جای یک مجموعهٔ آماری متشکل از حالتهای یکسان $|\psi\rangle$، ممکن است تعدادی مجموعهٔ آماری مختلف داشته باشیم که اندازه‌گیریها باید روی آنها انجام شوند. این مجموعه‌های آماری می‌توانند به‌صورت زیر باشند

$$|\psi^{(i)}\rangle = \sum_n C_n^{(i)} |u_n\rangle \qquad (\text{م}۲\text{ـ}۲)$$

و همهٔ آنچه می‌دانیم این است که احتمال یافتن یک مجموعهٔ آماری که با (i) مشخص شده است p_i است و

$$\sum_i p_i = ۱ \qquad (\text{م}۲\text{ـ}۳)$$

برای مثال، ممکن است باریکه‌ای از اتمهای هیدروژن در یک حالت برانگیخته، با انرژی معین و تکانهٔ زاویه‌ای مداری l، وکاملاً ناقطبیده داشته باشیم، و از این‌رو تمام مقادیر m، با $-l \leq m \leq l$،

به یک اندازه محتمل هستند. در این مورد، $\rho_m = ۱/(۲l + ۱)$ که مستقل از m است. صحیح نیست بگوییم این باریکه با تابع موج

$$|\psi\rangle = \sum_m C_m |Y_{lm}\rangle \qquad (\text{م۲\_۴})$$

که در آن $|C_m|^۲ = ۱/(۲m + ۱)$، توصیف می‌شود، زیرا وضعیت فیزیکی $۲m + ۱$ باریکهٔ مستقل را نشان می‌دهد، و در نتیجه هیچ رابطهٔ فازی بین مقادیر مختلف m وجود ندارد.

با استفاده از عملگر چگالی می‌توان هر دو مورد را بررسی کرد.

حالت ناب

ابتدا حالت ناب را در نظر می‌گیریم. عملگر چگالی ρ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad (\text{م۲\_۵})$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$\rho = \sum_{m,n} C_n C_m^* |u_n\rangle\langle u_m| \qquad (\text{م۲\_۶})$$

عناصر ماتریس ρ در پایهٔ u_n عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\rho_{kl} = \langle u_k|\rho|u_l\rangle &= \langle u_k \sum_{m,n} C_n C_m^* |u_n\rangle\langle u_m|u_l\rangle \\ &= C_k C_l^*\end{aligned} \qquad (\text{م۲\_۷})$$

مشاهده می‌کنیم که

(الف)

$$\rho^۲ = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho \qquad (\text{م۲\_۸})$$

(ب)

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_k \rho_{kk} = \sum_k |C_k|^۲ = ۱ \qquad (\text{م۲\_۹})$$

(ج) همچنین، مقدار انتظاری هر مشاهده‌پذیر A را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle &= \sum_{m,n} C_m^* \langle u_m|A|u_n\rangle C_n \\ &= \sum_{m,n} C_m^* C_n A_{mn} = \sum_{m,n} A_{mn}\rho_{nm} \\ &= \mathrm{Tr}(A\rho)\end{aligned} \qquad (\text{م}۲\text{ـ}۱۰)$$

نتایج م۲ـ۸ تا م۲ـ۱۰ از انتخاب مجموعهٔ کامل بردارهای پایهٔ $|u_n\rangle$ مستقل هستند. برای اثبات، مجموعهٔ $|v_n\rangle$ را در نظر می‌گیریم. بنابه قضیهٔ کلی بسط، می‌توان نوشت

$$|v_n\rangle = \sum_m T_m^{(n)} |u_m\rangle$$

که در آن

$$T_m^{(n)} = \langle u_m|v_n\rangle \equiv T_{mn}$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\sum_n T_{mn}(T^+)_{nk} = \sum_n T_{mn}T_{kn}^* &= \sum_n \langle u_m|v_n\rangle\langle u_k|v_n\rangle^* \\ &= \sum_n \langle u_m|v_n\rangle\langle v_n|u_k\rangle = \delta_{mk}\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد ماتریس T یکانی است. بنابراین،

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \sum_k D_k|v_k\rangle \\ &= \sum_k D_k T_{kl}|u_l\rangle\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$C_l = D_k T_{kl} = (T^{\mathrm{tr}})_{lk} D_k \equiv U_{lk} D_k$$

چون T یکانی است، ترانهاد آن یعنی $U \equiv T^{\mathrm{tr}}$ نیز یکانی است. بنابراین،

$$\rho_{kl} = C_k C_l^* = (U)_{km} D_m (U)_{ln}^* D_n^*$$

یا

$$= U\ \rho_D (U)^+$$

که در آن ρ_D عملگر چگالی در پایهٔ v است. بدین‌ترتیب، داریم

$$\rho_D = U^+ \rho U$$

از یکانی بودن U نتیجه می‌شود که خواص ρ برای ρ_D نیز صدق می‌کنند.

چون $\rho = \rho^+$، می‌توان ρ را با یک تبدیل یکانی قطری کرد. این نشان می‌دهد که می‌توان پایه‌ای مانند $\langle v_n|$ انتخاب کرد که در آن ρ قطری باشد. چون $\rho^۲ = \rho$، ویژه‌مقدارهای آن تنها می‌توانند ۱ یا ۰ باشند، و چون $\mathrm{tr}\rho = ۱$، تنها یکی از ویژه‌مقدارها می‌تواند ۱ باشد و بقیه باید صفر باشند. بنابراین، تنها یکی از D_kها می‌تواند مخالف صفر باشد. این نشان می‌دهد که در یک پایهٔ مناسب، حالت ناب حالتی است که ویژه‌حالت بزرگترین مجموعهٔ مشاهده‌پذیرهای جابه‌جاشونده‌ای باشد که ویژه‌تابعهای آنها مجموعهٔ $\langle v_n|$ هستند.

حالت آمیخته

برای حالت آمیخته عملگر چگالی را با رابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho = \sum_i |\psi^{(i)}\rangle p_i \langle \psi^{(i)}| \qquad \text{(م۲ـ۱۱)}$$

که در پایهٔ $\langle u_n|$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\rho = \sum_i \sum_{m,n} C_n^{(i)} C_m^{(i)*} p_i |u_n\rangle\langle u_m|$$

و از این‌رو

$$\rho_{kl} = \langle u_k|\rho|ul\rangle = \sum_i\ p_i\ C_k^{(i)} C_l^{(i)*} \qquad \text{(م۲ـ۱۲)}$$

توجه کنید که $\rho_{kl} = \rho_{lk}^*$، و این نشان می‌دهد که ρ هرمیتی است. چون

$$\sum_n |C_n^{(i)}|^۲ = ۱$$

نتیجه می‌گیریم، مانند سابق، که

$$\text{Tr}\ \rho = \sum_k \rho_{kk} = \sum_i p_i = ۱ \qquad (م۲\text{-}۱۳)$$

همچنین، مانند مورد حالت ناب، داریم

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi^{(i)} | A | \psi^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{mn} p_i \langle \psi^{(i)} | u_n \rangle \langle u_n | A | u_m \rangle \langle u_m | \psi^{(i)} \rangle \\ &= \sum_i \sum_{mn} p_i C_m^{(i)} C_n^{(i)*} A_{nm} \\ &= \sum_{mn} \rho_{mn} A_{nm} = \text{Tr}\ (\rho A) \end{aligned} \qquad (م۲\text{-}۱۴)$$

اما رابطهٔ $\rho = \rho^۲$ دیگر صادق نیست. در واقع

$$\rho^۲ = \sum_j \sum_i |\psi^{(i)}\rangle p_i \langle \psi^{(i)} | \psi^{(j)} \rangle p_j \langle \psi^{(i)} | = \sum_i |\psi^{(i)}\rangle p_i^۲ \langle \psi^{(i)} |$$

و چون $\sum_i p_i = ۱$، برای حالت آمیخته به‌دست می‌آوریم

$$\text{Tr}\ \rho^۲ = \sum_i p_i^۲ < ۱ \qquad (م۲\text{-}۱۵)$$

از معادلهٔ شرودینگر

$$\frac{d}{dt} |\psi^{(i)}\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi^{(i)}\rangle$$

و (چون $H = H^\dagger$)

$$\frac{d}{dt} \langle \psi^{(i)} | = \frac{i}{\hbar} \langle \psi^{(i)} | H$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d}{dt} \rho = -\frac{i}{\hbar} H \rho + \frac{i}{\hbar} \rho H = -\frac{i}{\hbar} [H, \rho] \qquad (م۲\text{-}۱۶)$$

توجه کنید که علامت در اینجا مخالف علامت رابطهٔ آهنگ تغییر زمانی عملگرهای دیگر است:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

ساده‌ترین کاربرد صورتبندی بالا در توصیف باریکه‌ای از الکترونها یا ذرات دیگر با اسپین ۱/۲ است. در اینجا ρ یک ماتریس هرمیتی 2×2 است. کلی‌ترین شکل این ماتریس عبارت است از

$$\rho = \frac{1}{2}(a\mathbf{1} + \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \qquad (\text{م}2\text{-}17)$$

که در آن a و $\mathbf{b}$ حقیقی هستند. شرط $\mathrm{Tr}\rho = 1$ ایجاب می‌کند که $a = 1$. می‌توان ρ^2 را به‌صورت زیرمحاسبه کرد:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \frac{1}{4}(1 + \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma})(1 + \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{4}(1 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \mathbf{b}^2}{2} + \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\end{aligned} \qquad (\text{م}2\text{-}18)$$

ماتریس چگالی ρ تنها به شرطی یک حالت ناب را توصیف می‌کند که $\rho = \rho^2$، یعنی اگر $\mathbf{b}^2 = 1$. برای حالت آمیخته، از م۲ـ۱۵ نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{b}^2 < 1$.

اکنون می‌خواهیم یک تعبیر فیزیکی برای $\mathbf{b}$ به‌دست آوریم. مخلوطی از باریکه‌هایی با اسپین ۱/۲ را در نظر بگیرید. هر یک از باریکه‌ها الکترونهایی در راستای محور z یا x یا y دارند. کسری از ذرات را که در یک ویژه‌حالت σ_3 با ویژه‌مقدار $+1$ هستند با $f_3^{(+)}$ نشان می‌دهیم؛ کسری را که در ویژه‌حالت σ_3 با ویژه‌مقدار -1 هستند با $f_3^{(-)}$ نشان می‌دهیم، و غیره، به‌طوری که

$$f_3^{(+)} + f_3^{(-)} + f_1^{(+)} + f_1^{(-)} + f_2^{(+)} + f_2^{(-)} = 1 \qquad (\text{م}2\text{-}19)$$

ویژه‌حالتهای σ_z، σ_x و σ_y با ویژه‌مقدارهای ± 1 عبارت‌اند از

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\i/\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-i/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

بنابراین، ماتریس چگالی به‌صورت زیر

$$\rho = f_3^{(+)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1\ \ 0) + f_3^{(-)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0\ \ 1) + f_1^{(+)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2})$$
$$+ f_1^{(-)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}\ \ -1/\sqrt{2}) + f_2^{(+)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}\ \ -i/\sqrt{2})$$
$$+ f_2^{(-)} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} (1/\sqrt{2}\ \ i/\sqrt{2})$$

با کمی محاسبه، و با استفاده از م۲ـ۱۹، این ρ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P} \qquad \text{(م۲ـ۲۰)}$$

که در آن $P_i = f_i^{(+)} - f_i^{(-)}$. کسری از ذرات در یک مخلوط که در جهت $+z$ هستند منهای کسری که در جهت $-z$ هستند قطبش در راستای z نامیده می‌شود، و آن‌را با P_3 نشان می‌دهیم. برای سایر راستاها نیز به همین ترتیب است. بنابراین، از مقایسهٔ م۲ـ۲۰ با م۲ـ۱۸، می‌توان $\mathbf{b}$ را بردار قطبش برایند باریکهٔ $\mathbf{P}$ تعبیر کرد. در مورد باریکه‌های اتمها با تکانهٔ زاویه‌ای l، کلی‌ترین صورت ρ یک ماتریس هرمیتی $(2l+1) \times (2l+1)$ است، و تعبیر عناصر آن پیچیده‌تر است. بحث بیشتر دربارهٔ ماتریس چگالی فراتر از مجال این کتاب است.

مبحث ویژهٔ ۳

تقریب ونتزل-کرامرز-بریلوئن

این روش تقریبی مخصوصاً وقتی مفید است که با پتانسیلهای کند تغییر سروکار داریم. معنای دقیق این بعداً روشن خواهد شد. هدف حل معادلهٔ زیر است

$$\frac{d^{۲}\psi(x)}{dx^{۲}}+\frac{۲m}{\hbar^{۲}}[E-V(x)]\psi(x)=۰ \qquad (م۳-۱)$$

و برای این کار، مفید است که بنویسیم

$$\psi(x)=R(x)e^{iS(x)/\hbar} \qquad (م۳-۲)$$

آنگاه

$$\frac{d^{۲}\psi}{dx^{۲}}=\left[\frac{d^{۲}R}{dx^{۲}}+\frac{۲i}{\hbar}\frac{dR}{dx}\frac{dS}{dx}+\frac{i}{\hbar}R\frac{d^{۲}S}{dx^{۲}}-\frac{۱}{\hbar^{۲}}R\left(\frac{dS}{dx}\right)^{۲}\right]e^{iS(x)/\hbar} \qquad (م۳-۳)$$

پس از جاگذاری در م۳-۱ و تفکیک قسمتهای انگاری و حقیقی، این معادلهٔ دیفرانسیل به دو قسمت تقسیم می‌شود. از قسمت انگاری به‌دست می‌آوریم

$$R\frac{d^{۲}S}{dx^{۲}}+۲\frac{dR}{dx}\frac{dS}{dx}=۰ \qquad (م۳-۴)$$

یعنی

$$\frac{d}{dx}\left(\log\frac{dS}{dx} + ۲\log R\right) = ۰$$

که جواب آن عبارت است از

$$\frac{dS}{dx} = \frac{C}{R^۲} \qquad (م۳\_۵)$$

از قسمت حقیقی داریم

$$\frac{d^۲R}{dx^۲} - \frac{۱}{\hbar^۲}R\left(\frac{dS}{dx}\right)^۲ + \frac{۲m[E-V(x)]}{\hbar^۲}R = ۰$$

که پس از جاگذاری م۳ـ۵ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d^۲R}{dx^۲} - \frac{C^۲}{\hbar^۲}\,\frac{۱}{R^۳} + \frac{۲m[E-V(x)]}{\hbar^۲}R = ۰ \qquad (م۳\_۶)$$

در اینجا تقریب زیر را به‌کار می‌بریم

$$\frac{۱}{R}\,\frac{d^۲R}{dx^۲} \ll \frac{C^۲}{\hbar^۲}\,\frac{۱}{R^۴} = \frac{۱}{\hbar^۲}\left(\frac{dS}{dx}\right)^۲ \qquad (م۳\_۷)$$

و در نتیجه، با حذف جملهٔ اول در م۳ـ۶، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{C^۲}{R^۴} = ۲m[E-V(x)] \qquad (م۳\_۸)$$

بنابراین

$$\frac{C}{R^۲} = \frac{dS}{dx} = \sqrt{۲m[E-V(x)]} \qquad (م۳\_۹)$$

و سرانجام

$$S(x) = \int_{x_۱}^{x} dy\sqrt{۲m[E-V(x)]} \qquad (م۳\_۱۰)$$

شرط اعتبار را می‌توان به گزاره‌ای دوباره تغییر $V(x)$ تبدیل کرد. این شرط در صورتی برقرار است که $V(x)$ در یک طول‌موج به‌کندی تغییر کند؛ طول موج از یک نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند، اما برای پتانسیل کند تغییر $V(x)$ با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$\lambda\!\!\!{}^{-}(x) = \frac{\hbar}{p(x)} = \frac{\hbar}{\{2m[E - V(x)]\}^{1/2}} \qquad \text{(م۳ـ۱۱)}$$

نقاطی که در آنها

$$E - V(x) = 0 \qquad \text{(م۳ـ۱۲)}$$

نیاز به بررسی خاص دارد، زیرا چنانکه دیده می‌شود $R(x)$ در معادلهٔ تقریبی م۳ـ۸ در این نقاط تکین است. چون تابع‌موج و در نتیجه $R(x)$ نمی‌تواند تکین باشد، تکینگی $R(x)$ به‌معنای این است که تقریب م۳ـ۷ در این نقاط ضعیف است. این نقاط ویژه را نقاط برگشت می‌نامند، زیرا در این نقاط است که ذرهٔ کلاسیک برمی‌گردد: ذرهٔ کلاسیک تنها در ناحیهٔ $E - V(x)$ می‌تواند حرکت کند. روش بررسی جوابها در نزدیکی نقاط برگشت تا اندازه‌ای فنی‌تر از آن است که در اینجا بیان کنیم. اساس کار این است که یک جواب در طرف چپ نقطهٔ برگشت [جایی که در آن $E > V(x)$] به‌صورت زیر داریم

$$\psi(x) = R\, e^{i\int_{x_1}^{x} dy\, \sqrt{(2m/\hbar^2)[E - V(y)]}} \qquad \text{(م۳ـ۱۳)}$$

و جوابی در طرف راست نقطهٔ برگشت [که در آن $E < V(x)$] داریم، و فرمولی لازم داریم که بین آنها درونیابی کند. در حوالی نقطهٔ برگشت می‌توان $\sqrt{(2m/\hbar^2)[E - V(x)]}$ را با یک خط راست در یک بازهٔ کوچک تقریب گرفت، و معادلهٔ شرودینگر را به‌طور دقیق حل کرد. چون این یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم است دو ثابت قابل تنظیم خواهیم داشت که یکی از آنها با برازش جواب به م۳ـ۱۳ تعیین می‌شود و دیگری با برازش آن به

$$\psi(x) = R\, e^{-\int_{x_1}^{x} dy\, \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(y) - E]}} \qquad \text{(م۳ـ۱۴)}$$

که جواب در طرف راست نقطهٔ برگشت است.[1] وقتی x افزایش می‌یابد دامنهٔ جواب بالا کاهش

---

۱. برای تفصیل بیشتر می‌توانید به هر کتاب پیشرفته‌تری دربارهٔ مکانیک کوانتومی، از جمله دو کتاب زیر، مراجعه کنید.
پاول، ج ل و کریسمن، ب، مکانیک کوانتومی، ترجمهٔ پاشایی‌راد و سعادت، تهران مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸؛
L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1968.

می‌یابد. تضعیف کل در نقطهٔ [illegible] E، عبارت است از

$$\frac{\psi(x_{\rm II})}{\psi(x_{\rm I})} \simeq e^{-\int_{x_{\rm I}}^{x_{\rm II}} dy\sqrt{(2m/\hbar^2)[V(y)-E]}} \qquad (\text{م}۳\text{ـ}۱۵)$$

که دقیقاً جذر احتمال تراگسیل است که در فصل ۵ به‌دست آوردیم.

مبحث ویژهٔ ۴

طول عمر، پهنای خط، و تشدید

در این بخش سه کار انجام می‌دهیم:

(الف) با استفاده از رهیافت کلی وایسکوف و ویگنر، روش نسبتاً دقیقتری برای بررسی آهنگهای گذار بیان می‌کنیم که نشان می‌دهد چگونه افت نمایی به‌وجود می‌آید.

(ب) نشان می‌دهیم که چگونه شکل لورنتسی برای پهنای خط به‌وجود می‌آید.

(ج) نشان می‌دهیم که دامنهٔ پراکندگی فوتون از اتم در حالت پایه، وقتی انرژی فوتون فرودی برابر با انرژی (جابه‌جا شده) مربوط به حالت برانگیخته است، به‌شدت قله‌دار می‌شود.

برای اینکه مسئله تا حد امکان ساده شود، اتمی را تنها با دو تراز، یکی حالت پایه با انرژی صفر و دیگری یک حالت برانگیخته با انرژی E، در نظر می‌گیریم. این دو حالت به میدان الکترومغناطیسی، که آن‌را نرده‌ای می‌گیریم، جفت می‌شوند، و در نتیجه هیچ بردار قطبشی ظاهر نمی‌شود. تنها یک زیرمجموعه از ویژه‌حالتهای $H_\circ$ را انتخاب می‌کنیم که متشکل است از حالت برانگیختهٔ $\phi_\backslash$ که برای آن

$$H_\circ \phi_1 = E\phi_1 \qquad (\text{م}۴\text{-}۱)$$

و حالت پایه به علاوهٔ یک فوتون، $\phi(\mathbf{k})$، که برای آن

$$H_\circ \phi(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}) \qquad (\text{م}۴\text{-}۲)$$

و در بسط یک تابع اختیاری به این زیرمجموعه بسنده می‌کنیم. این کار مسلماً وقتی موجه است که جفت‌شدگی میان دو حالت ϕ_1 و $\phi(\mathbf{k})$ از طریق پتانسیل V، مانند جفت‌شدگی الکترومغناطیسی،

کوچک باشد زیرا آنگاه تأثیر حالتهای دوفوتونی یا سه‌فوتونی و ... قابل چشمپوشی است. توجه کنید که حتی وقتی $\mathbf{k}$ به‌گونه‌ای است که انرژیهای $\varepsilon(\mathbf{k})$ و E با هم برابرند، داریم

$$\langle \phi_1 | \phi(\mathbf{k}) \rangle = 0 \tag{م۴ـ۳}$$

این حالتها به این دلیل متعامدند که در یکی از آنها فوتون داریم و در دیگری نداریم، و نیز برای یکی از آنها اتم برانگیخته است و برای دیگری نیست.

جواب معادلهٔ

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = (H_0 + V)\psi(t) \tag{م۴ـ۴}$$

را می‌توان برحسب مجموعهٔ کامل بسط داد:

$$\psi(t) = a(t)\phi_1\, e^{-iEt/\hbar} + \int d^3\mathbf{k}\, b(\mathbf{k},t)\phi(\mathbf{k}) e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t/\hbar} \tag{م۴ـ۵}$$

با جاگذاری در م۴ـ۴، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da}{dt} e^{-iEt/\hbar}\phi_1 &+ Ea\, e^{-iEt/\hbar}\phi_1 \\ &+ i\hbar \int d^3\mathbf{k} \frac{db(\mathbf{k},t)}{dt} e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t/\hbar}\phi(\mathbf{k}) + \int d^3\mathbf{k}\, \varepsilon(\mathbf{k}) b(\mathbf{k},t) e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t/\hbar}\phi(\mathbf{k}) \\ &= Ea(t)e^{-iEt/\hbar}\phi_1 + \int d^3\mathbf{k}\, \varepsilon(\mathbf{k}) b(\mathbf{k},t) e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t/\hbar}\phi(\mathbf{k}) \\ &\quad + a(t)e^{iEt/\hbar} V\phi_1 + \int d^3\mathbf{k}\, b(\mathbf{k},t) e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t/\hbar} V\phi(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

حاصلضرب نرده‌ای با ϕ_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$i\hbar \frac{da}{dt} = a(t)\langle \phi_1 | V | \phi_1 \rangle + \int d^3\mathbf{k}\, b(\mathbf{k},t) e^{-i[\varepsilon(\mathbf{k})-E]t/\hbar} \langle \phi_1 | V | \phi(\mathbf{k}) \rangle$$

چون V وقتی روی یک حالت عمل می‌کند تعداد فوتونها را بنابه فرض به‌اندازهٔ ۱ تغییر می‌دهد، باید $\langle \phi_1 | V | \phi_1 \rangle = 0$. با نمادنگاری

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}) - E &= \hbar\omega(\mathbf{k}) \\ \langle \phi_1 | V | \phi(\mathbf{k}) \rangle &= M(\mathbf{k})\rangle \end{aligned} \tag{م۴ـ۶}$$

معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

$$i\hbar\frac{da(t)}{dt} = \int d^3\mathbf{k}b(\mathbf{k},t)e^{-i\omega(\mathbf{k})t}M(\mathbf{k}) \qquad (\text{م}۴\text{\_}۷)$$

اگر ضرب نرده‌ای در $\phi(\mathbf{q})$ را انجام دهیم، و مجدداً با استفاده از شمارش تعداد فوتونها قرار دهیم $\langle\phi(\mathbf{q})|V|\phi(\mathbf{k})\rangle = 0$، با توجه به رابطهٔ بهنجارش

$$\langle\phi(\mathbf{q})|\phi(\mathbf{k})\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \qquad (\text{م}۴\text{\_}۸)$$

معادلهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم

$$i\hbar\frac{db(\mathbf{q},t)}{dt} = a(t)\; e^{i\omega(\mathbf{q})t}M^*(\mathbf{q}) \qquad (\text{م}۴\text{\_}۹)$$

چون اگر حالت برانگیخته در $t = 0$ اشغال شده باشد $b(\mathbf{k},0) = 0$، جواب این معادله عبارت است از

$$b(\mathbf{k},t) = \frac{1}{i\hbar}M^*(\mathbf{k})\int_0^t dt' e^{i\omega(\mathbf{k})t'}a(t') \qquad (\text{م}۴\text{\_}۱۰)$$

با جاگذاری در م۴_۷ به معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{da(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2}\int d^3\mathbf{k}|M(\mathbf{k})|^2e^{-i\omega(\mathbf{k})t}\int_0^t dt' a(t')e^{i\omega(\mathbf{k})t'} \qquad (\text{م}۴\text{\_}۱۱)$$

اکنون فرض می‌کنیم جواب این معادله به‌ازای مقادیر بزرگ t به‌صورت زیر است

$$a(t) = a_0 e^{-zt} \qquad (\text{م}۴\text{\_}۱۲)$$

با جاگذاری در م۴_۱۱ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} -ze^{-zt} &= -\frac{1}{\hbar^2}\int d^3\mathbf{k}|M(\mathbf{k})|^2\frac{e^{-i\omega(\mathbf{k})t}}{i\omega(\mathbf{k})-z}(e^{i\omega(\mathbf{k})t}e^{-zt}-1) \\ &= -\frac{1}{\hbar^2}\int d^3\mathbf{k}|M(\mathbf{k})|^2\frac{1}{i\omega(\mathbf{k})-z}(e^{-zt}-e^{-i\omega(\mathbf{k})t}) \end{aligned} \qquad (\text{م}۴\text{\_}۱۳)$$

جملهٔ دوم به‌ازای مقادیر بزرگ t صفر می‌شود، زیرا تابع زیر انتگرال حاصلضرب تابعی از $\mathbf{k}$ با تغییرات هموار و تابع کرانداری است که به‌سرعت تغییر می‌کند، و می‌توان نشان داد که انتگرال بنابه لم ریمان‌ـلبگ سریعتر از هر توان $1/t$ صفر می‌شود. بنابراین، آنچه باقی می‌ماند عبارت است از

$$z = \frac{1}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{i\omega(\mathbf{k}) - z} \tag{م۴ـ۱۴}$$

اکنون می‌نویسیم

$$z = \frac{\gamma}{2} + \frac{i\Delta}{\hbar} \tag{م۴ـ۱۵}$$

و چون $|M(\mathbf{k})|^2$ کوچک‌اند، γ و $\Delta/\hbar$ نیز کوچک‌اند. با جاگذاری در م۴ـ۱۴ و حذف حاصلضرب کوچکتر $\Delta/\hbar$ و $|M(\mathbf{k})|^2$، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\gamma}{2} + \frac{i\Delta}{\hbar} = \frac{1}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{-i\omega(\mathbf{k}) + \gamma/2}{(\gamma/2)^2 + (\omega(\mathbf{k}) - \Delta/\hbar)^2} \tag{م۴ـ۱۶}$$

با استفاده از رابطهٔ

$$\lim_{\lambda = 0^+} \frac{\lambda}{\sigma^2 + \lambda^2} = \pi\delta(\sigma) \tag{م۴ـ۱۷}$$

معادلهٔ م۴ـ۱۶ به دو معادلهٔ زیر تفکیک می‌شود

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\pi}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \delta(\hbar\omega(\mathbf{k}) - \Delta) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k}|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{k}) - (E + \Delta)) \end{aligned} \tag{م۴ـ۱۸}$$

و

$$\begin{aligned} \Delta &= -\int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{\hbar\omega(\mathbf{k}) - \Delta} \\ &= \int d^3\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^2 \frac{1}{E + \Delta - \epsilon(\mathbf{k})} \end{aligned} \tag{م۴ـ۱۹}$$

در هر دو انتگرال، می‌توان Δ را در شناسهٔ تابع دلتا و در مخرج کسر، با توجه به‌دقت محاسبه، حذف کرد، اما آن‌را نگه می‌داریم تا بر این نکته تأکید کنیم که این $E + \Delta$ است که همه جا ظاهر

می‌شود، یعنی انرژی حالت برانگیخته به‌اندازهٔ Δ جابه‌جا شده است. بدین‌ترتیب، ضریب $\phi_۱$ در $\psi(t)$، با شرط اولیهٔ

$$a(۰) = a_۰ = ۱ \qquad (\text{م}۴\text{ـ}۲۰)$$

عبارت است از

$$a(t) = e^{-\gamma t/۲} e^{-i(E+\Delta)t/\hbar} \qquad (\text{م}۴\text{ـ}۲۱)$$

و احتمال یافتن $\psi(t)$ در حالت اولیهٔ $\phi_۱$ پس از زمان (طولانی) t برابر است با

$$|a(t)|^۲ = e^{-\gamma t} \qquad (\text{م}۴\text{ـ}۲۲)$$

از م۴ـ۱۸ ملاحظه می‌کنیم که γ آهنگ افت است که در نظریهٔ اختلال محاسبه می‌شود. همچنین ضریب فاز، چنانکه مقایسه با ۱۶ـ۱۶ نشان می‌دهد، متضمن انرژی جابه‌جاشده به اندازهٔ جابه‌جایی انرژی اختلال مرتبهٔ دوم است. تنها تفاوت آن است که حالتهای میانی که روی آنها جمع زده می‌شود در اینجا یک پیوستار تشکیل می‌دهند. چون مخرج کسر در م۴ـ۱۰ می‌تواند صفر شود، باید از فرمول زیر استفاده کنیم

$$i\Delta/\hbar = \lim_{\lambda\to ۰} \frac{۱}{\hbar^۲} \int d^۳\mathbf{k} |M(\mathbf{k}|^۲ \frac{-i\omega(\mathbf{k})}{\lambda^۲ + (\omega(\mathbf{k}) - \Delta/\hbar)^۲} \qquad (\text{م}۴\text{ـ}۲۳)$$

کمیت قابل توجه دیگر احتمال تحول حالت $\psi(t)$ به $\phi(\mathbf{k})$ در $t = \infty$ است. این احتمال برابر است با $|b(\mathbf{k},\infty)|^۲$، که در آن بنابه م۴ـ۱۰ و م۴ـ۱۲ داریم

$$\begin{aligned} b(\mathbf{k},\infty) &= \frac{۱}{i\hbar} M^*(\mathbf{k}) \int_۰^\infty dt'\, e^{-[z-i\omega(\mathbf{k})]t'} \\ &= \frac{M^*(\mathbf{k})}{i\hbar} \frac{۱}{z - \omega(\mathbf{k})} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$b(\mathbf{k},\infty) = \frac{M^*(\mathbf{k})}{\varepsilon(\mathbf{k}) - E - \int d^۳\mathbf{k}' \frac{|M(\mathbf{k}')|^۲}{E - \varepsilon(\mathbf{k}')} + i\hbar\gamma/۲} \qquad (\text{م}۴\text{ـ}۲۴)$$

و مجذور قدرمطلق آن عبارت

$$|b(\mathbf{k},\infty)|^{۲}=\frac{|M(\mathbf{k})|^{۲}}{[\varepsilon(\mathbf{k})-E-\Delta]^{۲}+(\hbar\gamma/۲)^{۲}} \qquad (م۴\_۲۵)$$

که شکل لورنتسی پهنای خط را می‌دهد: انرژی فوتون حول انرژی جابه‌جاشدهٔ تراز برانگیخته، با پهنایی که با $\hbar\gamma/۲$ توصیف می‌شود، متمرکز شده است.

همین شکل در مسئلهٔ پراکندگی ظاهر می‌شود. پراکندگی یک "فوتون" با تکانهٔ $\mathbf{k}_i$ را از اتمی در حالت پایه در نظر بگیرید. حالت دستگاه باز هم با م۴ـ۱، م۴ـ۲، م۴ـ۷ و م۴ـ۹ توصیف می‌شود، با این استثنا که در ابتدا، که در اینجا به‌معنای $t=-\infty$ در است، حالت با $\phi(\mathbf{k}_i)$ مشخص می‌شود، و از این‌رو

$$b(\mathbf{q},t)=\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}_i) \qquad \text{در } t=-\infty \qquad (م۴\_۲۶)$$

بنابراین، با انتگرال گرفتن از م۴ـ۹ به‌دست می‌آوریم

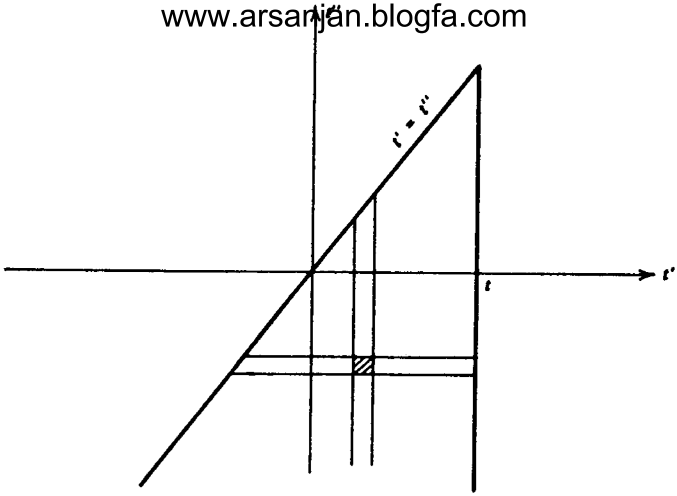
$$b(\mathbf{q},t)=\delta(\mathbf{q}-\mathbf{k}_i)+\frac{۱}{i\hbar}M^*(\mathbf{q})\int_{-\infty}^{t}dt'a(t')e^{i\omega(\mathbf{q})t'} \qquad (م۴\_۲۷)$$

اکنون باید دامنهٔ گذار به یک حالت نهایی را تعیین کنیم که در آن فوتون در $t=+\infty$ دارای تکانهٔ $\mathbf{k}_f$ است. با استفاده از معادلهٔ بالا داریم

$$\begin{aligned}\langle\phi(\mathbf{k}_f)|\psi(+\infty)\rangle&=b(\mathbf{k}_{f'}+\infty)\\&=\delta(\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i)-\frac{i}{\hbar}M^*(\mathbf{k}_f)\int_{-\infty}^{\infty}dt'a(t')e^{i\omega_f t'} \qquad (م۴\_۲۸)\\&(\omega_f\equiv\omega(\mathbf{k}_f))\end{aligned}$$

با جاگذاری م۴ـ۲۷ در م۴ـ۷ به معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$\frac{da(t)}{dt}=\frac{۱}{i\hbar}e^{-i\omega_i t}M(\mathbf{k}_i)-\frac{۱}{\hbar^{۲}}\int d^{۳}\mathbf{k}|M(\mathbf{k})|^{۲}e^{-i\omega(\mathbf{k})t}\int_{-\infty}^{t}dt'a(t')e^{i\omega(\mathbf{k})t'} \qquad (م۴\_۲۹)$$



شکل م۴ـ۱ انتگرال در معادلهٔ م۴ـ۳۰ را می‌توان یا به‌صورت "مجموع" نوارهای قائم، مانند این معادله، یا به‌صورت مجموع نوارهای افقی، مانند معادلهٔ م۴ـ۳۲، نوشت. از همین تغییر ترتیب در م۴ـ۳۳ استفاده شده است بجز اینکه خط قائم در t'' به $+\infty$ منتقل شده است.

از این معادله می‌توان انتگرال گرفت، و با توجه به اینکه $a(-\infty) = ۰$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a(t) =& \frac{M(\mathbf{k}_i)}{i\hbar} \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega_i t'} \\ & - \frac{۱}{\hbar^۲} \int d^۳\mathbf{k} |M(\mathbf{k})|^۲ \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega(\mathbf{k})t'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' a(t'') e^{i\omega(\mathbf{k})t''} \end{aligned} \qquad \text{(م۴ـ۳۰)}$$

اما انتگرال $\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega_i t'}$ خوش‌تعریف نیست. روش متعارف این است که آن‌را به‌صورت زیر بنویسیم

$$\lim_{\varepsilon \to ۰} \int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i(\omega_i + i\varepsilon)t'} = \lim_{\varepsilon \to ۰} i \frac{e^{-i(\omega_i + i\varepsilon)t}}{\omega_i + i\varepsilon} \qquad \text{(م۴ـ۳۱)}$$

استفاده از ضریب همگرایی، که می‌توان بعداً آن‌را به صورت مناسبی صفر کرد، تا اندازه‌ای شبیه به در نظر گرفتن پتانسیل کولنی به‌عنوان حد پتانسیل کولنی استتار شده است، که در فصل ۲۳ به آن اشاره شد. اکنون با توجه به شکل م۴ـ۱ می‌توان دید که

$$\int_{-\infty}^{t} dt' e^{-i\omega(\mathbf{k})t'} \int_{-\infty}^{t'} dt'' a(t'') e^{i\omega(\mathbf{k})t''} = \int_{-\infty}^{t} dt'' a(t'') e^{i\omega(\mathbf{k})t''} \int_{t''}^{t} dt' e^{-i\omega(\mathbf{k})t'}$$

$$= \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{t} dt'' a(t'')[e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t'')} - 1]$$

و در نتیجه

$$a(t) = \frac{M(\mathbf{k}_i)e^{-i\omega_i t}}{h(\omega_i + i\varepsilon)} - \frac{i}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{t} dt'' a(t'')[e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t'')} - 1]$$

(م۴ـ۳۲)

بنا به م۴ـ۲۸، کمیت حائز اهمیت برای پراکندگی در جهتی غیر از جهت جلو (که در نتیجه می‌توان از جملهٔ اول صرفنظر کرد) عبارت است از

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) e^{i\omega_f t} = \frac{M(\mathbf{k}_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega_f - \omega_i)t}$$

$$-\frac{i}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega_f t} \int_{-\infty}^{t} dt'' a(t'')[e^{-i\omega(\mathbf{k})(t-t'')} - 1]$$

$$= \frac{2\pi M(\mathbf{k}_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} \delta(\omega_f - \omega_i)$$

(م۴ـ۳۳)

$$-\frac{i}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' a(t'') \int_{t''}^{\infty} dt\, \{e^{i\omega(\mathbf{k})t''} e^{i[\omega_f - \omega(\mathbf{k})]t} - e^{i\omega_f t}\}$$

که در آن در سطر آخر باز هم انتگرال را با استفاده از شکل م۴ـ۱ نوشته‌ایم. انتگرال‌گیری روی t را باز هم می‌توان با استفاده از روش ضریب همگرایی انجام داد، و در نتیجه م۴ـ۳۳ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt a(t) e^{i\omega_f t} = \frac{2\pi M(\mathbf{k}_i)\delta(\omega_f - \omega_i)}{\hbar(\omega_i + i\varepsilon)} + \frac{1}{\hbar^2} \int d^3\mathbf{k} \frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\omega(\mathbf{k})} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' a(t'') e^{i\omega_f t''}$$

$$\times \left[\frac{1}{\omega_f - \omega(\mathbf{k}) + i\varepsilon} - \frac{1}{\omega_f + i\varepsilon}\right]$$

که در واقع معادله‌ای برای یک مجهول است. از حل این معادله داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, a(t)e^{i\omega_f t} = \frac{2\pi M(\mathbf{k}_i)\delta(\omega_f-\omega_i)}{\hbar(\omega_i+i\varepsilon)} \times \frac{1}{1-\frac{1}{\hbar^2\omega_f}\int d^3\mathbf{k}\frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\omega_f-\omega(\mathbf{k})+i\varepsilon}} \tag{م۴ـ۳۴}$$

بنابراین، برای جهت غیر جلو به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} b(\mathbf{k}_f,\infty) &= -\frac{i}{\hbar}M^*(\mathbf{k}_f)\cdot 2\pi M(\mathbf{k}_i)\,\delta(\omega_f-\omega_i) \\ &\quad\times \frac{1}{\hbar\omega_i+i\varepsilon-\int d^3\mathbf{k}\frac{|M(\mathbf{k})|^2}{\hbar\omega_f-\hbar\omega(\mathbf{k})+i\varepsilon}} \\ &= \frac{-2\pi i\,\delta(\hbar\omega_f-\hbar\omega_i)M(\mathbf{k}_i)M^*(\mathbf{k})_f}{\varepsilon(\mathbf{k}_i)-E-\int d^3\mathbf{k}\frac{|M(\mathbf{k}|^2}{\varepsilon(\mathbf{k}_i)-\varepsilon(\mathbf{k})}+i\pi\int d^3\mathbf{k}|M(\mathbf{k})|^2\delta[\varepsilon(\mathbf{k}_i)-\varepsilon(\mathbf{k})]} \end{aligned} \tag{م۴ـ۳۵}$$

وقتی انرژی فرودی ε_i (مساوی با انرژی نهایی ε_f) نزدیک به انرژی حالت برانگیختهٔ اتم است، که مانند م۴ـ۲۵ به $E+\Delta E$ جابه‌جا شده است، دامنه قلهٔ تیزی پیدا می‌کند. این نتیجه تفسیرهای آخر فصل ۱۸ را تأیید می‌کند.

ثابتهای فیزیکی[1]

$N_۰$ (عدد آووگادرو)	۶٫۰۲۲۱۳۶۷(۳۶) $\times$ $۱۰^{۲۳}\mathrm{mol}^{-۱}$
c (سرعت نور، تعریف)	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸ $\times$ $۱۰^{۱۰}\mathrm{cms}^{-۱}$
e (بار الکترون)	۱٫۶۰۲۱۷۷۳۳(۴۹) $\times$ $۱۰^{-۱۹}\mathrm{C}$
	۴٫۸۰۶۵۳۱۹۹(۱۵) $\times$ $۱۰^{-۱۰}\mathrm{esu}$
۱MeV	۱٫۶۰۲۱۷۷۳۳(۴۹) $\times$ $۱۰^{-۶}\mathrm{erg}$
$\hbar$ (ثابت پلانک بخش بر ۲π)	۱٫۰۵۴۵۷۲۶۶(۶۳) $\times$ $۱۰^{-۲۷}\mathrm{erg\text{-}s}$
	۶٫۵۸۲۱۲۲۰(۲۰) $\times$ $۱۰^{-۲۲}\mathrm{MeV\text{-}s}$
α (ثابت ساختار ریز $e^۲/\hbar c$)	۱/۱۳۷٫۰۳۵۹۸۹۵(۶۱)
k (ثابت بولتزمن)	۱٫۳۸۰۶۵۸(۱۲) $\times$ $۱۰^{-۱۶}\mathrm{erg\text{-}K}^{-۱}$
m_e (جرم الکترون)	۹٫۱۰۹۳۸۹۷(۵۴) $\times$ $۱۰^{-۲۸}\mathrm{g}$
	۰٫۵۱۰۹۹۹۰۶(۱۵)$\mathrm{MeV}/c^۲$
m_p (جرم پروتون)	۱٫۶۷۲۶۲۳۱(۱۰) $\times$ $۱۰^{-۲۴}\mathrm{g}$
	۹۳۸٫۲۷۲۳۱(۲۸)$\mathrm{MeV}/c^۲$
m_n (جرم نوترون)	۱٫۶۷۴۹۲۸۶(۱) $\times$ $۱۰^{-۲۴}\mathrm{g}$
	۹۳۹٫۵۶۵۶۳(۲۸)$\mathrm{MeV}/c^۲$
$(m(C^{۱۲})/۱۲)$۱amu	۱٫۶۶۰۵۴۰۲(۱۰) $\times$ $۱۰^{-۲۴}\mathrm{g}$
	۹۳۱٫۴۹۴۳۲(۲۸)$\mathrm{MeV}/c^۲$
$(\hbar/m_e c\alpha)a_۰$	۰٫۵۲۹۱۷۷۲۴۹(۲۴) $\times$ $۱۰^{-۸}\mathrm{cm}$
$(m_e c^۲\alpha^۲/۲)R_\infty$	۱۳٫۶۰۵۶۹۸(۴۰)eV
G (ثابت گرانش)	۶٫۶۷۲۵۹(۸۵) $\times$ $۱۰^{-۸}\mathrm{cm}^۳\mathrm{g}^{-۱}\mathrm{s}^{-۲}$
μ_B (مگنتون بور $e\hbar/۲m_e c$)	۰٫۵۷۸۸۳۸۲۶۳(۵۲) $\times$ $۱۰^{-۱۴}\mathrm{MeV\ G}^{-۱}$

---

۱. اعداد از مقالهٔ بسیار جالب زیر اقتباس شده‌اند:

E R Cohen and B N Taylor, *Phys Today*, BG 9-14 (August 1994).

مراجع[1]

G Baym, *Lectures on Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1969.

کتابی است بسیار جذاب، با تعادل مناسبی بین صورتبندی، استدلالهای شهودی و کاربرد. این کتاب را باید پیشرفته در نظر گرفت، و قابل فهم برای دانشجویی که مطالب کتاب حاضر را فراگرفته است.[1]

H A Bethe and R W Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics* (2nd edition), W A Benjamin, New York, 1968.

این کتاب حاوی بحثهای مفصلی دربارهٔ روشهای محاسباتی قابل کاربرد در نظریهٔ ساختار اتمی، شکافتگیهای چند تایی، اثر فوتوالکتریک و برخوردهای اتمی است. بسیاری از مطالب درکتابهای درسی دیگر یافت نمی‌شوند، و از این‌رو یک کتاب درسی پیشرفته و همچنین یک مرجع جامع است.

H A Bethe and E E Salpeter, *Quantum Mechanics of One -and Two-Electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlin/ New York, 1957.

این تجدید چاپ مقالهٔ مؤلفان در *Handbuch der Physik* یک بررسی دقیق، مفصل و قاطع از مسئلهٔ مورد نظر است. این کتاب دربارهٔ اتمها است نه مکانیک کوانتومی، و سطح آن بالاست. این مقاله یک مرجع عالی است.

D Bohm, *Quantum Theory*, Dover Publ, New York, 1989.

این کتابی است در سطح کتاب حاضر، که با سبکی پراکنده نوشته شده است. مؤلف توجه بسیاری به اصول نظریهٔ کوانتومی دارد و یک بحث عالی دربارهٔ نظریهٔ کوانتومی فرایند اندازه‌گیری ارائه می‌کند. چند کاربرد بیان شده‌اند و تعداد مسائل اندک است.

---

۱. کتابهای بسیاری در (بارهٔ) مکانیک کوانتومی نوشته شده‌اند. بعضی از آنها را مطالعه کرده‌ام، بعضی را خوانده‌ام، چندتایی را نگاه کرده‌ام، و احتمالاً تعدادی نیز از نظرم دور مانده‌اند. سیاهه‌ای که در اینجا ارائه کرده‌ام جامع نیست، و اگر اسمی ازکتابی برده نشده است به معنای انتقاد از آن نیست. مخصوصاً، کتابهای شیمی کوانتومی معرفی نشده‌اند.

S Borowitz, *Fundamentals of Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1967.

این کتابی است که بسیار خوب نوشته شده است و حدود نیمی از آن به نظریهٔ امواج و مکانیک کلاسیک اختصاص یافته است. سطح آن قابل مقایسه با کتاب حاضر است.

J J Brehm and W J Mullin, *Introduction to the Structure of Matter*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

این کتابی است پیشرفته و فراگیر که قسمت اعظم فیزیک نوین را با سبکی بسیار خواندنی دربر می‌گیرد. یک مرجع عالی برای هر کس که خواهان تفصیل کیفی‌تری برای مباحثی است که در کتاب حاضر شتابزده به آنها اشاره شده است.

E U Condon and G H Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1959.

این یک مرجع بسیار مفصل دربارهٔ تمام جوانب طیفهای اتمی است، اگرچه از روشهای جدید مبتنی بر نظریهٔ گروه استفاده نمی‌کند. این کتاب بسیار پیشرفته است، و از این‌رو نارساییهای آن در توسعهٔ روشها برای هیچکس بجز متخصصان اهمیتی ندارد. برای دانشجو بسیار مفید است.

S Brandt and H D Dahmen, *Quantum Mechanics on the Personal Computer* (3rd edition), Springer-Verlag, New York, 1994.

این کتاب که در آن کامپیوترهای شخصی ابزار اصلی آموزش مکانیک کوانتومی است تنها کتابی است از این نوع که من دیده‌ام. چون کامپیوترهای شخصی روز به روز متداولتر می‌شوند و دانشجویان به استفاده از آنها بیشتر عادت می‌کنند، بهره گرفتن از آنها برای یافتن جوابهای معادلهٔ شرودینگر امری اجتناب‌ناپذیر است.

C Cohen-Tannoudji, B Diu, and F Laloe, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1977.

این کتابی است دانشنامه مانند با بیشتر از هزار صفحه، که در آن بررسی مفصلی از بسیاری از جوانب فیزیک اتمی یافت می‌شود. سطح ریاضی آن تا حد زیادی بالاتر از کتاب حاضر است.

R H Dicke and J P Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1960.

از این کتاب بسیار لذت برده‌ام. سطح آن قابل مقایسه با کتاب حاضر است، و چند مبحث که در اینجا بیان نشده‌اند، مخصوصاً آمار کوانتومی، را بررسی می‌کند. مسائل آن عالی هستند.

P A M Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (4th edition), Oxford University Press (Clarendon), Oxford, 1958.

کتابی است بس عالی از یکی از پدیدآورندگان اصلی مکانیک کوانتومی. دانشجویی که مطالب کتاب حاضر را مطالعه کرده است مشکلی با کتاب دیراک نخواهد داشت، و اگر جداً خواهان مهارت در مکانیک کوانتومی باشد باید دیر یا زود به مطالعهٔ آن بپردازد.

R P Feynman and A R Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965.

در سال ۱۹۴۸، ریچارد فیلیپس فاینمن فرمولبندی متفاوتی برای مکانیک کوانتومی ارائه کرد. در این کتاب هم‌ارزی این فرمولبندی با نظریهٔ متعارف نشان داده شده است، و در چند محاسبه از بیان "انتگرال مسیر" برای دامنهٔ کلی استفاده شده است. انتخاب مطالب بسیار جالب توجه است. دیدگاه کتاب با دیدگاه کتاب حاضر تفاوت دارد، و از این‌رو این کتاب نسبتاً پیشرفته‌تر می‌تواند یک مکمل عالی برای کتاب حاضر باشد.

R P Feynman, R B Leighton, and M Sands, *The Faynman Lectures on Physics*, Vol 3, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.

در این مقدمه بر مکانیک کوانتومی، فاینمن انتگرال مسیر را کنار گذاشته است و موضوع را از دیدگاه بردارهای حالت مطرح می‌کند. تعداد زیادی مثال جذاب با حداقل ابزار ریاضی بررسی شده‌اند. یک مکمل عالی که تنها کمبود آن مسائل آخر فصل است.

K Gottfried, *Quantum Mechanics*, Vol 1, *Fundamentals*, W A Benjamin, New York, 1966.

این یک کتاب بسیار پیشرفته است که وجه تمایزش دقتی است که با آن مباحث گوناگون بررسی شده‌اند. بررسی فرایند اندازه‌گیری و اصول ناوردایی عالی است. دانشجویی که به مطالب کتاب حاضر احاطه یافته است باید بتواند کتاب گاتفرید را بخواند، به شرط اینکه ریاضیات مورد نیاز را بداند.

D Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J 1995.

این کتاب جذاب بسیار خوب نوشته شده است و تقریباً در سطح دیکی و ویتکه یا ساکسون است، با انتخاب خوبی از مباحث، از جمله بحثی دربارهٔ فاز هندسی.

W Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover, New York, 1930.

این تجدید چاپ سخنرانیهای هایزنبرگ ۱۹۳۰ دربارهٔ مبانی فیزیکی نظریهٔ کوانتومی هنوز هم خواندنی است. بحث روابط عدم قطعیت مخصوصاً مفید است.

H A Kramers, *Quantum Mechanics*, Interscience, New York, 1957.

این کتابی است از یکی از پایه‌گذاران موضوع که بهترین قسمتهای آن بحث اسپین و درآمدی بر نظریهٔ کوانتومی نسبیتی است، که هر دو نسبتاً پیشرفته‌اند. دانشجویی که مشکلی با مکانیک کوانتومی ندارد پراکنده‌خوانی این کتاب را لذت‌بخش و آموزنده خواهد یافت

L D Landau and E M Lifshitz, *Quantum Mechanics (Nonrelativistic Theory)* (2nd edition), Addison-Wesley, Reading, Mass, 1965.

این کتاب لانداؤ و لیف‌شیتز کتابی از یک دورهٔ بس عالی است که تمام فیزیک نظری را در بر می‌گیرد، و به‌سختی می‌توان گفت که یک کتاب درسی برای دانشجویان است مگر پیشرفته‌ترین آنها. اما هر دانشجویی که به سطح عالی رسید در این کتاب چیزهای مفید زیادی خواهد یافت. دانشجو از لحاظ ریاضی با مشکلی روبه‌رو نخواهد شد.

Richard L Liboff, *Introductory Quantum Mechanics*, Holden-Day, San Francisco, 1980.

این کتابی است بسیار جذاب که تقریباً در سطح ریاضی یکسانی با کتاب حاضر نوشته شده است، و بسیاری از مطالب دوسوم اول کتاب حاضر را با تفصیل بیشتری در برمی‌گیرد. این هم یک مرجع عالی است.

Harry J Lipkin, *Quantum Mechanics –New Approaches to Selected Topics*, North- Holland, Amsterdam, 1973.

این کتاب به تعدادی از مباحث پیشرفته در کاربرد مکانیک کوانتومی با بیانی ساده پرداخته است. فیزیک همیشه مهمترین قسمت بحث است، و دانشجویی که بر کتاب حاضر مسلط است از آن لذت و بهرهٔ فراوانی خواهد برد.

A Messiah, *Quantum Mechanics* (in 2 volumes), John Wiley & Sons, New York, 1968.

این کتاب پوشش کاملی از نظریهٔ کوانتومی، از بررسی پتانسیلهای یک‌بعدی تا کوانتش میدان الکترومغناطیسی و معادلهٔ موج نسبیتی دیراک، است. کتابی است پیشرفته، و از لحاظ پیچیدگی ریاضی در حد دانشجویان کارشناسی ارشد است. این کتاب فوق‌العاده با ارزش است.

E Merzbacher, *Quantum Mechanics* (3rd edition), John Wiley & Sons, New York, 1998.

این کتاب همراه با کتاب شیف، به حق، کتاب درسی متعارف برای سال اول کارشناسی ارشد است. گسترهٔ کامل مفاهیم و پدیده‌ها با ایجاز و سلیقه بررسی شده است، و برای دانشجویی که مطالب کتاب حاضر را مطالعه کرده است قابل استفاده است.

R Omnes, *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N J, 1994.

یک کتاب مهم که به کارهای اخیر در گسترش تعبیر متعارف مکانیک کوانتومی می‌پردازد.

D Park, *Introduction to the Quantum Theory*, (3rd edition)McGraw-Hill, New York, 1984.

این کتاب جذاب در سطح کتاب حاضر نوشته شده است. از میان مباحث مورد بررسی، موضوع آمار کوانتومی است، که کتاب حاضر فاقد آن است، و با روشنی ارائه شده است.

W Pauli, *Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik Handbuch der Physik*, Vol 5/1, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1958.

دانشجوی پیشرفته‌ای که آلمانی می‌داند در این تجدید چاپ مقالهٔ پاؤلی در سال ۱۹۳۰ بحث قاطع و فشرده‌ای از مکانیک کوانتومی خواهد یافت. هیچ کاربردی ذکر نشده است. اما تمام مطالب مهم در آن دیده می‌شود.

P J E Peebles, *Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N J, 1992.

این کتاب درسی است که با قلمی شیوا در سطح کارشناسی نوشته شده است. تفاوت آن با کتابهای دیگر در این سطح (بجز کتاب بوهم) بحث مفصلی است دربارهٔ اینکه فرایند اندازه‌گیری در مکانیک کوانتومی واقعاً چه معنایی دارد.

A B Pippard, *The Physics of Vibration*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1978.

این کتاب تمام انواع نوسانگرها، کلاسیک و مکانیک کوانتومی، را دربرمی‌گیرد. به‌معنای متداول، کتاب درسی نیست، اما خواندن آن لذت‌بخش است.

J L Powell and B Crasemann, *Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading Mass, 1961.

قوت این کتاب در بررسی موشکافانهٔ تمام جزئیات ریاضی مکانیک موجی و مکانیک ماتریسی است. احتمالاً تمام جنبه‌های ریاضی موضوعاتی که در کتاب حاضر نادیده گرفته شده‌اند در این کتاب یافت می‌شوند. حاوی بحث خوبی دربارهٔ تقریب WKB و خواص عمومی معادلات

دیفرانسیل مرتبهٔ دوم است. تعداد کاربردها نسبتاً کم است، و تعداد تمرینها بیشتر از تعداد مسائل است.

M E Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, New York, 1937.
بررسی پیشرفته‌ای از تکانهٔ زاویه‌ای و کاربردهای فراوان در فیزیک اتمی و هسته‌ای.

J J Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (S. F. Editor), Addison-Wesley, Reading, Mass, 1994.
این کتاب عالی را ساکورایی فقید در سطح نسبتاً پیشرفته‌تری از کتاب حاضر، مانند کتابهای مرزباخر و شیف، نوشته است. این کتاب درسی سال اول کارشناسی ارشد با انتخاب مباحثی که طبعاً به مکانیک کوانتومی پیشرفتهٔ مورد علاقهٔ فیزیکدانهای ذرات بنیادی کشیده می‌شود سبک نوینی دارد. کتاب حاوی مجموعه‌ای عالی از مسائل است.

D S Saxon, *Elementary Quantum Mechanics*, Holden- Day, San Francisco, 1968.
این کتاب در سطح کتاب حاضر و مرجع مفیدی است، زیرا انتخاب مباحث تنها کمی تفاوت دارد، و همچنین تأکید و انتخاب کاربردها. کتاب حاوی مجموعه‌ای عالی از مسائل است.

L I Schiff, *Quantum Mechanics* (3rd edition), McGraw-Hill, New York, 1968.
این یکی از کتابهای درسی متعارف برای سال اول کارشناسی ارشد است. شاید کمی بیش از حد فشرده باشد، و از این‌رو برای دانشجویی که آمادگی کامل دارد از همه مناسبتر است. پیچیدگی ریاضی آن از سطح کتاب حاضر بالاتر است.

F Schwabl, *Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1992.
این یک کتاب پیشرفته‌تر با انتخاب جالبی از مباحث است.

R Shankar, *Principles of Quantum Mechanics*, Plenum Press, New York, 1980.
این کتابی است پیچیده‌تر و از لحاظ ریاضی پیشرفته‌تر از کتاب حاضر، که حاوی بررسی جانشینی برای بعضی از مباحث این کتاب است، و مرجع خوبی است.

M P Silverman, *And Yet it Moves; Strange Systems and Subtle Questions in Physics*, Cambridge University Press, New York, 1993.

این کتاب به بررسی کیفی مباحثی می‌پردازد که اصول اساسی نظریهٔ کوانتومی را تشکیل می‌دهند. خواندن این کتاب برای دانشجویی که قسمت بیشتر کتاب حاضر را خوانده باشد کاملاً قابل درک و سرگرم‌کننده است.

فهرست راهنما