

با محاسبهٔ گرادیان به دست می‌آوریم www.arsanjan.blogfa.com

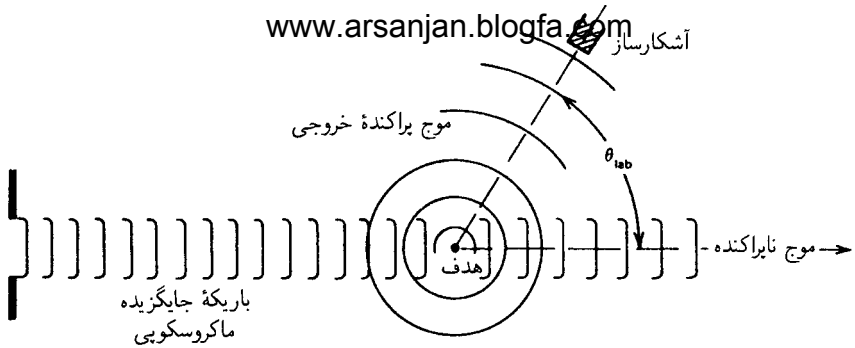
$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{\hbar}{\sqrt{im}} \left\{ \left[e^{-ik \cdot \mathbf{r}} + f^*(\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \left[ik e^{ik \cdot \mathbf{r}} + \hat{l}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{e^{ikr}}{r} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{l}_r f(\theta) \left(ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \right] - \text{همیوخ مختلط} \right\} \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{im}} \left[ik + ik f^*(\theta) \frac{e^{-ikr(1-\cos\theta)}}{r} + ik \hat{l}_r f(\theta) \frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r} + ik \hat{l}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} \right. \\ &\quad \left. - \hat{l}_r f(\theta) \frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r^2} + \hat{l}_\theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \frac{e^{ikr(1-\cos\theta)}}{r^2} - \text{همیوخ مختلط} \right] \end{aligned}$$

در عوامل نمایی از $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kr \cos \theta$ استفاده کرده‌ایم. \hat{l}_r بردار یکه در راستای \mathbf{r} است. در محاسبهٔ بالا، جمله‌های $1/r^2$ را کنار گذاشته‌ایم زیرا به‌ازای مقادیر بزرگ r تحت الشعاع جمله‌های $1/r^2$ قرار می‌گیرند. باید شار را در مکان آشکارساز یعنی در فاصلهٔ r از مبدأ، که در آن پتانسیلی که باعث پراکندگی می‌شود جایگزیده است، به دست آورد و از این رو مقادیر بزرگ r را در نظر می‌گیریم. در نتیجه، این شار برابر است با

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{\hbar k}{m} + \frac{\hbar k}{m} \hat{l}_r |f(\theta)|^2 \frac{1}{r^2} \\ &\quad + \frac{\hbar k}{\sqrt{m}} \frac{1}{r} \left[f^*(\theta) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \right] \\ &\quad + \frac{\hbar k}{\sqrt{m}} \frac{\hat{l}_r}{r} \left[f^*(\theta) e^{-ikr(1-\cos\theta)} + f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} \right] \quad (9-23) \\ &\quad - \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\hat{l}_r}{r^2} \left[f(\theta) e^{ikr(1-\cos\theta)} - f^*(\theta) e^{-ikr(1-\cos\theta)} \right] \\ &\quad + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\hat{l}_\theta}{r^2} \left[\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} e^{ikr(1-\cos\theta)} - \frac{\partial f^*(\theta)}{\partial \theta} e^{-ikr(1-\cos\theta)} \right] \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\theta \neq 0$ ، زیرا هیچگاه آزمایش پراکندگی را مستقیماً در جهت جلو انجام نمی‌دهیم،^۴ و اینکه در یک اندازه‌گیری همیشه از شار روی یک زاویهٔ فضایی کوچک اما متناهی انتگرال می‌گیریم، رابطهٔ نسبتاً پیچیدهٔ بالا به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. بنابراین، در چهار جملهٔ آخر

۴. چگونه می‌توان پراکندگی را با ذرات نابراکنده بررسی کرد؟



شکل ۱-۲۳ تصویر نموداری آزمایش پراکندگی. زاویه پراکندگی زاویه در آزمایشگاه است.

این رابطه باید به جای $e^{ikr(1-\cos\theta)}$ انتگرال زیر را گذاشت

$$\int \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, g(\theta, \phi) e^{ikr(1-\cos\theta)} \quad (۱۰-۲۳)$$

که در آن $g(\theta, \phi)$ یک نوع تابع پذیرش جایگزیده هموار برای شمارشگر است. اکنون وقتی $r \rightarrow \infty$ یک انتگرال روی حاصلضرب یک تابع هموار و تابعی که بسیار سریع تغییر می‌کند داریم، و این انتگرال سریعتر از هر توان $1/r$ به صفر میل می‌کند. این چیزی است که در متون ریاضی لم ریمن-لبگ نامیده می‌شود، و در مسئله ۷-۲۳ نشان داده شده است. بدین ترتیب، تنها دو جمله اول باقی می‌مانند، و در نتیجه

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} + \frac{\hbar k}{m} \hat{l}_r \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \quad (۱۱-۲۳)$$

در غیاب پتانسیل تنها جمله اول باقی می‌ماند. این جمله شار فرودی را نشان می‌دهد. در رهیافت بسته موجی، باید $\hbar\mathbf{k}/m$ را در تابعی ضرب کنیم که ابعاد جانبی باریکه را تعیین می‌کند. بنابراین، اگر خواهیم شار شعاعی $\mathbf{j} \cdot \hat{l}_r$ را به دست آوریم، جمله مزبور مقدار $\hbar\mathbf{k} \cdot \hat{l}_r/m = \hbar k (\cos\theta)/m$ (شکل ۱-۲۳). چون شمارشگر خارج از این ناحیه قرار دارد، این جمله اول در ناحیه مجانبی هیچ سهمی در شار شعاعی ندارد، و از این رو تنها جمله دوم در ۱۱-۲۳ مؤثر است، و داریم

$$\mathbf{j} \cdot \hat{l}_r = \frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} \quad (۱۲-۲۳)$$

بنابراین، تعداد ذراتی که از سطحی می‌گذرند که در مبدأ (هدف) زاویه فضایی $d\Omega$ را می‌سازد برابر

www.arsanjan.blogfa.com

است با

$$\mathbf{j} \cdot \hat{r} dA = \frac{\hbar k}{m} \cdot \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} r^2 d\Omega \quad (۱۳-۲۳)$$

توجه کنید که r^2 حذف می‌شود، و از این رو حذف جمله‌های $1/r^2$ در ۹-۲۳ توجیه می‌شود، زیرا این جمله‌ها باعث می‌شوند جمله‌هایی از مرتبهٔ $1/kr$ در تعداد ذرات دخالت داشته باشند. سطح مقطع دیفرانسیلی عبارت است از این تعداد تقسیم بر شار فرودی $\hbar k/m$ ، یعنی

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (۱۴-۲۳)$$

اگر پتانسیل به‌اسپین وابسته باشد، یک وابستگی سمتی نیز ظاهر می‌شود، و در نتیجه به‌طور کلی داریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (۱۵-۲۳)$$

سطح مقطع کل از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\sigma_{\text{کل}}(k) = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (۱۶-۲۳)$$

اکنون اگر از $f(\theta)$ که برحسب $S_l(k)$ بیان شده است استفاده کنیم و $S_l(k)$ را برحسب تغییر فاز بیان کنیم، یعنی $S_l(k) = e^{i\delta_l(k)}$ (به $۱۰-۸۶$ تا $۱۰-۸۹$ مراجعه کنید) به‌طوری که

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\cos \theta) \quad (۱۷-۲۳)$$

آن‌گاه

$$\sigma_{\text{کل}} = \int d\Omega \left[\frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\cos \theta) \right] \left[\frac{1}{k} \sum_{l'} (2l'+1) e^{-i\delta_{l'}(k)} \sin \delta_{l'}(k) P_{l'}(\cos \theta) \right]$$

و با استفاده از

$$\int d\Omega P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (۱۸-۲۳)$$

$$\sigma_{کل} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) \quad (19-23)$$

جالب توجه است که

$$\begin{aligned} \text{Im} f(\circ) &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im}[e^{2i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k)] P_l(1) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{کل} \end{aligned} \quad (20-23)$$

این رابطه را قضیهٔ اپتیکی می نامند، و برای فرایندهای ناکشسان، مانند فرایندهای پراکندگی که در فیزیک هسته‌ای و ذره‌ای روی می دهند، نیز صادق است. این رابطه بسیار مفید است و به زبان موجی بیان کنندهٔ این واقعیت است که سطح مقطع کل نمایشگر حذف شار از باریکهٔ فرودی است. این حذف تنها می تواند پیامد تداخل ویرانگر باشد، و این تداخل تنها می تواند بین موج فرودی و موجی روی دهد که به طور کشسان در جهت جلو پراکنده شده است. به همین دلیل است که $f(\circ)$ به صورت خطی ظاهر می شود.

این نوع استدلال سست توضیح نمی دهد که چرا قسمت انگاری باید دخیل باشد، اما می توان نشان داد که این مطلب عموماً درست است.^۵

پراکندگی کشسان و ناکشسان

شرط $|S_l(k)| = 1$ پیامد پابستگی شار است. عملاً در بسیاری از آزمایشهای پراکندگی جذب باریکهٔ فرودی صورت می گیرد؛ هدف ممکن است صرفاً برانگیخته شود، یا تغییر حالت دهد، یا ممکن است ذرهٔ دیگری ظاهر شود. در این شرایط، بحث بالا تغییر نمی کند بجز اینکه باید از رابطهٔ زیر استفاده کنیم

$$S_l(k) = \eta_l(k) e^{i\delta_l(k)} \quad (21-23)$$

که در آن

$$0 \leq \eta_l(k) \leq 1 \quad (22-23)$$

۵. مراجعه کنید به

زیرا با جذب سروکار داریم. دانشگاه ارسنجان www.arsanjan.blogfa.com عبارت است از

$$f_l(k) = \frac{S_l(k) - 1}{2ik} = \frac{\eta_l(k)e^{r\delta_l(k)} - 1}{2ik} = \frac{\eta_l \sin 2\delta_l}{2k} + i \frac{1 - \eta_l \cos 2\delta_l}{2k} \quad (23-23)$$

و سطح مقطع کل کشسان به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \sigma_{e\lambda} &= 4\pi \sum_l (2l+1) |f_l(k)|^2 \\ &= 4\pi \sum_l (2l+1) \frac{1 + \eta_l^2 - 2\eta_l \cos 2\delta_l}{4k^2} \end{aligned} \quad (24-23)$$

برای فرایندهای ناکشسان نیز سطح مقطع کل داریم. چون جزئیات فرایندهای ناکشسان را مشخص نمی‌کنیم، تنها می‌توان درباره سطح مقطع کل ناکشسان که اتلاف شار را توصیف می‌کند صحبت کرد. اگر یک جمله خاص را در ۲۳-۳ در نظر بگیریم، شار شعاعی درونسو که با

$$\frac{i}{2k} \frac{e^{-ikr}}{r} P_l(\cos \theta)$$

حمل می‌شود عبارت است از

$$\left(\frac{\hbar k}{m} \right) \left[\frac{4\pi}{(2k)^2} \right]$$

(یادآوری می‌کنیم که $Y_{l0} = P_l(\cos \theta) / \sqrt{4\pi}$). شار شعاعی برونسو

$$(\hbar k/m) |S_l(k)|^2 4\pi / 4k^2$$

است، و در نتیجه اتلاف کل شار به‌ازای هر مقدار l برابر است با

$$(\hbar k/m) (\pi/k^2) [1 - \eta_l^2(k)]$$

بنابراین، با تقسیم بر شار فرودی به‌دست می‌آوریم

$$\sigma_{\text{ناکشسان}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) [1 - \eta_l^2(k)] \quad (25-23)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{کل}} &= \sigma_{\text{کشسان}} + \sigma_{\text{ناکشسان}} \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 + \eta_l^2 - 2\eta_l \cos 2\delta_l + 1 - \eta_l^2) \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - \eta_l \cos 2\delta_l)\end{aligned}\quad (26-23)$$

همچنین از ۲۳-۲۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\text{Im}f(\circ) &= \sum_l (2l+1)\text{Im}f_l(k) \\ &= \sum_l (2l+1) \frac{1 - \eta_l \cos 2\delta_l}{2k} = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{کل}}\end{aligned}\quad (27-23)$$

که نشان می‌دهد قضیهٔ اپتیکی واقعاً صادق است.

اگر $\eta_l(k) = 1$ جذب صورت نمی‌گیرد، و سطح مقطع ناکشسان صفر می‌شود. وقتی $\eta_l(k) = 0$ جذب کامل داریم. با این همه، باز هم پراکندگی کشسان برای پاره موج روی می‌دهد. این پدیده در پراکندگی از قرص سیاه مشاهده می‌شود. قرص سیاه به این صورت توصیف می‌شود که (الف) دارای لبهٔ معین است و (ب) کاملاً جاذب است. چون پراکندگی در طول موجهای کوتاه را بررسی خواهیم کرد، یعنی وقتی مقادیر k بزرگ هستند، شرط (الف) ایجاب می‌کند که تنها پاره‌موجهای $l \lesssim L$ را در نظر بگیریم. L در رابطهٔ زیر صدق می‌کند

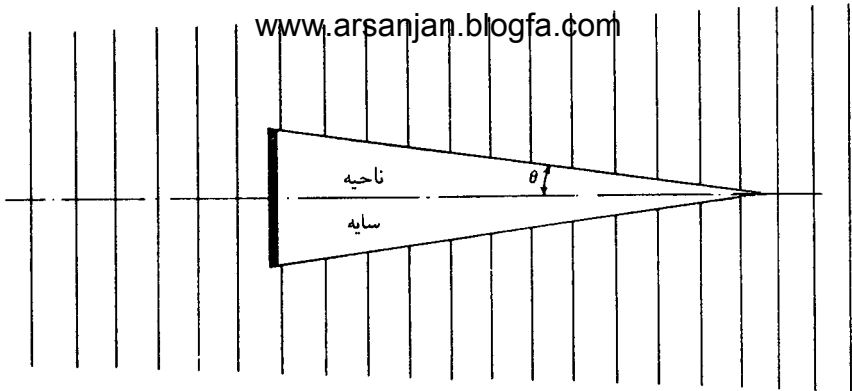
$$L = ka \quad (28-23)$$

که در آن a شعاع قرص است. شرط (ب) نشان می‌دهد که برای مقادیر مربوط $l \leq L$ داریم $\eta_l(k) = 0$ بنابراین،

$$\sigma_{\text{ناکشسان}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^L (2l+1) = \frac{\pi}{k^2} L^2 = \pi a^2 \quad (29-23)$$

و

$$\sigma_{\text{کشسان}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^L (2l+1) = \pi a^2 \quad (30-23)$$



شکل ۲۳-۲ پراکندگی قرص سیاه و اثر سایه.

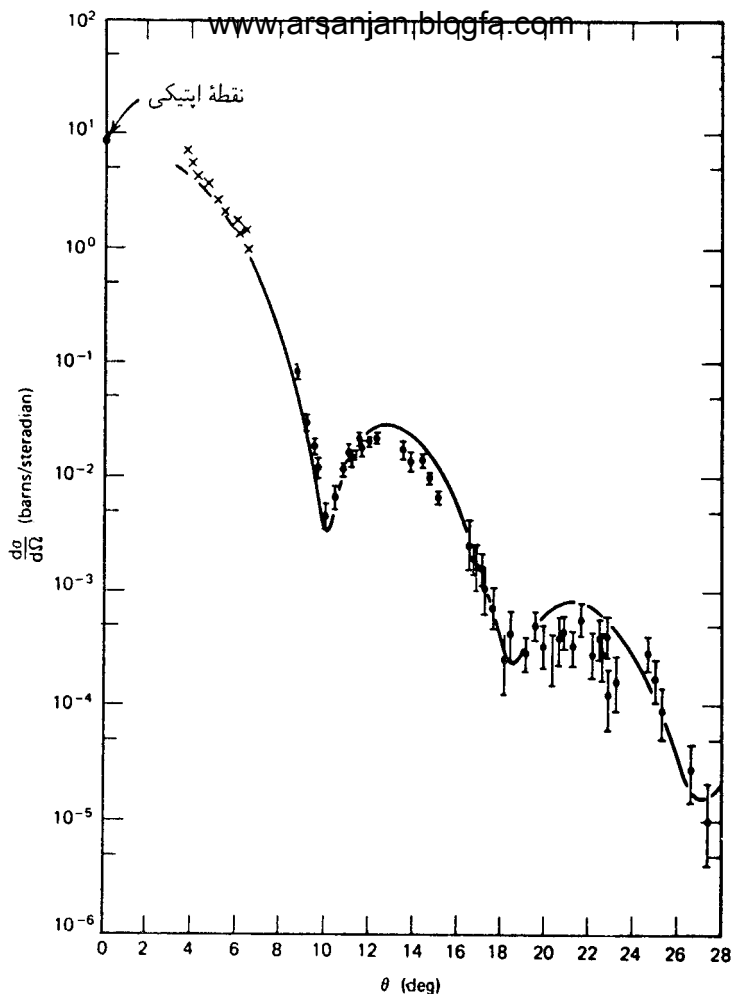
بدین ترتیب، سطح مقطع کل برابر است با

$$\sigma_{\text{کل}} = \sigma_{\text{ناکسان}} + \sigma_{\text{کشسان}} = 2\pi a^2 \quad (۲۳-۳۱)$$

این نتیجه عجیب به نظر می‌رسد؛ به دلایل صرفاً کلاسیک شاید انتظار داشته باشیم که سطح مقطع کل نتواند بزرگتر از مساحت قرص باشد؛ همچنین ممکن است انتظار داشته باشیم وقتی جذب کامل داریم پراکندگی کشسان روی ندهد. اما این نتیجه‌گیری اشتباه است؛ قرص جاذب شاری متناسب با πa^2 را از باریکه فرودی حذف می‌کند (شکل ۲۳-۲) و این باعث ایجاد سایه در پشت قرص می‌شود. اما در نقاط دور از قرص سایه پر می‌شود — در نقاط به اندازه کافی دور نمی‌توان قرص را “دید” — و این محو شدن سایه تنها با پراش قسمتی از موج فرودی در لبه قرص می‌تواند روی دهد. مقداری از موج فرودی که باید پراشیده شود به همان اندازه است که برای ایجاد سایه از باریکه حذف شده است. بنابراین، شاری که به‌طور کشسان پراکنده می‌شود نیز باید متناسب با πa^2 باشد. پراکندگی کشسانی که با جذب همراه است به دلیل بالا پراکندگی سایه نامیده می‌شود. این پراکندگی قله تیزی در جهت جلو دارد. زاویه محدودکننده آن را می‌توان از اصل عدم قطعیت برآورد کرد: عدم قطعیت در جهت جانبی به اندازه a باعث انتقال تکانه جانبی مهارناپذیری به اندازه $p_{\perp} \sim \hbar/a$ می‌شود. اما این مقدار برابر است با $p\theta$ ، و در نتیجه

$$\theta \sim \frac{\hbar}{ap} \sim \frac{\lambda}{ak} \quad (۲۳-۳۲)$$

این نتیجه با نتیجه ابتیکی $\theta \sim \lambda/a$ توافق دارد. این ویژگیها هم در پراکندگی هسته‌ای و هم در پراکندگی ذره در انرژیهای زیاد مشاهده می‌شوند، زیرا ناحیه مرکزی هسته‌ها و پروتونها شدیداً



شکل ۲۳-۳ توزیع زاویه‌ای پراکندگی پروتونه‌های 1000 MeV (1 GeV) از هسته‌های ^{16}O . در این توزیع زاویه‌ای فرورفتگی‌هایی دیده می‌شوند که مشخصه پراش هستند. انحراف از نقش پراش فرانهورفر (در ایتیک) به علت این است که هسته‌ها لبه تیز ندارند و جاذب کامل هم نیستند. این منحنی حاصل یک محاسبه نظری است که این اثرات را به حساب آورده است.^۶

جاذب هستند، و لبه‌های آنها کم و بیش تیز هستند (شکل ۲۳-۳).

۶. اقتباس مجاز از

پراکندگی در انرژیهای کم www.arsanjan.blogfa.com

با استفاده از بسط تغییر فاز ۲۳-۱۷ می توان سطح مقطع دیفرانسیلی را برحسب تغییر فازها بیان کرد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l(k)} \sin \delta_l(k) P_l(\cos \theta) \right|^2 \quad (23-33)$$

بر اساس تطابق با نظریه کلاسیک، انتظار داریم که تکانه زاویه‌ای دخیل در پراکندگی دارای کران pa باشد که در آن p تکانه مرکز جرم و a برد نیروها است. بنابراین، انتظار داریم که

$$l \lesssim \frac{pa}{\hbar} = ka \quad (23-34)$$

با محدود کردن مجموع در ۲۳-۳۳، می توان با برازش سطح مقطع دیفرانسیلی اندازه‌گیری شده در چند زاویه به صورتی مانند

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{n=0}^N A_n (\cos \theta)^n \quad (23-35)$$

تغییر فازها را برای تعداد محدودی از مقادیر l تعیین کرد. ابهاماتی وجود دارند، از جمله اینکه اگر علامت تمام تغییر فازها را عوض کنیم سطح مقطع تغییر نمی‌کند. اما اینها را می توان با استفاده از نظریه، پیوستگی از انرژیهای کم، و شگردهای دیگر رفع کرد. امید می رود که از تغییر فازها، که داده‌های تجربی مربوط به آنها از داده‌های مربوط به سطح مقطعه‌ها به نظریه نزدیکترند، بتوان اطلاعاتی درباره برهم‌کنش به دست آورد.

تغییر فازهای، $\delta_l(k)$ و پتانسیل $V(r)$ از طریق معادله شرودینگر به هم مربوط می‌شوند؛ معادله شعاعی جوابی دارد که با تقریب یک ضریب دامنه دارای رفتار مجانبی زیر است

$$R_l(r) \sim \frac{1}{r} \sin \left[kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) \right] \quad (23-36)$$

بنابراین، با داشتن $V(r)$ ، روش سرراست تعیین $\delta_l(k)$ انتگرال‌گیری عددی معادله شعاعی تا مقادیر r که دورتر از برد پتانسیل هستند و بررسی رفتار مجانبی است. در واقع، این کاری است که عملاً انجام می‌شود، اما از این راه تصویر روشنی درباره خواص تغییر فازها به دست نمی‌آید. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره تغییر فازها، چاه پتانسیل مربعی را در نظر می‌گیریم. در فصل ۱۰ دیدیم که

$$\tan \delta_l(k) = -\frac{C}{B} \quad (23-37)$$

که در آن نسبت طرف راست از جور کردن تابع موج شعاعی داخلی و خارجی (رابطه ۱۰-۸۵) به دست می‌آید:

$$\kappa \frac{j_l'(\kappa a)}{j_l(\kappa a)} = k \frac{j_l'(ka) + (C/B)n_l'(ka)}{j_l(ka) + (C/B)n_l(ka)} \quad (38-23)$$

در این معادله

$$\kappa^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (39-23)$$

و علامت ' به معنای مشتق‌گیری نسبت به شناسه است. برای پتانسیل جاذبه داریم $V_0 > 0$. بنابراین

$$\tan \delta_l(k) = \frac{k j_l'(ka) j_l(\kappa a) - \kappa j_l(ka) j_l'(\kappa a)}{\kappa n_l'(ka) j_l(\kappa a) - \kappa n_l(ka) j_l'(\kappa a)} \quad (40-23)$$

این رابطه چندان گویا نیست، اما می‌توان آن را در بعضی موارد حدی ساده کرد. (الف) موردی را در نظر بگیرید که

$$ka \ll l \quad (41-23)$$

لزومی ندارد که $ka \ll l$. با استفاده از فرمولهای ۱۰-۶۶ و ۱۰-۶۷ به دست می‌آوریم

$$\tan \delta_l(k) \simeq \frac{2l + 1}{[1 \times 3 \times 5 \dots (2l + 1)]^2} (ka)^{2l+1} \frac{l j_l(\kappa a) - \kappa a j_l'(\kappa a)}{(l + 1) j_l(\kappa a) + \kappa a j_l'(\kappa a)} \quad (42-23)$$

که به ازای مقادیر بزرگ l سریعتر از e^{-l} افت می‌کند حتی اگر $ka \gg l$. رفتار

$$\tan \delta_l(k) \sim k^{2l+1} \quad (43-23)$$

به ازای $ka \rightarrow 0$ منحصر به چاه پتانسیل مربعی نیست بلکه برای تمام پتانسیلهای به اندازه کافی هموار صادق است، و این یک پیامد سد مرکزگریزی است که نمی‌گذارد امواجی که انرژی آنها خیلی کمتر از ارتفاع سد است تحت تأثیر پتانسیل قرار گیرند.

(ب) به ازای مقادیر مشخصی از انرژی خروجی که در این مقاله ذکر می‌شود، و در نتیجه در این انرژیها تغییر فاز از $\pi/2$ ، یا به طور کلی از $(n + 1/2)\pi$ ، می‌گذرد. وقتی تغییر فاز $\pi/2$ است، سطح مقطع پاره‌موج

$$\sigma_l(k) = \frac{4\pi(2l+1)}{k^2} \sin^2 \delta_l(k) \quad (44-23)$$

بیشترین مقدار ممکن را دارد. وقتی $\tan \delta_l(k)$ به سرعت بینهایت شود و از $-\infty$ به افزایش ادامه دهد پراکندگی تشدید می‌داریم. برای توجیه این نامگذاری، و توضیح اینکه چه موقع پراکندگی تشدید روی می‌دهد، چاه پتانسیل را بسیار عمیق و همچنین l را بزرگ می‌گیریم، به طوری که

$$\kappa a \gg l \gg ka \quad (45-23)$$

بنابراین، می‌توان از ۴۲-۲۳ برای $\tan \delta_l(k)$ استفاده کرد، و این وقتی بینهایت می‌شود که

$$(l+1) j_l(\kappa a) + \kappa a j_l'(\kappa a) = 0 \quad (46-23)$$

چون $l \gg \kappa a$ ، شرط بالا تقریباً معادل است با

$$\frac{(l+1)}{\kappa a} \cos\left(\kappa a - \frac{1}{4}\pi\right) - \sin\left(\kappa a - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$$

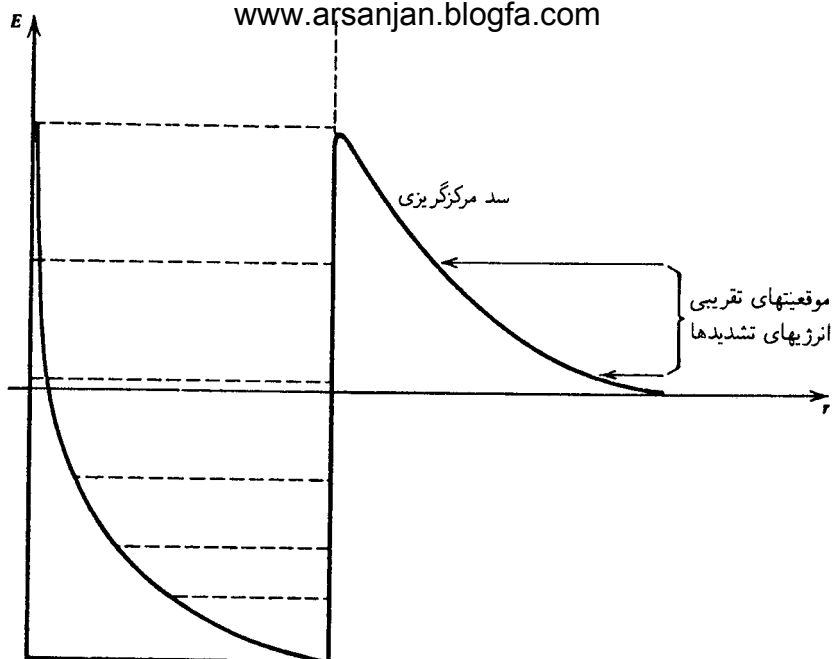
یعنی

$$\tan\left(\kappa a - \frac{1}{4}\pi\right) \simeq \frac{l+1}{\kappa a} \quad (47-23)$$

چون طرف راست بسیار کوچک است، شرط تشدید عبارت است از

$$\kappa a - \frac{1}{4}\pi \cong n\pi + \frac{l+1}{\kappa a} \quad (48-23)$$

اما این همان شرط $10-76$ برای وجود ترازهای گسسته در جعبه سه بعدی است، و در نتیجه پراکندگی تشدید وقتی روی می‌دهد که انرژی فرودی درست به اندازه‌ای باشد که با یک تراز انرژی تطبیق کند. چون $E > 0$ ، این ترازها واقعاً حالت‌های مقید نیستند، بلکه چنانکه شکل ۴-۲۳ نشان می‌دهد ترازهایی هستند که اگر سد بینهایت ضخیم می‌بود مقید می‌شدند. ضخامت سد بینهایت



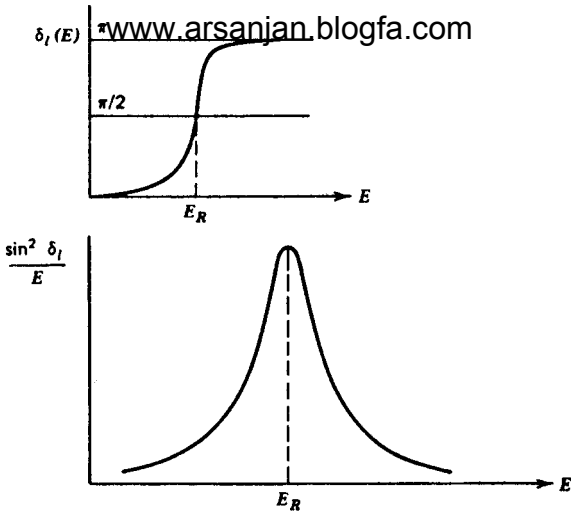
شکل ۲۳-۴ نمودار نمایشگر چاه پتانسیل مربعی با سد مرکزگری. خط چینها ترازهای انرژی را در یک چاه مربعی نامتناهی به عرض a نشان می‌دهند، و موقعیتهای تقریبی انرژیهای پراکندگی تشدید در سمت راست نشان داده شده‌اند. موقعیت پایین بسیار مشخصتر از موقعیت بالا است.

نیست، اما ذره‌ای که دقیقاً با انرژی مناسب پراکنده می‌شود باز هم "می‌داند" که یک تراز مجاز وجود دارد.

در مبحث ویژه ۴، پراکندگی فوتون در انرژی متناظر با حالتی را بررسی می‌کنیم که باید در غیاب جفت‌شدگی به میدان تابش پایا باشد. در آنجا همین وضعیت، و همچنین یک رفتار تشدید، را خواهیم دید.

فرمول برایت-ویگنر

چنانکه ۲۳-۴۲ نشان می‌دهد، تغییر فاز به‌ازای مقادیر کوچک ka بسیار کوچک است. با وجود این، وقتی ka تغییر می‌کند و از تشدید می‌گذرد، δ به‌سرعت زیاد می‌شود و به‌اندازه π افزایش می‌یابد؛ در نتیجه، سطح مقطع پاره‌موج ۲۳-۴۴ یک قله بسیار تیز در انرژی تشدید پیدا می‌کند (شکل ۲۳-۵). این رفتار بسیار شبیه به سطح مقطع پراکندگی الکترونها از He^+ در انرژی مربوط به حالت برانگیخته $2s$ است (شکل ۱۸-۴). در نزدیکی انرژی تشدید، تغییر فاز به‌سرعت از



شکل ۵-۲۳ سطح مقطع پاره‌موج مربوط به تغییر فازي که در قسمت بالا رسم شده است.

$\pi/2$ می‌گذرد. این رفتار را می‌توان با رابطهٔ زیر نشان داد

$$\tan \delta_l \approx \frac{\gamma(ka)^{\nu_l+1}}{E - E_{\text{تندید}}} \quad (۴۹-۲۳)$$

این رابطه به سطح مقطع پاره‌موج زیر می‌رسد

$$\sigma_l = \frac{4\pi(\nu_l + 1)}{k^2} \frac{\tan^2 \delta_l}{1 + \tan^2 \delta_l} = \frac{4\pi(\nu_l + 1)}{k^2} \frac{[\gamma(ka)^{\nu_l+1}]^2}{(E - E_{\text{تندید}})^2 + [\gamma(ka)^{\nu_l+1}]^2} \quad (۵۰-۲۳)$$

که فرمول برایت-ویگنر برای سطح مقطعهای تشدیدي است. باز هم این رفتار منحصر به چاه پتانسیل مربعی نیست بلکه مشخصهٔ تمام پتانسیلهایی است که برای آنها حالت‌های شبه‌پایدار می‌توانند حالت‌های مقیدی را در بیش از $E = 0$ به‌وجود آورند. صرفاً برای کامل بودن بحث متذکر می‌شویم که

$$\begin{aligned} f_l(k) &= \frac{e^{i\delta_l(k)} - 1}{i k} = \frac{\lambda + i \tan \delta_l - \lambda}{i k} \\ &= \frac{\tan \delta_l}{k(\lambda - i \tan \delta_l)} = \frac{\gamma(ka)^{\nu_l+1}/k}{E - E_{\text{تندید}} - i\gamma(ka)^{\nu_l+1}} \end{aligned} \quad (۵۱-۲۳)$$

اگر پراکندگی غیرتشدیدی قابل ملاحظه باشد. در آنجا پراکندگی بصورت زیر خواهد بود

$$f_l(k) = f_l^{\text{تشدیدی}}(k) + f_l^{\text{غیرتشدیدی}}(k) \quad (52-23)$$

پراکندگی موج S برای چاه مربعی

در انرژیهای کم، پراکندگی عمدتاً در حالت‌های S است، و در نتیجه می‌توان تنها $l = 0$ را در نظر گرفت. ساده‌تر این است که به‌جای استفاده از ۲۳-۴۰ تغییر فاز را مستقیماً محاسبه کنیم. جواب داخل چاه که در $r = 0$ منظم است عبارت است از

$$u(r) = rR(r) = C \sin \kappa r \quad (53-23)$$

و این را باید با جواب خارج چاه یعنی

$$u(r) = \sin(kr + \delta) \quad (54-23)$$

جور کنیم. از پیوستگی $(1/u)(du/dr)$ در $r = a$ داریم

$$\kappa \cot \kappa a = k \cot(ka + \delta)$$

یعنی

$$\tan \delta = \frac{(k/\kappa)\tan \kappa a - \tan ka}{1 + (k/\kappa)\tan \kappa a \tan ka} \quad (55-23)$$

اگر تعریف کنیم

$$\tan qa = \frac{k}{\kappa} \tan \kappa a$$

آنگاه

$$\tan \delta = \frac{\tan qa - \tan ka}{1 + \tan qa \tan ka} = \tan (qa - ka)$$

یعنی

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{k}{\kappa} \tan \kappa a \right) - ka \quad (56-23)$$

با توجه به ۳۳-۳۹ می‌توان نوشت www.arsanjan.blogfa.com

$$(\kappa a)^2 = (ka)^2 + \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad (57-23)$$

که در آن برای پتانسیل جاذبه داریم $V_0 > 0$. بنابراین، در انرژیهای بسیار کم، با استفاده از $\tan x \simeq x$ به‌ازای $x \ll 1$ ، به‌دست می‌آوریم

$$\tan \delta \approx \delta \approx ka \left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} - 1 \right) \quad (58-23)$$

وقتی κa از $\pi/2$ می‌گذرد (فرض کنید چاه پتانسیل را به‌تدریج عمیق می‌کنیم)، که درست این شرط است که چاه برای به‌وجود آمدن یک حالت مقید به‌اندازه‌ی کافی عمیق باشد (معادله ۵-۶۹)، آنگاه $\tan \kappa a \rightarrow \infty$ و ۲۳-۵۵ نشان می‌دهد که

$$\tan \delta = \frac{1}{\tan \kappa a} \rightarrow \infty \quad (59-23)$$

یعنی δ از $\pi/2$ می‌گذرد. به یک معنا، حالت مقید در انرژی صفر مانند تشدید است. وقتی چاه کمی عمیق‌تر می‌شود، باز هم داریم $\tan \delta \sim O(ka)$ و پیوستگی ایجاب می‌کند در شاخه‌ای باشیم که

$$\begin{aligned} \delta &\approx ka \left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} - 1 \right) \quad (\text{بدون حالت مقید}) \\ \delta &\approx \pi + ka \left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} - 1 \right) \quad (\text{با حالت مقید}) \end{aligned} \quad (60-23)$$

اگر پتانسیل باز هم عمیق‌تر شود، دومین حالت مقید به‌وجود می‌آید، κa از $3\pi/2$ می‌گذرد، و داریم $\delta \approx \pi + ka[(\tan \kappa a / \kappa a) - 1]$ ، و غیره. یک نتیجه کلی، به‌نام قضیه لوینسون، وجود دارد که بنابه آن

$$\delta(0) - \delta(\infty) = N_B \pi \quad (61-23)$$

که در آن N_B تعداد حالت‌های مقید است، و ۲۳-۶۰ مثالی از آن است.

در انرژیهای بسیار کم فقط $l = 0$ در سطح مقطع سهمی است، و این سهم عبارت است از

$$\sigma \cong \frac{4\pi}{k^2} (ka)^2 \left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} - 1 \right)^2 = 4\pi a^2 \left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} - 1 \right)^2 \quad (62-23)$$

که مقداری ثابت است. البته یک تصحیح از مرتبه $(ka)^2$ روی این نتیجه خواهیم داشت. اگر پراکندگی نوترون-پروتون را در نظر بگیریم، می‌دانیم که پتانسیل باید به‌گونه‌ای باشد که انرژی بستگی درست دوترون را به‌دست دهد. اگر بنویسیم

$$E = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m}$$

و

$$\kappa = \sqrt{-\alpha^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2}}$$

عملاً برای مسئله حالت مقید $(k^2 = -\alpha^2)$ از جورکردن تابع موج خارج از پتانسیل $u(r) = A e^{-\alpha r}$ به جواب داخل آن $B \sin \kappa r$ در مرز به‌دست می‌آوریم

$$\kappa \cot \kappa a = -\alpha \quad (63-23)$$

به‌ازای $k \ll \kappa$ داریم

$$\left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} \right)_{\text{پراکندگی}} \cong \left(\frac{\tan \kappa a}{\kappa a} \right)_{\text{دوترون}} = -\frac{1}{\alpha a} \quad (64-23)$$

بنابراین

$$\sigma \cong 4\pi a^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha a} \right)^2 \cong \frac{4\pi}{\alpha^2} (1 + 2\alpha a) \quad (65-23)$$

بدین ترتیب، در تقریب انرژی کم ۶۴-۲۳ می‌توان از مسئله تعیین پتانسیل و سپس محاسبه سطح مقطع اجتناب کرد. این تقریب تنها وقتی به‌کار می‌آید که انرژی بستگی کوچک باشد. کمیت $1/\alpha$ فاصله‌ای است که تابع موج دوترون در آن امتداد دارد، و این فاصله بسیار بیشتر از برد پتانسیل a برای دستگاه مقید سست است. در انرژیهای کم، سطح مقطع پراکندگی را $1/\alpha$ تعیین می‌کند نه برد پتانسیل.

پراکندگی وابسته به اسپین www.arsanjan.blogfa.com

در دهه ۱۹۳۰ شکل پتانسیل نوترون-پروتون توجه بسیاری را به خود جلب کرده بود، زیرا امید می‌رفت که این پتانسیل اطلاعاتی اساسی دربارهٔ ویژگیهای کلی نیروهای هسته‌ای به دست دهد. آزمایشهای اولیه در انرژیهای کم با پتانسیلهای مختلفی جور درمی‌آمدند. پس از مدتی معلوم شد که تقریباً هر پتانسیلی با شکل معقول کارساز است به شرط اینکه عمق و برد مناسب انتخاب شوند. در سال ۱۹۴۷ شوونگر نشان داد (و بعداً بته به روش ساده‌تری محاسبه کرد) که در انرژیهای کم همیشه با تقریب خوب می‌توان نوشت

$$k \cot \delta = -\frac{1}{A} + \frac{1}{2} r_0 k^2 \quad (۶۶-۲۳)$$

که در آن A طول پراکندگی نامیده می‌شود، و r_0 برد مؤثر است. سطح مقطع در آستانه طول پراکندگی را تعیین می‌کند:

$$\sigma \cong 4\pi A^2 \quad (۶۷-۲۳)$$

و برد مؤثر را وابستگی انرژی تعیین می‌کند. رابطهٔ میان این پارامترها و پارامترهای توصیف‌کنندهٔ پتانسیل با شکل پتانسیل تغییر می‌کند، اما برازش دو پارامتری به داده‌ها همیشه امکانپذیر است. این فرمول برد مؤثر نشان می‌دهد که برای کاوش شکل پتانسیل باید به انرژیهای زیاده‌تر برویم. انرژی بستگی دوترون 2.23 MeV است. بنابراین، با توجه به اینکه m در بحث ما جرم کاهیده یعنی $M_p/2$ است، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} &= \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mE}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{M_p c^2 E}} = \frac{\hbar}{M_p c} \sqrt{\frac{M_p c^2}{E}} \\ &\cong \frac{10^{-27}}{1.6 \times 10^{-24} \times 3 \times 10^{10}} \sqrt{\frac{940}{2.23}} = 4.3 \times 10^{-12} \text{ cm} \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\frac{4\pi}{\alpha^2} \cong 2.5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2 = 2.5 \text{ b}$$

یک محاسبهٔ دقیقتر به این پیش‌بینی می‌رسد که سطح مقطع در آستانه چهار بارن است. اندازه‌گیری با نوترونهای گرمایی نتیجهٔ ۲۱ بارن را می‌دهد!

دلیل این اختلاف به حساب نیارودن اسپین نوترون و پروتون است. اگر پتانسیل مستقل از اسپین بود آنگاه تمام حالت‌های اسپینی به صورت یکسان پراکنده می‌شدند، یعنی اهمیتی نداشت

که اسپین ذرات "بالا" باشد یا "پایین" اگر پتانسیل وابسته به اسپین باشد، یک شکل ممکن این پتانسیل عبارت است از

$$V(r) = V_1(r) + \sigma_p \cdot \sigma_n V_2(r) \quad (۶۸-۲۳)$$

در این مورد، اسپین دیگر یک عدد کوانتومی خوب نیست، و باید حالتها را با توجه به اسپین کل و تکانه زاویه‌ای کل دسته‌بندی کرد، یعنی با $l = 0$ چهار حالت به یک سه‌تایی 2S_1 و یک تکتابی 1S_0 تقسیم می‌شوند. لزومی ندارد که این دو حالت به صورت یکسان پراکنده شوند، و از این رو در واقع دو تغییر فاز داریم: δ_l برای سه‌تایی و δ_s برای تکتابی. گذار سه‌تایی-تکتابی روی نمی‌دهد، زیرا تکانه زاویه‌ای کل J باید در حالت‌های اولیه و نهایی یکسان باشد. سطح مقطع کل در هر مورد با تعداد حالت‌های نهایی موزون می‌شود (سطح مقطع شامل یک جمع روی حالت‌های نهایی است و به مقدار مؤلفه z تکانه زاویه‌ای بستگی ندارد)، و در نتیجه

$$\sigma = \frac{3}{4}\sigma_l + \frac{1}{4}\sigma_s \quad (۶۹-۲۳)$$

برای نیروهای مستقل از اسپین داریم $\sigma = \sigma_l = \sigma_s$. دوترون یک حالت 2S_1 است، و از این رو چهار بارن در واقع برای σ_l پیش‌بینی شده است. از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$$\sigma_s = 4\sigma - 3\sigma_l = 72b \quad (۷۰-۲۳)$$

چون در آستانه هستیم، به دست می‌آوریم

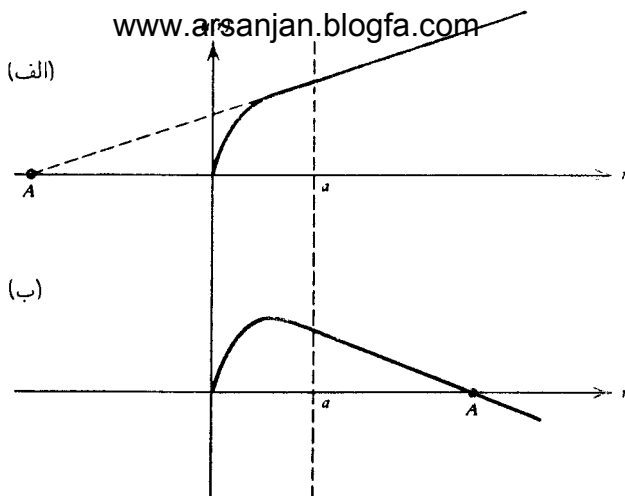
$$|A_s| = \sqrt{\frac{72 \times 10^{-22}}{4\pi}} \cong 2.4 \times 10^{-12} \text{cm} \quad (۷۱-۲۳)$$

نتیجه قبلی ایجاب می‌کند که

$$|A_l| = \sqrt{\frac{4 \times 10^{-22}}{4\pi}} \cong 4.7 \times 10^{-12} \text{cm} \quad (۷۲-۲۳)$$

اکنون باید علامت A_l و A_s را تعیین کنیم. در آستانه داریم $-1/A \approx k/\delta \approx k \cot \delta$. بنابراین، $\delta_l = -A_l k$ و $\delta_s = -A_s k$ بدین ترتیب، توابع موج مجانبی به صورت زیر هستند

$$\sin(kr + \delta_{l,s}) \cong \sin k(r - A_{l,s}) \cong k(r - A_{l,s}) \quad (۷۳-۲۳)$$



شکل ۲۳-۶ نمودار $u(r)$ برای جواب موج s در نزدیکی آستانه. خارج از برد شعاع $r = a$ تابع موج به صورت $(r - A)$ است. [این صورت با ۲۳-۷۳، که بسط $\sin(kr + \delta)$ است، تعارضی ندارد. می‌توانستیم $u(r)$ را به صورت $(C/k) \sin(kr + \delta)$ هم بگیریم، زیرا بهنجارش اختیاری است. در واقع، شیب خط را تابع موج داخلی و مکان A تعیین می‌کنند.] علامت A بستگی به این دارد که تابع موج داخلی به طرف محور r برگردد، (مورد ب)، یا برنگردد، (مورد الف). چون اگر یک حالت مقید ضعیف داشته باشیم تابع موج باید برگردد (تا بتواند با یک نمایی که به کندی کاهش می‌یابد جور شود) و چون انتظار نداریم که تابع موج در داخل پتانسیل به تغییرات B حول صفر حساسیت زیادی داشته باشد، نتیجه می‌گیریم که برای پتانسیلی که یک حالت مقید با مقدار کوچک B دارد باید $A > 0$.

دو مورد ممکن در شکل ۲۳-۶ نشان داده شده‌اند. می‌دانیم که تابع موج برای حالت سه‌تایی درست قبل از لبهٔ چاه به طرف محور طول برمی‌گردد (زیرا یک حالت مقید داریم) و در نتیجه برای این حالت باید $A_1 > 0$.

اگر A_1 نیز مثبت بود، یک حالت مقید تک‌تایی با بستگی بسیار ضعیفتر به دست می‌آوردیم، زیرا تابع موج داخلی به یک تابع مجانبی بسیار بهتر متصل می‌شود. در واقع، انرژی بستگی برای این وضعیت باید 70 keV باشد. اما چنین حالت مقیدی مشاهده نشده است، که نشان می‌دهد $A_1 < 0$.

این انتخاب علامت عملاً با پراکندگی نوترون از مولکول H_2 تأیید شده است. چنانکه می‌دانیم، مولکول H_2 می‌تواند به صورت اورتو- H_2 ، با اسپینهایی که در حالت سه‌تایی هستند، و پارا- H_2 ، با دو اسپین پروتون در حالت تک‌تایی، وجود داشته باشد. برای نوترونهای بسیار کم‌انرژی، به طوری که طول موج آنها بسیار بزرگتر از فاصلهٔ پروتون-پروتون در مولکول باشد، دامنهٔ پراکندگی برای پراکندگی H_2 -نوترون درست برابر است با مجموع دامنه‌های هر پراکندگی. می‌توان نشان داد که دامنهٔ پراکندگی

از پارامتر H_2 با دامنه پراکندگی از اورتو- H_2 متفاوت است و در هر یک از آنها ترکیبهای خطی ۱- و ۱- دخالت دارند. این واقعیت که $\sigma_{para} \cong 391$ و $\sigma_{ortho} \cong 1251$ را می‌توان به این طریق توضیح داد. محاسبه به علت وجود چندین اثر که باید آنها را به حساب آورد پیچیده است، از جمله اینکه جرم مؤثر پروتون در یک مولکول با جرم پروتون آزاد تفاوت دارد، و اینکه مولکولها واقعاً ساکن نیستند بلکه با توزیعی مربوط به دما (از مرتبه $2^\circ K$) حرکت می‌کنند. اختلاف زیاد بین دو سطح مقطع با این تصحیحات تغییر چندانی نمی‌کند، و از این رو تنها توضیح آن می‌تواند منفی بودن ۱- باشد.

تقریب بورن

در انرژیهای زیادتر، پاره‌موجهای بسیاری در پراکندگی مؤثرند و از این رو بهتر است از تجزیه تکانه زاویه‌ای صرف‌نظر کنیم. روشی که هم برای پتانسیل ضعیف و هم برای انرژی زیاد به یک تقریب بسیار خوب می‌رسد تقریب بورن است که در آن فرایند پراکندگی را همچون یک گذار، درست مانند گذارهایی که در فصل ۲۱ بیان کردیم، در نظر می‌گیریم، با این تفاوت که در اینجا گذارهای

پیوستار \rightarrow پیوستار

را در نظر می‌گیریم.

اگر در دستگاه مرکز جرم کار کنیم، عملاً یک مسئله تک‌ذره‌ای داریم، و این ذره از یک حالت اولیه که با ویژه‌تابع زیر توصیف می‌شود

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (74-23)$$

به حالت نهایی که با

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar} \quad (75-23)$$

توصیف می‌شود گذاری انجام می‌دهد؛ \mathbf{p}_i و \mathbf{p}_f به ترتیب تکانه‌های اولیه و نهایی هستند. آهنگ گذار، بنابه قاعده طلایی ۲۱-۵۹، عبارت است از

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{V d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi\hbar)^3} |M_{fi}|^2 \delta \left(\frac{p_f^2}{2m} - \frac{p_i^2}{2m} \right) \quad (76-23)$$

تابع دلتا بیانگر پایستگی انرژی www.arsanjan.blogfa.com ذرات ورودی تفاوت داشته باشد، یا اگر هدف برانگیخته شود، تابع دلتا شکل متفاوتی پیدا می‌کند، اما همیشه به صورت $E[(p_f^2/2m) - \Delta]$ است که در آن E انرژی جنبشی موجود برای ذره نهایی است. عنصر ماتریس M_{fi} از رابطه زیر به دست می‌آید

$$M_{fi} = \langle \psi_f | V | \psi_i \rangle = \int d^3r \frac{e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}} V(\mathbf{r}) \frac{e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}} \quad (۷۷-۲۳)$$

$$= \frac{1}{V} \int d^3r e^{-i\Delta \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r})$$

که در آن $\Delta = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. این عنصر ماتریس را به صورت زیر می‌نویسیم

$$M_{fi} = \frac{1}{V} \tilde{V}(\Delta) \quad (۷۸-۲۳)$$

با جاگذاری در ۷۶-۲۳ به دست می‌آوریم

$$R_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \int d\Omega \frac{V p_f^i dp_f}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{V^2} |\tilde{V}(\Delta)|^2 \delta\left(\frac{p_f^2}{2m} - E\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{V} \int d\Omega p_f m \frac{p_f dp_f}{m} \delta\left(\frac{p_f^2}{2m} - E\right) |\tilde{V}(\Delta)|^2 \quad (۷۹-۲۳)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 \hbar^2} \frac{1}{V} \int d\Omega p_f m |\tilde{V}(\Delta)|^2$$

که در آن از $p_f dp_f/m = d(p_f^2/2m)$ استفاده کرده‌ایم و روی تابع دلتا انتگرال گرفته‌ایم. بنابراین، باید p_f را برابر با $(2mE)^{1/2}$ بگیریم، و فراموش نکنیم که m در اینجا جرم کاهیده ذره نهایی است.

این رابطه وابستگی ناخواسته‌ای به حجم جعبه کوانتس دارد، اما این واقعاً دور از انتظار نیست. توابع موج بالا به یک ذره در جعبه‌ای به حجم V بهنجار شده‌اند، و در نتیجه با افزایش V تعداد گذارها مسلماً کاهش می‌یابد. مشکل از اینجا ناشی می‌شود که مسئله‌ای را مطرح می‌کنیم که مطابقتی با آزمایش ما ندارد. آنچه انجام می‌دهیم عبارت است از فرستادن شاری از ذرات فرودی بر یکدیگر (البته این در چارچوب مرکز جرم است؛ در چارچوب آزمایشگاه یکی از ذرات ساکن است). اگر بخواهیم شاری یک ذره در سانتیمتر مربع در ثانیه داشته باشیم، باید شار بالا را در V ضرب و بر حجم استوانه‌ای با قاعده 1cm^2 و بر سرعت نسبی ذرات در چارچوب مرکز جرم در

حالت اولیه تقسیم کنیم. تعداد گذارها به آزادی شمار واحد درست برابر با سطح مقطع است. بنابراین، داریم

$$d\sigma = \frac{1}{4\pi^2 h^2} \frac{1}{|v_{نسبی}|} d\Omega p_f m_i |\tilde{V}(\Delta)|^2 \quad (۸۰-۲۳)$$

در چارچوب مرکز جرم، چون دو ذره فرودی با تکانه‌های مساوی و با علامت مخالف p_i به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند سرعت نسبی برابر است با

$$|v_{نسبی}| = \frac{p_i}{m_1} + \frac{p_i}{m_2} = p_i \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_i}{m_{کاهیده}} \quad (۸۱-۲۳)$$

که در آن m_1 و m_2 جرم ذرات هستند. بدین ترتیب، اگر جرمهای کاهیده و تکانه‌های اولیه و نهایی یکسان نباشند، داریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{p_f}{p_i} m_{کاهیده}^{(f)} m_{کاهیده}^{(i)} \left| \frac{1}{h^2} \tilde{V}(\Delta) \right|^2 \quad (۸۲-۲۳)$$

اگر ذرات اولیه و نهایی یکی باشند، به دست می‌آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m_{کاهیده}^2}{4\pi^2} \left| \frac{1}{h^2} \tilde{V}(\Delta) \right|^2 \quad (۸۳-۲۳)$$

اگر جرم یکی از ذرات بسیار بیشتر از جرم ذره دیگر باشد آنگاه $m \rightarrow m_{کاهیده}$ ، که در آن m جرم ذره سبکتر است. از مقایسه رابطه بالا با ۲۳-۱۵ می‌بینیم که

$$f(\theta, \phi) = -\frac{m_{کاهیده}}{2\pi h^2} \tilde{V}(\Delta) \quad (۸۴-۲۳)$$

در واقع، برای تعیین علامت باید مقایسه مفصلتری با بسط پاره‌موجی انجام دهیم. در اینجا به این کار نمی‌پردازیم.

به عنوان مثالی از کاربرد تقریب بورن، سطح مقطع پراکندگی ذره‌ای به جرم m و بار Z_1 از یک پتانسیل کولنی با بار Z_2 را محاسبه می‌کنیم. چشمه میدان کولنی را بینهایت سنگین می‌گیریم، و از این‌رو جرم در ۲۳-۸۳ جرم ذره فرودی است. برای عمومیت بحث (و چنانکه خواهیم دید، به دلایل فنی) میدان کولنی را استتار شده می‌گیریم، به طوری که

$$V(\mathbf{r}) = Z_1 Z_2 e^{\gamma} \frac{e^{-r/a}}{r} \quad (۸۵-۲۳)$$

که در آن a شعاع استتار است www.arsanjan.blogfa.com

$$\tilde{V}(\Delta) = Z_1 Z_2 e^\gamma \int d^3 \mathbf{r} e^{-i\Delta \cdot \mathbf{r}} \frac{e^{-r/a}}{r} \quad (۸۶-۲۳)$$

اگر راستای Δ را محور z بگیریم به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{r} e^{-i\Delta \cdot \mathbf{r}} \frac{e^{-r/a}}{r} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^\infty r^2 dr e^{-i\Delta r \cos \theta} \frac{e^{-r/a}}{r} \\ &= 2\pi \int_0^\infty r dr e^{-r/a} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) e^{-i\Delta r \cos \theta} \\ &= \frac{2\pi}{i\Delta} \int_0^\infty dr e^{-r/a} (e^{i\Delta r} - e^{-i\Delta r}) \quad (۸۷-۲۳) \\ &= \frac{2\pi}{i\Delta} \left(\frac{1}{(1/a) - i\Delta} - \frac{1}{(1/a) + i\Delta} \right) = \frac{4\pi}{(1/a^2) + \Delta^2} \end{aligned}$$

اما

$$\Delta^2 = \frac{1}{\hbar^2} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^2 = \frac{1}{\hbar^2} (2p^2 - 2\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{p}_i) = \frac{2p^2}{\hbar^2} (1 - \cos \theta) \quad (۸۸-۲۳)$$

و در نتیجه سطح مقطع عبارت است از

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{m^2}{4\pi^2} \frac{1}{\hbar^2} (Z_1 Z_2 e^\gamma)^2 \frac{16\pi^2}{[(2p^2/\hbar^2)(1 - \cos \theta) + (1/a^2)]^2} \\ &= \left(\frac{2m Z_1 Z_2 e^\gamma}{4p^2 \sin^2(\theta/2) + (\hbar^2/a^2)} \right)^2 \quad (۸۹-۲۳) \\ &= \left(\frac{Z_1 Z_2 e^\gamma}{4E \sin^2(\theta/2) + (\hbar^2/2ma^2)} \right)^2 \end{aligned}$$

که در آن E را به جای $p^2/2m$ گذاشته‌ایم و از $(1 - \cos \theta)/2 = \sin^2(\theta/2)$ استفاده کرده‌ایم. زاویه θ که در ۸۸-۲۳ وارد شده است زاویه پراکندگی در چارچوب مرکز جرم است. در غیاب استتار ($a \rightarrow \infty$) رابطه بالا به فرمول رادرفورد تبدیل می‌شود. در این مورد، \hbar وجود ندارد، و نسخه کلاسیک یکی است. اگر عامل استتار را در ۸۶-۲۳ در نظر نمی‌گرفتیم یک انتگرال معروف به دست می‌آمد. انتگرالهای مبهم را اغلب با استفاده از این نوع عاملهای همگرایی محاسبه می‌کنند.

تقریب بورن محدودیتهای خاص خود را دارد. به عنوان مثال، دیدیم که $\bar{V}(\Delta)$ حقیقی است، و در نتیجه $f(\theta)$ نیز در این تقریب حقیقی است. این نتیجه با توجه به قضیه اپتیکی ایجاب می کند که سطح مقطع صفر باشد. در واقع، تقریب بورن تنها وقتی خوب است که یا (الف) پتانسیل ضعیف باشد، که در نتیجه سطح مقطع برحسب یک پارامتر کوچک از مرتبه دوم است؛ این مورد باعث سازگاری تقریب بورن با قضیه اپتیکی می شود، یا (ب) انرژی پتانسیل چنان زیاد باشد که سطح مقطع به صفر میل کند. این وضعیت برای اکثر پتانسیلهای هموار صادق است، اما برای ذرات واقعی صدق نمی کند؛ در اینجا به نظر می رسد که سطح مقطع در انرژیهای بسیار زیاد ثابت می ماند، و نمی توان انتظار داشت که تقریب بورن چیزی بیشتر از یک راهنما برای رفتار دامنه پراکندگی باشد. به عنوان آخرین نکته، متذکر می شویم که اگر پتانسیل وابسته به اسپین باشد بدیهی است که حالت های ابتدایی و نهایی در ۲۳-۷۷ باید علاوه بر توابع موج فضایی متضمن توابع موج اسپینی نیز باشند. بنابراین، به عنوان مثال، اگر پتانسیل نوترون-پروتون به صورت زیر باشد

$$V(r) = V_1(r) + \sigma_P \cdot \sigma_N V_2(r)$$

آنگاه تقریب بورن به صورت زیر درمی آید

$$M_{fi} = \frac{1}{V} \int d^3r e^{-i\Delta \cdot r} \xi_f^+ V(r) \xi_i$$

که در آن ξ_i و ξ_f حالت های اسپینی ابتدایی و نهایی دستگاه نوترون-پروتون را نشان می دهند.

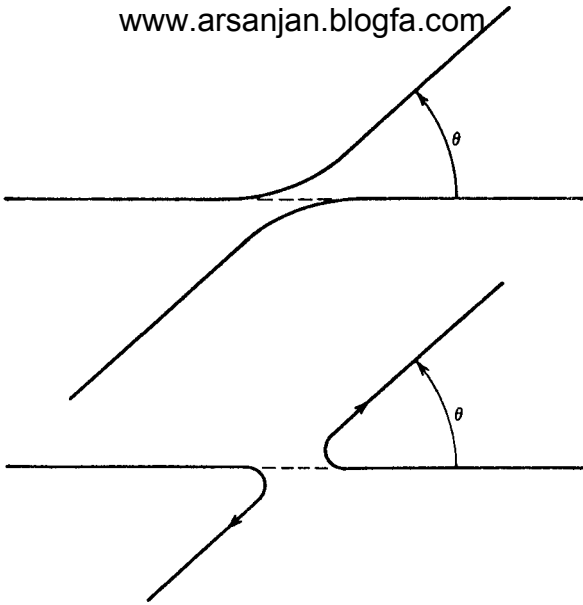
پراکندگی ذرات یکسان

وقتی دو ذره یکسان پراکنده می شوند، راهی برای تشخیص انحراف یک ذره در زاویه θ و انحراف آن در زاویه $\pi - \theta$ در چارچوب مرکز جرم وجود ندارد، زیرا پایستگی تکانه ایجاب می کند که اگر یکی از ذرات در زاویه θ پراکنده شد ذره دیگر در راستای $\pi - \theta$ حرکت کند (شکل ۲۳-۷). به لحاظ کلاسیک نیز یکسانی ذرات روی سطح مقطع پراکندگی تأثیر دارد، زیرا تعداد شمارشها در یک شمارشگر معین مجموع شمارشهای مربوط به دو ذره است. بنابراین

$$\sigma_{cl}(\theta) = \sigma(\theta) + \sigma(\pi - \theta) \quad (۲۳-۹۰)$$

در مکانیک کوانتومی راهی برای تشخیص دو حالت نهایی از یکدیگر وجود ندارد، و در نتیجه در دامنه $f(\theta)$ و $f(\pi - \theta)$ می توانند با هم تداخل کنند. بنابراین، سطح مقطع پراکندگی بری دو ذره

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۲۳-۷. راستاهای مجانبی در پراکندگی دو ذره یکسان در زاویه مرکز جرمی θ .

یکسان با اسپین صفر (بوزون)، مثلاً ذرات π ، برابر است با

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \quad (91-23)$$

یا

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + [f'(\theta)f(\pi - \theta) + f(\theta)f'(\pi - \theta)] \quad (92-23)$$

که تفاوت آن با نتیجه کلاسیک در جمله تداخلی است، و این به عنوان مثال سبب تقویت در $\pi/2$ می شود:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi/2} = 4 \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 \quad (93-23)$$

در حالی که نتیجه بدون تداخل برابر است با

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\pi/2} = 2 \left|f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|^2 \quad (94-23)$$

وقتی پراکندگی دو ذره با اسپین $1/2$ ، مثلاً پراکندگی پروتون-پروتون یا الکترون-الکترون، را بررسی می‌کنیم، دامنه باید نشاندهندهٔ پادتقارن اساسی تابع موج کل تحت تعویض دو ذره باشد. اگر دو ذره در یک حالت تکتابی اسپینی باشند، تابع موج فضایی باید متقارن باشد، و

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \quad (95-23)$$

اگر دو ذره در یک حالت سه‌تابی اسپینی باشند، تابع موج فضایی باید پادمقارن باشد، و

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 \quad (96-23)$$

در پراکندگی دو پروتون ناقطبیده، تمام حالت‌های اسپینی به یک اندازه محتمل‌اند، و از این رو احتمال یافتن این دو پروتون در یک حالت سه‌تابی سه برابر احتمال یافتن آنها در یک حالت تکتابی است، به طوری که

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{3}{4} \frac{d\sigma_t}{d\Omega} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma_s}{d\Omega} \\ &= \frac{3}{4} |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 \quad (97-23) \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \frac{1}{4} [f(\theta)f^*(\pi - \theta) + f^*(\theta)f(\pi - \theta)] \end{aligned}$$

برای پراکندگی پروتون-پروتون و همچنین پراکندگی $\alpha-\alpha$ ، دامنهٔ اصلی $f(\theta)$ مجموع یک جملهٔ هسته‌ای (اگر انرژیها بیش از اندازه کم نباشند) و یک جملهٔ کولنی است. ذرات یکسان چه بوزون باشند چه فرمیون، تحت تعویض $\theta \rightarrow \pi - \theta$ تقارن داریم.

پراکندگی از اتمهای شبکه

ملاحظات تقارن در پراکندگی ذرات از شبکهٔ بلور نیز به‌کار می‌آیند. اگر از اسپین صرف‌نظر کنیم، که در نتیجه وارونه شدن اسپین الکترون ("بالا" ← "پایین"، یا برعکس) اهمیت نخواهد داشت، دامنهٔ پراکندگی $f(\theta)$ در انرژیهای کم مستقل از زاویه می‌شود (پراکندگی موج S) و جواب معادلهٔ شرودینگر برای یک اتم در نقطهٔ شبکهٔ \mathbf{a}_i دارای صورت مجانبی زیر است

$$\psi(\mathbf{r}) \sim e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{a}_i)} + f \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}_i|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}_i|} \quad (98-23)$$

$$\begin{aligned}
 k|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i| &= k(\mathbf{r}^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i + a_i^2)^{1/2} \\
 &\cong kr \left(1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i}{r^2} \right)^{1/2} \quad (99-23) \\
 &\cong kr - k\hat{l}_r \cdot \mathbf{a}_i
 \end{aligned}$$

که در آن $k\hat{l}_r$ تکانه نهایی \mathbf{k}' زیرا برداری است با بزرگی k که هم جهت با \mathbf{r} (نقطه مشاهده) است. با تقسیم بر ضریب فاز $e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i}$ ، صورت مجانبی زیر را برای تابع موج به دست می آوریم

$$\psi' \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{a}_i} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i} \frac{e^{ikr}}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (100-23)$$

و در نتیجه دامنه پراکندگی عبارت است از

$$f(\theta) = f e^{-i\Delta \cdot \mathbf{a}_i}, \quad \Delta = \mathbf{k}' - \mathbf{k} \quad (101-23)$$

در وضعیتی که نمی توان گفت کدام اتم در بلور باعث پراکندگی شده است، دامنه کل با مجموع تمام دامنه های پراکندگی انفرادی برابر است. این مورد در واقع مربوط به پراکندگی کشسان کم انرژی است که در آن پس رزی مشاهده نمی شود و اسپین اندازه گیری نمی شود. بدین ترتیب، برای فرایند همدوس داریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| f \sum_{\text{اتفا}} e^{-i\Delta \cdot \mathbf{a}_i} \right|^2 \quad (102-23)$$

اگر یک آرایه مکعبی ساده از نقطه های شبکه داشته باشیم، به طوری که

$$\mathbf{a}_i = a(n_x \hat{l}_x + n_y \hat{l}_y + n_z \hat{l}_z) \quad -N \leq n_x, n_y, n_z \leq N \quad (103-23)$$

(فاصله ها در تمام راستاها مضارب درستی از a هستند)، آنگاه

$$\sum e^{-i\Delta \cdot \mathbf{a}_i} = \sum_{n_x=-N}^N \sum_{n_y=-N}^N \sum_{n_z=-N}^N e^{-ia\Delta_x n_x} e^{-ia\Delta_y n_y} e^{-ia\Delta_z n_z}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{i\alpha n} &= e^{-i\alpha N} (\lambda + e^{i\alpha} + e^{2i\alpha} + \dots + e^{i\alpha N}) \\ &= e^{i\alpha N} \frac{e^{i\alpha(2N+1)} - \lambda}{e^{i\alpha} - \lambda} = \frac{e^{i\alpha(N+1)} - e^{i\alpha N}}{e^{i\alpha} - \lambda} \quad (104-23) \\ &= \frac{e^{i\alpha(N+1/2)} - e^{-i\alpha(N+1/2)}}{e^{i\alpha/2} - e^{-i\alpha/2}} = \frac{\sin \alpha \left(N + \frac{1}{2}\right)}{\sin \alpha/2} \end{aligned}$$

به نتیجه زیر می‌رسیم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \frac{\sin^2 \alpha_x \left(N + \frac{1}{2}\right)}{\sin^2 \alpha_x/2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha_y \left(N + \frac{1}{2}\right)}{\sin^2 \alpha_y/2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha_z \left(N + \frac{1}{2}\right)}{\sin^2 \alpha_z/2} \quad (105-23)$$

که در آن

$$\alpha_x = a \Delta_x - 2\pi\nu_x \quad (\nu_x = \text{عدد درست}), \quad (106-23)$$

و غیره. تعمیمی که قبلاً گفتیم در اینجا نیز صدق می‌کند، زیرا تبدیل $\alpha \rightarrow \alpha - 2\pi\nu$ که در آن ν یک عدد درست است، $105-23$ را تغییر نمی‌دهد. رابطه $105-23$ چندان گویا نیست. اما اگر N بزرگ باشد، هر یک از عوامل آن وقتی α_x, \dots به صفر نزدیک هستند قله تیزی پیدا می‌کنند. در واقع، با استفاده از

$$\frac{\sin^2 Nu}{u^2/4} \rightarrow 4\pi N \delta(u) \quad (107-23)$$

که با یک تعویض متغیر ساده از $20-21$ نتیجه می‌شود، به دست می‌آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 (2\pi)^2 (2N)^2 \delta(a\Delta - 2\pi\nu) \quad (108-23)$$

تعداد کل آنها $(2N)^2$ است، و از این رو سطح مقطع به ازای هر اتم عبارت است از

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \frac{(2\pi)^2}{a^2} \delta\left(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \frac{2\pi\nu}{a}\right) \quad (109-23)$$

بنابراین، سطح مقطع دیفرانسیلی میلر که یک گویه پرتوایی که از رابطه زیر به دست می‌آیند

$$k' - k = \frac{2\pi}{a} \nu \quad (۲۳-۱۱۰)$$

که در آنها سطح مقطع دیفرانسیلی به شدت زیاد می‌شود. شرایط بالا را شرایط براگ می‌نامند، و اعداد درست ν_x, ν_y, ν_z و شاخصهای میلر برای صفحه‌های براگ هستند. روابطی را که هم‌اکنون به دست آوردیم می‌توان به بلورهای پیچیده‌تر تعمیم داد. این رابطه‌ها برای مطالعه ساختار بلور، با استفاده از نوترون‌ها یا پرتوهای x به عنوان ذرات فرودی، یا استفاده از بلور شناخته شده برای مطالعه پرتوهای x که در گذارهای اتمی به صورت فوتونهای پراثری گسیل می‌شوند، نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مسائل

۲۳-۱ نشان دهید که برای پتانسیل مرکزی $V(\mathbf{r}) = V(r)$ می‌توان عنصر ماتریس M_{fi} در ۲۳-۷۷ را به صورت زیر نوشت

$$M_{fi} = \frac{1}{V} \frac{2\pi\hbar}{\Delta} \int_0^\infty r dr V(r) \sin r \Delta$$

توجه کنید که این عنصر ماتریس تابع زوجی از Δ است، یعنی تابعی است از

$$\Delta^2 = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^2 / \hbar^2$$

۲۳-۲ پتانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$V(r) = V_0 e^{-r/a}$$

با استفاده از تقریب بورن، سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma/d\Omega$ را برحسب زاویه پراکندگی مرکز جرمی θ به دست آورید. نتیجه را با سطح مقطع دیفرانسیلی برای پتانسیل یوکاوا

$$V(r) = V_0 b \frac{e^{-r/b}}{r}$$

مقایسه کنید (به ۲۳-۸۵ تا ۲۳-۸۶ مراجعه کنید). برای مقایسه پارامترهای مربوط به دو مورد را به گونه‌ای تنظیم کنید که دو سطح مقطع دیفرانسیلی و شیبه‌ای آنها در جهت جلو در $\Delta = 0^\circ$ یکسان شوند. شاید بهتر باشد چند مقدار عددی معین برای V_0 , V_G , a , b انتخاب کنید و مقایسه را به صورت نموداری انجام دهید. با یک استدلال کیفی علت اختلاف زیاد بین پیش‌بینیهای مربوط به انتقالهای تکانه بزرگ را بیان کنید.

۲۳-۳ بتانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$V(r) = V_0 a \frac{e^{-r/a}}{r}$$

اگر پارامتر برد a برابر با $1.2 \times 10^{-12} \text{ cm} = 1.2 \text{ fm}$ باشد و بزرگی V_0 برابر با 100 MeV ، سطح مقطع کل پراکندگی پروتون-پروتون را با انرژی مرکز جرمی 100 MeV در تقریب بورن محاسبه کنید. پراکندگی کولنی را نادیده بگیرید، اما یکسان بودن پروتونها را در نظر داشته باشید.

[تذکر: با استفاده از رابطه $\Delta^2 = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)^2 = 2p^2(1 - \cos \theta) = \hbar^2 \Delta^2$ می‌توان نوشت $d\Omega = 2\pi d(\cos \theta) = \frac{\hbar^2 \pi}{\mu^2} d(\Delta^2)$]

۲۳-۴ فرض کنید دامنه پراکندگی برای پروتون-پروتون به صورت زیر است

$$f(\theta) = \xi_f^+ (A + B \sigma_P \cdot \sigma_N) \xi_i$$

که در آن ξ_i و ξ_f حالت‌های اسپینی اولیه و نهایی دستگاه نوترون-پروتون هستند. حالت‌های ممکن عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \xi_i &= \chi_1^{(P)} \chi_1^{(N)} & \xi_f &= \chi_1^{(P)} \chi_1^{(N)} \\ & \chi_1^{(P)} \chi_0^{(N)} & & \chi_1^{(P)} \chi_0^{(N)} \\ & \chi_0^{(P)} \chi_1^{(N)} & & \chi_0^{(P)} \chi_1^{(N)} \\ & \chi_0^{(P)} \chi_0^{(N)} & & \chi_0^{(P)} \chi_0^{(N)} \end{aligned}$$

تمام ۱۶ دامنه پراکندگی را با استفاده از رابطه زیر محاسبه کنید

$$\sigma_P \cdot \sigma_N = \sigma_z^{(P)} \sigma_z^{(N)} + 2(\sigma_+^{(P)} \sigma_-^{(N)} + \sigma_-^{(P)} \sigma_+^{(N)})$$

که در آن، در نمایشی که $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ و $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ داریم

$$\sigma_+ = \frac{\sigma_z + i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_- = \frac{\sigma_z - i\sigma_y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

نتایج و سطح مقطعها را در www.arsanjan.blogfa.com

۵-۲۳ اگر یکی از حالت‌های اسپینی (مثلاً پروتون اولیه، یا نوترون اولیه) را اندازه‌گیری نکنیم، برای تعیین سطح مقطع باید روی حالت‌های اسپینی اندازه‌گیری نشده جمع بزنیم. فرض کنید اسپینهای پروتون اولیه و نهایی را اندازه نگرفته‌ایم. با فرض اینکه حالت نوترون اولیه "بالا" است، رابطه سطح مقطعهای مربوط به نوترون نهایی "بالا" و نوترون نهایی "پایین" را بنویسید. قطبش P را که با رابطه زیر تعریف می‌شود به دست آورید

$$P = \frac{\sigma \uparrow - \sigma \downarrow}{\sigma \uparrow + \sigma \downarrow}$$

که در آن $\sigma \uparrow$ سطح مقطع مربوط به نوترون نهایی بالا و $\sigma \downarrow$ سطح مقطع مربوط به نوترون نهایی پایین است.

۶-۲۳ با استفاده از جدولی که در مسئله ۴-۲۳ به دست آورده‌اید، سطح مقطعهای پراکندگی سه‌تایی \leftarrow سه‌تایی و تک‌تایی \leftarrow تک‌تایی را محاسبه کنید. نشان دهید پراکندگی تک‌تایی \leftarrow سه‌تایی صفر است. چون (برحسب h)

$$\frac{1}{4}\sigma_P + \frac{1}{4}\sigma_N = S$$

به دست می‌آوریم

$$\sigma_P \cdot \sigma_N = 2S^2 - 3$$

وقتی روی حالت سه‌تایی عمل می‌کند $- 1$

وقتی روی حالت تک‌تایی عمل می‌کند $- 3$

با استفاده از رابطه بالا، نتایجی را که به دست آورده‌اید واریسی کنید. توجه کنید که دامنه مستقل از m_s است و از این رو m_s باید در حالت‌های اسپینی اولیه و نهایی یکی باشد. سه حالت در سه‌تایی وجود دارند که همگی به یک اندازه در سطح مقطع سهیم هستند، و تنها یک حالت در سطح مقطع تک‌تایی سهم دارد.
[تذکر: در محاسبه دامنه‌هایی مانند

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(X_1^{(P)} X_1^{(N)} - X_1^{(P)} X_1^{(N)}) (A + B\sigma_P \cdot \sigma_N) \frac{1}{\sqrt{4}}(X_1^{(P)} X_1^{(N)} - X_1^{(P)} X_1^{(N)})$$

دامنه‌های چهار جمله قبل از مجذور کردن جمع می‌شوند. آیا می‌توانید دلیل آن را توضیح دهید؟]

$$I(kr) = \int_0^\infty d\theta \sin \theta g(\cos \theta) e^{-ikr \cos \theta} = \int_{-1}^1 du g(u) e^{-ikru}$$

که در آن $g(\cos \theta)$ حول $\theta = \theta_0$ به شدت جایگزیده است، و بینهایت مشتق‌پذیر است. برای مثال، این تابع می‌تواند به صورت زیر باشد

$$g = e^{-\alpha^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)^2}$$

که در آن α بزرگ است. بنابراین، می‌توان فرض کرد $g(u)$ و تمام مشتق‌های آن در $u = \pm 1$ صفر هستند. نشان دهید که در این مورد وقتی $kr \rightarrow \infty$ تابع $I(kr)$ سریعتر از هر توان kr صفر می‌شود.

[راهنمایی: بنویسید $e^{-ikru} = (i/kr)(d/du)e^{-ikru}$ و انتگرال جزء به جزء بگیرید.]

مراجع

نظریهٔ پراکندگی در تمام کتابهای درسی که در آخرین کتاب معرفی شده‌اند بررسی شده است. علاوه بر آن، کتابهای پیشرفته‌ای نیز یافت می‌شوند که تنها به این موضوع اختصاص دارند. مناسبترین آنها برای دانشجو عبارت است از

N F Mott and H S W Massey, *The Theory of Atomic Collisions* (3rd edition), Oxford University Press (Clarendon), Oxford, 1965.

یک رهیافت صوری‌تر در کتاب زیر ارائه شده است

L S Rodberg and R M Thaler, *Introduction to the Quantum Theory of Scattering*, Academic Press, New York, 1967.

کتابهای پیشرفته‌تر عبارت‌اند از

M L Goldberger and K M Watson, *Collision Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1965.

R Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York, 1966.

جذب تابش در ماده

فرایند وارون واپاشی تابشی آنها، یعنی گیراندازی فوتونها همراه با برانگیخته شدن آنها، نیز می‌تواند روی دهد. اگر انرژی فوتون بیشتر از انرژی یونش باشد الکترون به پیوستار برانگیخته می‌شود. این پدیده را اثر فوتوالکتریک می‌نامند و سازوکار مهمی در جذب تابش در ماده است. بنا به قاعدهٔ طلایی ۲۱-۵۹، آهنگ گذار برای فرایند

$$\gamma + (\text{اتم})' \rightarrow (\text{اتم}) + e \quad (۱-۲۴)$$

عبارت است از

$$\begin{aligned} R &= \frac{\gamma \pi}{\hbar} \int \frac{V d^3 \mathbf{p}_e}{(\gamma \pi \hbar)^3} |M_{fi}|^2 \delta \left(\hbar \omega - E_B - \frac{p_e^2}{2m} \right) \\ &= \frac{\gamma \pi}{\hbar} \int \frac{d\Omega V}{(\gamma \pi \hbar)^3} \int m p_e d \left(\frac{p_e^2}{2m} \right) |M_{fi}|^2 \delta \left(\hbar \omega - E_B - \frac{p_e^2}{2m} \right) \quad (۲-۲۴) \\ &= \frac{\gamma \pi V}{\hbar} \int d\Omega \frac{m p_e}{(\gamma \pi \hbar)^3} |M_{fi}|^2 \end{aligned}$$

که در آن m جرم الکترون است، تابع دلتا پاستسکی انرژی را نشان می‌دهد، E_B انرژی بستگی الکترون در اتم است، و p_e در آخرین سطر مقداری است که شناسه تابع دلتا را صفر می‌کند. عنصر ماتریس عبارت است از

$$\frac{e}{mc} \left(\frac{\gamma \pi \hbar c^2}{\omega V} \right)^{1/2} \int d^3 \mathbf{r} \psi_f^*(\mathbf{r}) \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \psi_i(\mathbf{r}) \quad (3-24)$$

پتانسیل برداری، همچون در فصل ۲۱، به یک فوتون در حجم V بهنجار شده است، و $\psi_i(\mathbf{r})$ و $\psi_f(\mathbf{r})$ توابع موج الکترون در حالت‌های اولیه و نهایی هستند. برای یک اتم هیدروژنگونه، با فرض اینکه الکترون در حالت پایه است، داریم

$$\psi_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \quad (4-24)$$

تابع موج حالت نهایی را باید جواب معادله شرودینگر با پتانسیل کولنی برای $E > 0$ بگیریم. در بررسی اتم هیدروژن درباره این جواب بحث نکردیم. این جواب را می‌توان به صورت دقیق نوشت اما مانند انتگرال ۳-۲۴ کاملاً پیچیده است. اگر انرژی فوتون بسیار بیشتر از انرژی یونش باشد، برهم‌کنش مانده الکترون گسیل شده با یونی که از خود به جا می‌گذارد اهمیت کمتری می‌یابد، و می‌توانیم $\psi_f(\mathbf{r})$ را با یک موج تخت تقریب بگیریم. چون فرض می‌کنیم تنها یک اتم در حجم V داریم، تنها یک الکترون در این حجم خواهیم داشت، و در نتیجه بهنجارش به‌گونه‌ای است که

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r} / \hbar} \quad (5-24)$$

عامل V که در فضای فاز ظاهر می‌شود $[V d^3 \mathbf{p} / (2\pi \hbar)^3]$ به همین بهنجارش مربوط است، یعنی این دو عامل مستقل از یکدیگر نیستند. مجذور عنصر ماتریس تا اندازه‌ای ساده است زیرا حالت نهایی یک ویژه‌حالت تکانه است، و در نتیجه

$$\langle f | \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}_{op} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | i \rangle = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}_e \langle f | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | i \rangle \quad (6-24)$$

بنابراین، مجذور عنصر ماتریس عبارت است از

$$|M_{fi}|^2 \simeq \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \frac{\gamma \pi \hbar c^2}{\omega V} \cdot \frac{1}{V} \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^2 (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}_e)^2 \times \left| \int d^3 \mathbf{r} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}_e / \hbar) \cdot \mathbf{r}} e^{-Zr/a_0} \right|^2 \quad (7-24)$$

این انتگرال را بعداً محاسبه خواهیم کرد. www.arsanjaniblogfa.com آهنگ گذار به این دلیل دارای عامل $1/V$ است که در حجم V با تنها یک فوتون سروکار داریم. اکنون به بررسی سطح مقطع اثر فوتوالکتریک می‌پردازیم. برای اینکه شار یک فوتون بر سانتیمتر مربع داشته باشیم، چگالی فوتونها باید $1/c$ بر سانتیمترمکعب باشد (و در نتیجه استوانه‌ای با مساحت قاعده واحد و با طول c مربوط به بازه زمان ۱ ثانیه حاوی یک فوتون خواهد بود)، یعنی باید آهنگ گذار را در V/c ضرب کنیم. از ترکیب ۲-۲۴ و ۷-۲۴، سطح مقطع دیفرانسیلی زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{mp_e}{(2\pi\hbar)^3} \left(\frac{c}{mc}\right)^2 \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega} \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^2 (\epsilon \cdot \mathbf{p}_e)^2 \quad (۸-۲۴)$$

$$\times \frac{1}{c} \left| \int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p}_e/\hbar)\cdot\mathbf{r}} e^{-r/a_0} \right|^2$$

در این رابطه $d\Omega$ زاویه فضایی حول \mathbf{p}_e است. انتگرال روی تمام راستاهای الکترون سطح مقطع کل σ برای اثر فوتوالکتریک را به دست می‌دهد. اگر اتمهای هدف با چگالی N اتم در سانتیمترمکعب توزیع شده باشند آنگاه قطعه‌ای از ماده هدف با مساحت A و ضخامت dx حاوی $NA dx$ اتم خواهد بود. هر اتم دارای سطح مقطع σ برای واکنش تحت بررسی است، و در نتیجه مساحت مؤثر کل که باریکه با آن مواجه می‌شود $NA \sigma dx$ است. اگر n ذره در باریکه فرودی داشته باشیم، تعداد ذراتی که در ضخامت dx در هدف برهم‌کنش می‌کنند با رابطه زیر داده می‌شود

$$\frac{\text{ذرات برهم‌کنش‌کننده}}{\text{ذرات فرودی}} = \frac{\text{سطح مقطع}}{\text{مساحت کل}}$$

یا

$$\frac{dn}{n} = -\frac{NA \sigma dx}{A} = -N \sigma dx \quad (۹-۲۴)$$

علامت منفی نشان می‌دهد که ذرات از باریکه حذف می‌شوند. با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$n(x) = n_0 e^{-N\sigma x} \quad (۱۰-۲۴)$$

که در آن n_0 تعداد ذرات فرودی و $n(x)$ تعداد ذراتی است که پس از پیمودن ضخامت x در باریکه باقی مانده‌اند. کمیت $\lambda = 1/N\sigma$ بعد طول دارد و مسافت آزاد میانگین نامیده می‌شود. اگرچه گاهی مسافت آزاد میانگین را برای اثر فوتوالکتریک، تولید جفت و غیره به کار می‌بریم، اما آنچه اندازه‌گیری می‌شود سطح مقطع است.

www.arsanjaniblogfa.com
 برای به دست آوردن مرتبه بزرگی N از رابطه $N = N_0 \rho / A$ که در آن N_0 عدد آووگادرو (6.02×10^{23})، ρ چگالی بر حسب گرم بر سانتیمتر مکعب، و A وزن اتمی است. سطح مقطع برخورد های مولکولی را می توان از خواص گازها برآورد کرد، و معلوم می شود که مرتبه بزرگی آن 10^{-16}cm^2 است، که با اندازه های اتمی که از مرتبه 10^{-8}cm هستند سازگار است. به زودی خواهیم دید که این تخمین برای مقطع فوتوالکتریک معقول نیست. بنابه تعریف مسافت آزاد میانگین λ ، در ماده ای با چگالی ρ و وزن اتمی A ، اگر سطح مقطع را بر حسب بارن (10^{-24}cm^2) بیان کنیم، به دست می آوریم

$$\lambda = \frac{1}{N\sigma} = \frac{A}{\rho} \frac{1}{6.02 \times 10^{23} \sigma} \quad (11-24)$$

$$= \frac{A}{\rho} \frac{1.67}{\sigma (\text{بارن})}$$

برای محاسبه سطح مقطع ۸-۲۴ باید انتگرال زیر را به دست آوریم

$$\int d^3 \mathbf{r} e^{i(\mathbf{h}\mathbf{k} - \mathbf{p}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{r} / \hbar} e^{-Zr/a_0} \quad (12-24)$$

با توجه به ۸۷-۲۳، و تغییر جزئی نمادنگاری، داریم

$$\int d^3 \mathbf{r} e^{i\Delta \cdot \mathbf{r}} \frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{4\pi}{\mu^2 + \Delta^2} \quad (13-24)$$

با مشتق گیری نسبت به μ به دست می آوریم

$$\int d^3 \mathbf{r} e^{-i\Delta \cdot \mathbf{r}} e^{-\mu r} = \frac{8\pi\mu}{(\mu^2 + \Delta^2)^2} \quad (14-24)$$

اکنون می توان سطح مقطع را محاسبه کرد. با ترکیب مناسبی از عوامل، سرانجام به رابطه زیر می رسیم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 32 Z^5 a_0^2 \left(\frac{p_e c}{\hbar \omega} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{p}_e}{mc} \right)^2 \frac{1}{(Z^2 + a_0^2 \Delta^2)^2} \quad (15-24)$$

۱. به همین ترتیب، سطح مقطع در فیزیک هسته ای از مرتبه 10^{-24}cm^2 (یک بارن) است، و سطح مقطعهایی که در فیزیک ذرات مشاهده می شوند از مرتبه 10^{-17}cm^2 (میلی بارن) هستند که تا میکروبارن برای واکنش های نادر و حتی 10^{-24}cm^2 برای واکنش های بسیار نادر نوترینو در انرژی های کم نزول می کنند.

$$\Delta = \frac{(\hbar \mathbf{k} - \mathbf{p}_e)}{\hbar} = \frac{(\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_e)}{\hbar}$$

چون رابطه میان انرژی الکترون و انرژی فوتون به صورت زیر است

$$\hbar\omega = E_B + \frac{p_e^2}{2m} \quad (۱۶-۲۴)$$

می‌بینیم که برای انرژیهای بسیار بیشتر از انرژی بستگی می‌توان نوشت $\hbar\omega \cong p_e^2/2m$. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{p_e c}{\hbar\omega} \left(\frac{\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p}_e}{mc} \right) &\cong \frac{p_e}{mc} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{p}}_e)^2 \\ \Delta^2 &= \frac{\lambda}{\hbar^2} (\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_e)^2 = \frac{\lambda}{\hbar^2} \left[\left(\frac{\hbar\omega}{c} \right)^2 - 2 \frac{\hbar\omega}{c} p_e \hat{\mathbf{p}}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{p}}_e + p_e^2 \right] \\ &\quad (۱۷-۲۴) \end{aligned}$$

$$\cong \frac{\lambda}{\hbar^2} \left[p_e^2 - \left(\frac{p_e^2}{mc} \right) \hat{\mathbf{p}}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{p}}_e \right]$$

$$\cong \frac{p_e^2}{\hbar^2} \left(1 - \frac{v_e}{c} \hat{\mathbf{p}}_\gamma \cdot \hat{\mathbf{p}}_e \right)$$

که برای الکترونهای غیرنسبیتی، $p_e \ll mc$ ، برقرار است. ^۲ تکانه فوتون $\hbar \mathbf{k}$ را با \mathbf{p}_γ نشان داده‌ایم، و علامت ^۲ را مطابق معمول برای بردار یک‌به‌کار برده‌ایم. با جاگذاری در ۱۵-۲۴ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= 64 Z^2 a_0^2 \left(\frac{p_e}{mc} \right) \frac{(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{p}}_e)^2}{\left[Z^2 + \frac{p_e^2}{\alpha^2 m^2 c^2} \left(1 - \frac{v_e}{c} \hat{\mathbf{p}}_e \cdot \hat{\mathbf{p}}_\gamma \right) \right]^2} \\ &= \frac{64 Z^2 \alpha^4 a_0^2 \left(\frac{p_e}{mc} \right) (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \hat{\mathbf{p}}_e)^2}{\left[(\alpha Z)^2 + \frac{p_e^2}{m^2 c^2} \left(1 - \frac{v_e}{c} \hat{\mathbf{p}}_e \cdot \hat{\mathbf{p}}_\gamma \right) \right]^2} \quad (۱۸-۲۴) \end{aligned}$$

۲. برای الکترونهای نسبیتی باید از معادله دیراک برای توصیف فرایند استفاده کنیم. اثراتی غیر از اثر فوتوالکتریک وقتی مهم می‌شوند که $E_e \simeq 1 \text{ MeV}$.

www.arsanjan.blogfa.com
 اگر راستای تکانه فوتون را محور z و دو راستای قطبش فوتون $\epsilon^{(1)}$ و $\epsilon^{(2)}$ را به ترتیب در راستاهای x و y بگیریم، آنگاه با نوشتن

$$\hat{\mathbf{p}}_e = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (19-24)$$

داریم $(\mathbf{p}_e \cdot \epsilon^{(1)})^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi$ و $(\mathbf{p}_e \cdot \epsilon^{(2)})^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \phi$ ، و در نتیجه میانگین صورت کسر روی دو راستای قطبش — سطح مقطع اثر فوتوالکتریک را با فوتونهای ناقطبیده محاسبه می‌کنیم — عبارت است از

$$\overline{(\hat{\mathbf{p}}_e \cdot \epsilon)^2} = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \quad (20-24)$$

همچنین داریم

$$\hat{\mathbf{p}}_e \cdot \hat{\mathbf{p}}_\gamma = \cos \theta \quad (21-24)$$

و از این رو، با نوشتن $\phi_e^2/2m = E$ به دست می‌آوریم

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32\sqrt{2} Z^5 \alpha^4 a_0^2 (E/mc^2)^{1/2} \sin^2 \theta}{\left[(\alpha Z)^2 + \frac{2E}{mc^2} \left(1 - \frac{v_e}{c} \cos \theta \right) \right]^2} \quad (22-24)$$

برای عناصر سبک، شرطی که قبلاً اعمال کردیم، یعنی $\hbar\omega \gg E_B$ که معادل است با

$$E \gg \frac{1}{2} mc^2 (Z\alpha)^2 \quad (23-24)$$

در گستره وسیع معقولی از انرژیها صادق است. با جاگذاری ۲۳-۲۴ در ۲۲-۲۴، می‌بینیم که مخرج کسر ساده می‌شود و سطح مقطع به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\sqrt{2} Z^5 \alpha^4 a_0^2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^{-1/2} \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v_e}{c} \cos \theta \right)^2} \quad (24-24)$$

اکنون به بررسی جنبه‌های مختلف این فرمول می‌پردازیم:

۱. اولاً، این حدس مبنی بر $\text{www.arsanjan.blogfa.com}$ 10^{-8} cm باشد سطح مقطع باید از مرتبه 10^{-16} cm باشد غلط است! البته عامل a_0^2 از همین مرتبه بزرگی است، اما در عدد بی بعد $(1/137)^\alpha$ که به سختی می توان از آن صرف نظر کرد ضرب می شود. باید جستجو کنیم چه چیز باعث شده است که در برآوردهای خود تا این حد اشتباه کنیم. اگر آخرین عامل زاویه ای در ۲۴-۲۴ را، که بعداً درباره آن بحث می کنیم، نادیده بگیریم می بینیم که با استفاده از

$$E = \frac{1}{2} m v_e^2$$

می توان ضریب جلو کسر را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} a_0^2 Z^5 \alpha^\alpha \left(\frac{m c^2}{E} \right)^{3/2} &= 32 a_0^2 Z^5 \alpha^\alpha \left(\frac{c}{v_e} \right)^3 \\ &= 32 \left(\frac{a_0}{Z} \right)^2 \alpha \left(\frac{\alpha Z c}{v_e} \right)^3 \end{aligned} \quad (25-24)$$

که مفیدتر است. مهمتر از همه، یک عامل منفرد α در این صورت ظاهر شده است، که وقتی تنها یک فوتون گسیل یا جذب می شود باید همیشه ظاهر شود. جفت شدگی پتانسیل برداری به بار الکتریکی متناسب با بار e است، و مجذور e متناسب با α است. عامل $(a_0/Z)^2$ ، در مقایسه با a_0^2 ، معیار بهتری برای مساحت اتم است، زیرا اتم هیدروژن گونه با بار Z را بررسی می کنیم. آنچه باقی می ماند در واقع توان بزرگ V برای نسبت سرعت "مداری" الکترون در اتم به سرعت الکترون آزاد خروجی است.

نسبت $(\alpha Z c / v_e)$ [و نه صرفاً (c/v_e) که این هم بی بعد است] به این دلیل ظاهر می شود که همپوشی میان تابع موج الکترون آزاد و تابع موج الکترون مقید در عنصر ماتریس دخیل است، یعنی مجذور عنصر ماتریس به این احتمال مربوط می شود که از اندازه گیری تکانه الکترون مقید مقدار p_e به دست آید. وابستگی تابعی $f(\alpha Z c / v_e)$ ، در این مورد توان هشتم^۳ را نمی توان با استدلال کیفی و کلی حدس زد. برای مثال، اگر تابع موج الکترون گاوسی بود $[\psi_i(\mathbf{r}) \propto e^{-r^2/a^2}]$ ، افت f با افزایش سرعت بسیار سریعتر از توان هشتم بود. دلیل مشکل حدس زدن این است که توزیع تکانه الکترون در ناحیه ای با پهنای

$$\Delta p \sim \frac{h}{a_0/Z} \sim \frac{hZ}{h/mc\alpha} \sim Z\alpha mc \quad (26-24)$$

۳. یک عامل p_e در فضای فاز وجود دارد، و در نتیجه مجذور عنصر ماتریس به توان هشتم $(\alpha Z c / v_e)$ منجر می شود.

جایگزیده است و به‌ازای $p_e \gg Zmc$ به نقاط دور این توزیع می‌رسیم. این وضعیت، باز هم بنابه رابطهٔ عدم قطعیت، به توزیع شعاعی تابع موج در مقادیر کوچک l و به‌طور حساسی به‌حالت، مخصوصاً به‌تکانهٔ زاویه‌ای، وابسته است. این وابستگی از فروپاشی فوتونی در فیزیک هسته‌ای یک ابزار بسیار مفید ساخته است.

۲. توزیع زاویه‌ای در $d\sigma/d\Omega$ عبارت است از

$$F(\theta) = \frac{\sin^2 \theta}{[\lambda - (v_e/c) \cos \theta]^2} \quad (24-27)$$

ابتدا توجه کنید که سطح مقطع در جهت جلو صفر می‌شود. این پیامد عرضی بودن قطبش فوتونها است. عنصر ماتریس متناسب با $\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{e}$ است، و وقتی \mathbf{p}_e با تکانهٔ فوتون موازی باشد این عامل صفر می‌شود. مخرج کسر، به علت توان چهارم، تأثیر شدیدی بر توزیع زاویه‌ای دارد. وقتی v_e/c به یک نزدیک شود این تأثیر بسیار بارز می‌شود، اما حتی برای مقادیر میانهٔ v_e/c یک قلهٔ قابل توجه در نزدیکی جهت جلو، که در آن مخرج کمترین مقدار خود را دارد، وجود خواهد داشت. این متناظر با مقدار کمی انتقال تکانه بین فوتون و الکترون، $(\mathbf{p}_\gamma - \mathbf{p}_e)^2$ ، است.

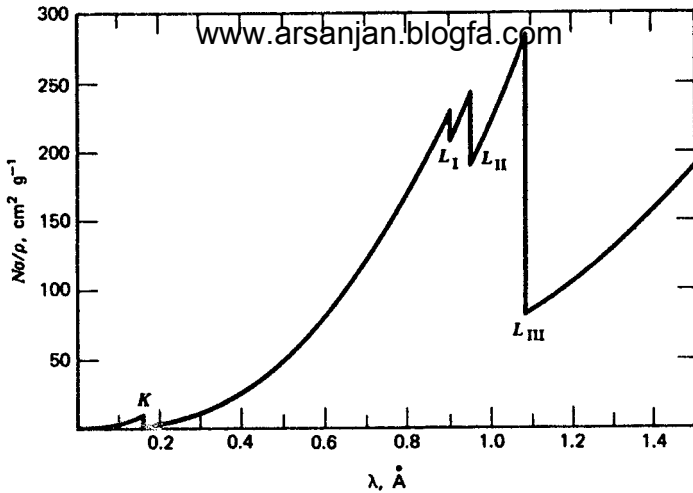
برای بحث در ناحیهٔ نسبیتی، باید محاسبات مفصلتری انجام داد. فرمولی که هم اکنون به‌دست آوردیم در قلمرو اعتبار خود کارایی خوبی دارد.^۴ در انرژیهای بسیار کم، تابع موج دقیقتری برای الکترون خروجی باید به‌کار ببریم. این تابع موج باید برهم‌کنش کولنی بین هسته و الکترون را نشان دهد. بدیهی است که پایینتر از آستانهٔ یونس مربوط به سست‌ترین الکترون در یک پوستهٔ خارجی اثر فوتوالکتریک روی نمی‌دهد. با افزایش انرژی در بالای آستانه الکترونها از پوسته‌های درونی‌تر فوتو تولید می‌شوند. با ترسیم سطح مقطع کل یا بهتر از آن ضریب جذب جرمی $N\sigma/\rho$ ^۵ برحسب طول موج فوتون، نموداری مانند شکل ۲۴-۱ به‌دست می‌آید. "دندانهٔ K " به خروج الکترونها $n=1$ مربوط می‌شود؛ دندانه‌های L متناظر با الکترونها مختلف در حالت‌های $n=2$ هستند. این دندانه‌ها در انرژیهای بستگی الکترونها مختلف روی می‌دهند. بنابه قانون تجربی موزلی، دندانه‌ها در انرژیهای زیر واقع‌اند

$$E = 13.6 \frac{(Z - \sigma_n)^2}{n^2} \text{eV} \quad (24-28)$$

که در آن "ثابت استتار" σ_n تقریباً برابر است با $2n + 1$. این فرمول درست همان چیزی است که برای اوربیتال‌های ns انتظار داریم، و استتار از تمام الکترونها دیگر s ناشی می‌شود.

۴. در محاسبهٔ جذب تابش نتیجه‌ای را که به دست آوردیم باید در ۲ ضرب کنیم، زیرا دو الکترون در حالت پایه، البته به‌استثنای هیدروژن، وجود دارند.

۵. این کمیت برابر است با $N_0 \sigma/A$ که در آن N_0 عدد آووگادرو و A وزن اتمی است.



شکل ۲۴-۱ ضریب جذب جرمی $N\sigma/\rho$ برای پلاتین برحسب طول موج فوتون.

در انرژیهای نسبی، سطح مقطع با سرعت کمتری، به صورت $(E/m)^{-1}$ و نه $(E/m)^{-1/2}$ ، افت می‌کند، اما در انرژیهای حدود 5MeV اثر فوتوالکتریک تا جایی که به جذب تابش مربوط می‌شود اهمیت خود را از دست می‌دهد. در ناحیه انرژی 5 تا 5MeV ، اثر کامپتون اثر جذبی غالب می‌شود.

در اینجا الکترونهاى آزاد فوتونها را پراکنده می‌کنند. در بسامدهای کم، این اثر یک توضیح کلاسیک دارد: تابش الکترومغناطیسی در برخورد با الکترون به آن شتاب می‌دهد، و تابشی که بار شتابدار گسیل می‌کند تابش پراکنده است. سطح مقطع کلاسیک تامسون به صورت زیر است

$$\sigma_T = \frac{\lambda\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (24-29)$$

در مکانیک کوانتومی، دامنه پراکندگی (عنصر ماتریس) باید متناسب با e^2 باشد، زیرا دو فوتون دخالت دارند. وقتی در بسط $21-23$ هر دو جمله را نگه داریم، چون اختلال در هامیلتونی عبارت است از

$$\frac{e}{mc} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) \quad (24-30)$$

می‌بینیم که سهم e^2 در دامنه پراکندگی می‌تواند دو منشأ داشته باشد:
 ۱. منشأ اول یک سهم مرتبه اول از جمله $e^2 \mathbf{A}^2(\mathbf{r}, t) / 2mc^2$ است.

۲. منشأ دوم یک جمله اختلال مرتبه دوم از جفت‌شدگی $\frac{e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{mc}$ است. چون صورتبندی اختلال مرتبه دوم را شرح ندادیم، به بیان نتایج بسنده می‌کنیم.
 (الف) در آستانه، با پیمانه $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$ که از آن استفاده کرده‌ایم، تمام دامنه ناشی از جمله شامل $e^{\pm} \mathbf{A}^{\pm}(\mathbf{r}, t) / 2mc^2$ است.
 (ب) عنصر ماتریس مرتبه دوم به صورت زیر است

$$-\sum_n \frac{\langle f | e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} / mc | n \rangle \langle n | e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} / mc | i \rangle}{E_n - E_i} \quad (31-24)$$

که در آن "جمع" روی حالت‌های میانی "n" وقتی n شامل حالت‌های پیوستار باشد به معنای انتگرال روی تمام تکانه‌ها نیز هست. کافی نیست که حالت‌های میانی تک الکترون مربوط به دنباله

$$\gamma_i + e_i \rightarrow e' \rightarrow \gamma_f + e_f$$

و حالت‌های میانی با یک الکترون و دو فوتون مربوط به فرایند

$$e_i + \gamma_i \rightarrow \gamma_i + \gamma_f + e' \rightarrow \gamma_f + e_f$$

را در نظر بگیریم. معلوم شده است که امکان ایجاد یک زوج الکترون-پوزیترون "مجازی" توسط فوتون فرودی، که نابودی پوزیترون توسط الکترون فرودی را به دنبال دارد، با گسیل فوتون نهایی همچون در

$$e_i + \gamma_i \rightarrow e_i + e_f + e^{+'} \rightarrow \gamma_f + e_f$$

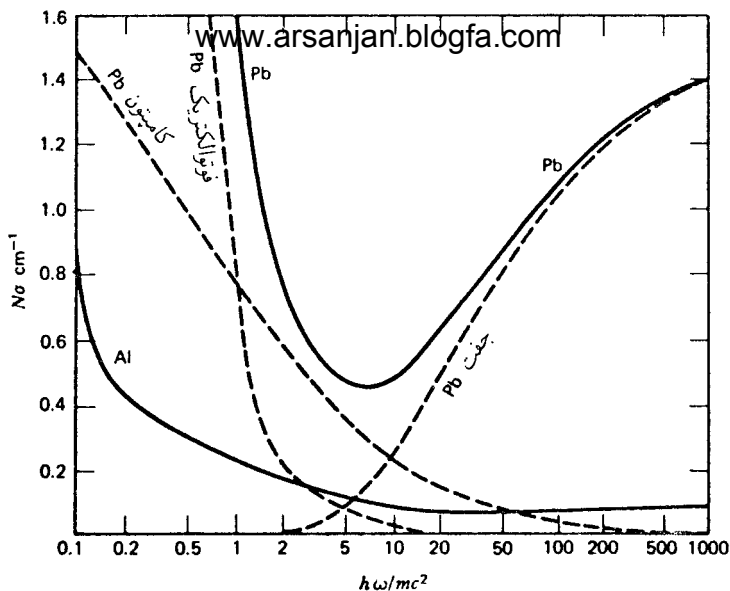
و فرایند

$$e_i + \gamma_i \rightarrow e_i + \gamma_i + \gamma_f + e_f + e^{+'} \rightarrow \gamma_f + e_f$$

را نیز باید در نظر گرفت. محاسبه به فرمول کلاین-نیشینا می‌رسد

$$\sigma = 2\pi \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \left\{ \frac{1+x}{x^2} \left[\frac{2(1+x)}{1+2x} - \frac{1}{x} \log(1+2x) \right] + \frac{1}{2x} \log(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right\} \quad (32-24)$$

$$x = \frac{\hbar\omega}{mc^2}$$



شکل ۲-۲۴ ضریب جذب کل برای سرب و آلومینیم نسبت به انرژی (برحسب جرم سکون الکترون، 511MeV). سطح مقطع فوتوالکتریک برای Al در مقیاسی که در اینجا نشان داده شده است قابل چشمپوشی است.

که با آزمایش کاملاً توافق دارد. این فرمول در بسامدهای کم به صورت زیر درمی آید

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{c^2}{mc^2} \right)^2 (1 - 2x) \quad (24-33)$$

و در بسامدهای زیاد ($x \gg 1$) تبدیل می شود به

$$\sigma = \pi \left(\frac{c^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{x} \left(\log 2x + \frac{1}{2} \right) \quad (24-34)$$

بنابراین، سطح مقطع کامپتون نیز در انرژیهای زیاد کاهش می یابد. در انرژیهای بیشتر از چند MeV فرایند جذبی غالب تولید زوج است.

جالب توجه است که فوتون در انرژیهای به اندازه کافی زیاد، $h\omega > 2mc^2$ می تواند به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل شود (شکل ۲-۲۴). پوزیترون را می توان واقعاً "پادالکترون" نامید؛ پوزیترون و الکترون دارای جرم و اسپین یکسان هستند، و همچنین بار و گشتاور مغناطیسی آنها دارای مقدار یکسان اما با علامت مخالف هستند، و جفت شدگی غیرنسبیتی با میدان الکترومغناطیسی از تعویض \mathbf{p} با $\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)/c$ به دست می آید. این تبدیل به ماده تنها در حضور یک ذره

$$\gamma \rightarrow e + e^+$$

پایستگی انرژی و تکانه نمی‌تواند برقرار باشد. برای اثبات بدون محاسبات سینماتیکی طولانی، فرایند وارون یعنی $\gamma \rightarrow e + e^+$ را در چارچوب مرکز جرم در نظر می‌گیریم. الکترون و پوزیترون دارای تکانه‌های مساوی و مخالف هستند، و در نتیجه حالت نهایی دارای انرژی $\sqrt{2(m^2c^4 + p^2c^2)}$ و تکانه 0 است. فوتونی با انرژی E حامل تکانه E/c است. اگر یک هسته حضور داشته باشد می‌تواند انرژی و تکانه را جذب کند (برای هسته سنگین این انرژی بسیار کوچک است، $p^2/2M$)، و در نتیجه موازنه انرژی و تکانه امکانپذیر می‌شود.

محاسبه

$$\text{هسته} + e + e^+ \rightarrow \gamma + \text{هسته}$$

فراتر از سطح این کتاب است. نظریه الکترودینامیک کوانتومی که در این محاسبات به‌کار می‌رود نیز نشان می‌دهد که می‌توان ذرات را از یک طرف رابطه به طرف دیگر منتقل کرد با این شرط که ذرات منتقل شده را با پادذره‌های آنها عوض کنیم. بنابراین، پیش‌بینی می‌کنیم که فرایند

$$\gamma + e^\pm \rightarrow e^\pm + \text{هسته}$$

نیز می‌تواند روی دهد، و عنصر ماتریس آن رابطه بسیار نزدیکی با عنصر ماتریس تولید زوج دارد. این پیش‌بینی با آزمایش تأیید شده است، و فرایند بالا منشأ رگبار پرتو کیهانی است. یک پرتو فرودی γ با انرژی بسیار زیاد (که می‌تواند ناشی از واپاشی $2\gamma \rightarrow \pi^0$ باشد، که در آن π^0 از برخورد یک پروتون پرتو کیهانی اولیه با یک هسته در جو بالا تولید شده است) یک زوج به‌وجود می‌آورد، به‌طوری که هر عضو آن حامل تقریباً نیمی از انرژی اولیه است. هر عضو، چنانکه قبلاً نشان داده شد، می‌تواند یک فوتون تولید کند،^۶ و محصولات نهایی می‌توانند فوتونها و زوجهای دیگری تولید کنند. رگبارهای حاصل از رویدادهای بسیار پرانرژی در قسمت بالایی جو می‌توانند ناحیه‌هایی با مساحت چندین کیلومتر مربع را بیوشانند! رگبارهایی که در شمارنده‌ها تولید می‌شوند برای تشخیص فوتونها یا الکترونها به‌کار می‌روند. ذرات باردار سنگینتر انحراف کمتری پیدا می‌کنند، و از این رو تابش کمتری خواهند داشت.

۶. این فرایند را تابش ترمزی می‌نامند، و می‌توان آن‌را از دیدگاه کلاسیک توضیح داد: باری که در میدان کولنی هسته منحرف می‌شود شتاب می‌گیرد، و در نتیجه تابش می‌کند.

محاسبات تفصیلی نشان می‌دهد که www.arsanjan.blogfa.com محاسبات تفصیلی نشان می‌دهد که پیروی می‌کند

$$E(r) = E_{\text{فردی}} e^{-r/L} \quad (۳۵-۲۴)$$

که در آن "طول تابش" از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L = \frac{(m^2 c^2 / \hbar^2) A}{4 Z^2 \alpha^2 N_0 \rho \log(\sqrt{183} / Z^{1/2})} \quad (۳۶-۲۴)$$

که در آن N_0 عدد آووگادرو (6.023×10^{23})، m جرم الکترون، A وزن اتمی، Z بار هسته، و ρ چگالی ماده (برحسب گرم بر سانتیمترمکعب) است. "طول تولید زوج" از رابطه زیر به دست می‌آید

$$L_{\text{زوج}} = \frac{9}{\gamma} L \quad (۳۷-۲۴)$$

این فرمول برای Z های بسیار کم مناسب نیست. مقادیر نوعی L عبارت‌اند از

هوا	۳۳۰ m
آلومینیم	۹۷ cm
سرب	۰٫۵۳ cm

تابش ترمزی سازوکار اتلاف انرژی غالب برای الکترونها در انرژیهای زیاد است. در انرژیهای کمتر، یونش غالب است. کمبود جا اجازه نمی‌دهد که درباره این اثر اساساً کلاسیک بحث کنیم.

مسائل

۱-۲۴ سطح مقطع فرایند زیر را محاسبه کنید

$$\gamma + \text{دوترون} \rightarrow N + P$$

نحوه کار با مورد اثر فوتوالکتریک یکسان است. در محاسبه عنصر ماتریس، تابع موج حالت نهایی باز هم به صورت زیر است

$$\psi_f(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$$

که در آن p تکانه فوتون است. در انرژیهای کم، طول موج تابش بسیار بزرگتر از "اندازه" دوترون است، و از این رو $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \approx 1$ برای محاسبه

$$\int d^3r e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi_i(\mathbf{r})$$

از تابع بهنجارشده زیر استفاده کنید

$$\begin{aligned} \psi_i(\mathbf{r}) &= \frac{N}{\sqrt{4\pi}} e^{-\alpha(r-r_0)} & r > r_0 \\ &= 0 & r < r_0 \end{aligned}$$

برای چه انرژیهایی انتظار دارید که طول موج فوتون بسیار بزرگتر از برد پتانسیل $r_0 \cong 1.2 \text{ fm}$ باشد؟

۲-۲۴ اصل توازن تفصیلی عنصرهای ماتریس فرایندهای زیر را به هم مربوط می‌کند

$$A + a \rightarrow B + b \quad (1)$$

و

$$B + b \rightarrow A + a \quad (2)$$

بنابراین

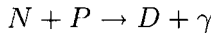
$$\sum |M_{(1)}|^2 = \sum |M_{(2)}|^2$$

که در آن جمع روی حالت‌های اسپینی اولیه و نهایی زده می‌شود. با توجه به اینکه در محاسبه آهنگ گذار یا سطح مقطع روی حالت‌های اسپینی اولیه میانگین می‌گیریم و روی حالت‌های اسپینی نهایی جمع می‌زنیم، نشان دهید که برای آهنگهای گذار داریم

$$\frac{(2J_A + 1)(2J_a + 1)}{p_a^2 (dp_b/dE_b)} \frac{dR_{(1)}}{d\Omega_b} = \frac{(2J_B + 1)(2J_b + 1)}{p_a^2 (dp_a/dE_a)} \frac{dR_{(2)}}{d\Omega_a}$$

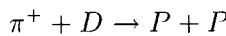
که در آن J_A, J_a, J_B, J_b اسپینهای ذرات، p_b و p_a تکانه‌های مرکز جرمی ذرات a و b (فرایندهای (۱) و (۲) باید در یک انرژی کل روی دهند)، E_b و E_a انرژیهای مربوط ذرات، و

$d\Omega_{ii}$ و $d\Omega_{ii}$ زاویه‌های فضای www.arsanjan.blogfa.com می‌شوند. با استفاده از این نتیجه، سطح مقطع فرایند گیراندازی تابشی

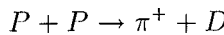


را بر حسب سطح مقطعی که در مسئله ۱-۲۴ محاسبه کرده‌اید بیان کنید. توجه کنید که عامل $(2J + 1)$ برای فوتونها ۲ است زیرا تنها دو حالت قطبش وجود دارند، و اسپین دوترون نیز ۱ است.

۳-۲۴ سطح مقطع واکنش



را که در آن π^+ فرودی دارای انرژی جنبشی آزمایشگاهی 24 MeV است اندازه‌گیری کرده‌ایم و مقدار آن را $10^{-27} \text{ cm}^2 \times 3 \times 10^9$ به دست آورده‌ایم. (الف) در چه انرژی آزمایشگاهی می‌توان با اندازه‌گیری سطح مقطع فرایند



توازن تفصیلی را آزمود؟ (جرم پیون برابر است با $m_{\pi^+} c^2 = 140 \text{ MeV}$ ، $M_p c^2 = 940 \text{ MeV}$ ؛ $M_D \cong 2M_p$.)

(ب) با توجه به اینکه اسپین π^+ صفر است، چه سطح مقطعی برای این واکنش پیش‌بینی می‌شود؟

۴-۲۴ طول تابش در زنون مایع را به دست آورید ($Z = 54$ ، $A = 131$ ، $\rho = 3.9 \text{ g/cm}^3$)
 ۵-۲۴ فرض کنید الکترون با یک پتانسیل مربعی به هسته وابسته است. تغییرات سطح مقطع اثر فوتوالکتریک را بر حسب انرژی به دست آورید. فرض کنید انرژی فوتون بسیار بیشتر از انرژی بستگی الکترون است و پتانسیل کوتاه برد است.
 [راهنمایی: به مسئله ۱-۲۴ مراجعه کنید.]

مراجع

سازوکارهای جذب تابش در ماده در اکثر کتابهای درسی فیزیک جدید بررسی شده‌اند (مراجع آخر این کتاب را ببینید). برای بحث کاملی درباره روشهای تجربی اندازه‌گیری اثرات مختلف، مراجعه کنید به

پیوست الف

انتگرال فوریه و توابع دلتا

فرض کنید تابع $f(x)$ دوره‌ای است و دوره آن $2L$ است:

$$f(x) = f(x + 2L) \quad (\text{الف-۱})$$

این نوع تابع را می‌توان به یک رشته فوریه در بازه $(-L, L)$ بسط داد که عبارت است از

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (\text{الف-۲})$$

این رشته را می‌توان به صورت زیر درآورد

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi x/L} \quad (\text{الف-۳})$$

که مسلماً ممکن است، زیرا

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2} (e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}) \\ \sin \frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2i} (e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}) \end{aligned}$$

www.arsanjan.blogfa.com ضرایب بسط با استفاده از رابطه زیر

$$\frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx e^{in\pi x/L} e^{-im\pi x/L} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (\text{الف-۴})$$

به دست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-in\pi x/L} \quad (\text{الف-۵})$$

اکنون الف-۳ را با وارد کردن Δn ، که تفاضل دو عدد درست متوالی است، می‌نویسیم. چون $\Delta n = 1$ داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_n a_n e^{in\pi x/L} \Delta n \\ &= \frac{L}{\pi} \sum_n a_n e^{in\pi x/L} \frac{\pi \Delta n}{L} \end{aligned} \quad (\text{الف-۶})$$

با تغییری در نمادنگاری به صورت

$$\frac{\pi n}{L} = k \quad (\text{الف-۷})$$

به دست می‌آوریم

$$\frac{\pi \Delta n}{L} = \Delta k \quad (\text{الف-۸})$$

همچنین می‌نویسیم

$$\frac{L a_n}{\pi} = \frac{A(k)}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{الف-۹})$$

بدین ترتیب، الف-۶ به صورت زیر درمی‌آید

$$f(x) = \sum \frac{A(k)}{\sqrt{\pi}} e^{ikx} \Delta k \quad (\text{الف-۱۰})$$

اگر $L \rightarrow \infty$ آنگاه متغیر k پیوسته خواهد شد، زیرا $\Delta k = \frac{2\pi}{L} \Delta x$ بینهایت کوچک می‌شود. با توجه به تعریف انتگرال ریمان، می‌بینیم که می‌توان الف-۱ را در حد به صورت زیر نوشت

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{ikx} \quad (\text{الف-۱۱})$$

ضریب $A(k)$ با رابطه زیر داده می‌شود

$$\begin{aligned} A(k) &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx f(x) e^{-in\pi x/L} \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx} \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۲})$$

معادله‌های الف-۱۱ و الف-۱۲ را تبدیلهای انتگرالی فوریه می‌نامند. اگر معادله دوم را در اولی قرار دهیم به دست می‌آوریم

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{-iky} \quad (\text{الف-۱۳})$$

اکنون فرض می‌کنیم ترتیب انتگرالها را می‌توان عوض کرد. بنابراین، می‌نویسیم

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} \right] \quad (\text{الف-۱۴})$$

برای آنکه این رابطه صادق باشد، کمیت داخل کروشه که آن را با $\delta(x-y)$ نشان می‌دهیم

$$\delta(x-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} \quad (\text{الف-۱۵})$$

و تابع دلتای دیراک می‌نامیم باید یک نوع تابع کاملاً خاص باشد. این تابع باید به ازای $y \neq x$ صفر شود و وقتی $x-y=0$ باید به نحوی مناسب به بینهایت میل کند، زیرا گستره انتگرال‌گیری بینهایت کوچک است. بنابراین، دلتای دیراک یک تابع به معنای متداول ریاضی نیست، بلکه "تابع تعمیم یافته" یا "توزیع" است.^۱ تابع دلتای دیراک به خودی خود معنا ندارد، و تنها به شرطی می‌تواند

۱. نظریه توزیعات را ریاضیدان فرانسوی لوران شوارتز توسعه داد. برای یک بررسی مقدماتی می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید:

M G Lighthill, *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1958.