www.arsanjan.blogfa.com

در آخرین مرحله از رابطهٔ $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ استفاده کرده‌ایم.

انتگرال‌گیری روی حجمی در فضای تکانه صورت می‌گیرد که با آرایش تجربی مشخص می‌شود. اگر بنویسیم

$$d^3\mathbf{p} = d\Omega_{\mathbf{p}} p^2 dp = d\Omega_{\mathbf{p}} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 d\left(\frac{\omega}{c}\right)\hbar^3 \qquad (۵۴_۲۱)$$

که در آن $d\Omega_{\mathbf{p}}$ جزء زاویهٔ فضایی است، می‌بینیم که روی تابع دلتایی که انرژی را پایسته می‌دارد انتگرال گرفته می‌شود، و نتیجه عبارت است از

$$R_{k\to m} = \int \frac{4\pi^2 e^2}{m^2\omega V} |\langle \phi_m | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{p} | \phi_k\rangle|^2 d\Omega_{\mathbf{p}} \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}$$

$$\times \hbar^3 \frac{\omega^3}{c^3} \frac{d(\hbar\omega)}{\hbar} \delta(E_k^\circ - E_m^\circ - \hbar\omega) \qquad (۵۵_۲۱)$$

$$= \int d\Omega_{\mathbf{p}} \frac{\alpha}{2\pi} \omega_{km} \left| \frac{1}{mc} \langle \phi_m | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{p} | \omega_k\rangle \right|^2$$

که در آن

$$\omega_{km} = \frac{E_k^\circ - E_m^\circ}{\hbar} \qquad (۵۶_۲۱)$$

اگر دستگاه تجربی حالتهای قطبش فوتون را از هم تمیز ندهد، محاسبهٔ آهنگ باید شامل یک جمع روی این دو حالت نهایی مستقل باشد. به‌علاوه، اگر حالتهای نهایی اتم واگن باشند این جمع باید شامل تمام آنها باشد. دربارهٔ این مورد در یک بخش دیگر بحث خواهیم کرد.

فضای فاز

$$d^3\mathbf{n} = \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (۵۷_۲۱)$$

تنها منحصر به فوتونها نیست. الکترون آزاد با تابع موج تخت $(1/\sqrt{V})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}$ توصیف می‌شود و دارای همان چگالی حالتها است. تنها تفاوت در این است که رابطهٔ میان انرژی (که در تابع دلتا ظاهر می‌شود) و تکانه به جای اینکه $E = pc$ باشد به‌صورت $E = \mathbf{p}^2/2m$ [یا به‌صورت نسبیتی $E = (\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$] است.

www.arsanjan.blogfa.com

اگر چند ذرهٔ آزاد در حالت نهایی داشته باشیم چگالی حالتها به‌صورت حاصلضرب زیر است

$$\prod_k \frac{V d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi\hbar)^3} \qquad (۵۸_۲۱)$$

رابطهٔ ۲۱ـ۵۳ در ترکیب با ۲۱ـ۲۱ به‌رابطهٔ زیر تعمیم می‌یابد

$$R_{i\to j} = \frac{2\pi}{\hbar} \int_{\text{تکانه‌های مستقل}} \prod_k \frac{V d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi\hbar)^3} |M_{fi}|^2 \delta\left(E_f^\circ + \sum_k E_k - E_i^\circ\right) \qquad (۵۹_۲۱)$$

که در آن M_{fi} عنصر ماتریس اختلال بین حالتهای اولیه و نهایی دستگاه نامختل است. تابع دلتا باز هم پایستگی انرژی را نشان می‌دهد: انرژیی که ذرات آزاد همراه خود می‌برند برابر است با تغییر انرژی دستگاه؛ و انتگرال روی تکانه‌های مستقل گرفته می‌شود. برای مثال، اگر دستگاه به سه ذره وابپاشد، تنها دو تکانهٔ مستقل وجود دارند، زیرا تکانهٔ سوم از پایستگی انرژی تعیین می‌شود. اما توجه کنید که ضرب عاملها در ۲۱ـ۵۸ روی تمام ذرات در حالت نهایی انجام می‌شود، یعنی اگر n ذره در حالت نهایی وجود داشته باشند حاصلضرب شامل V^n خواهد بود. همچنین می‌توان ۲۱ـ۵۹ را به‌صورت یک انتگرال روی تمام تکانه‌ها، با یک تابع دلتا که متضمن بیان پایستگی تکانه است، نوشت. دلیل اینکه چنین تابع دلتایی در محاسبه ظاهر نمی‌شود این است که هستهٔ اتم را در فضا ثابت گرفته‌ایم، که موجه است زیرا اتم از الکترونها بسیار سنگین‌تر است. در این شرایط، تکانهٔ اتم یک متغیر دینامیکی نیست. در هر صورت، نتیجهٔ کلی

$$R_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} \int \prod_k \frac{V d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi\hbar)^3} \times |M_{fi}|^2 \delta\left(E_i^\circ - E_f^\circ - \sum E_k\right) \delta\left(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f - \sum \mathbf{p}_k\right) \qquad (۶۰_۲۱)$$

یک نتیجهٔ اساسی است و می‌توان آن‌را به‌صورت زیر، که فرمی آن‌را قاعدهٔ طلایی نامیده است، خلاصه کرد

$$R_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho(E) \qquad (۶۱_۲۱)$$

که در آن $\rho(E)$ چگالی حالتها است.

توجه کنید که حجم جعبه همیشه حذف می‌شود. برای n ذره در حالت نهایی، یک V^n از چگالی حالتها (فضای فاز) و یک $1/\sqrt{V}$ برای هر ذرهٔ آزاد در عنصر ماتریسی داریم، که از

تابع موج آنها

www.arsanjan.blogfa.com

$$\prod_k \frac{e^{i\mathbf{p}_k\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}} \qquad (۶۲_۲۱)$$

ناشی می‌شود. تعداد این عاملها n است، و در نتیجه وابستگی مجذور عنصر ماتریس به V با V^n از فضای فاز حذف می‌شود. در آینده باز هم از قاعدهٔ طلایی استفاده خواهیم کرد، اما اکنون به محاسبهٔ عنصر ماتریس برای گذار تابشی می‌پردازیم.

عنصر ماتریس و قاعده‌های گزینش

می‌خواهیم کمیت زیر را محاسبه کنیم

$$\langle\phi_m|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\epsilon\cdot\mathbf{p}|\phi_k\rangle \qquad (۶۳_۲۱)$$

ابتدا مرتبهٔ بزرگی آن‌را براورد می‌کنیم. برای یک گذار اتمی نوعی داریم

$$\epsilon\cdot\mathbf{p}\sim|\mathbf{p}|\sim Zmc\alpha \qquad (۶۴_۲۱)$$

باید نما را نیز براورد کنیم، زیرا در اینجا یک عامل نوسانی داریم که می‌تواند نتیجه را به‌طور قابل ملاحظه‌ای تغییر دهد. با

$$r\sim\frac{\hbar}{mcZ\alpha} \qquad (۶۵_۲۱)$$

و

$$|k|\sim\frac{\hbar\omega}{\hbar c}\sim\frac{\frac{1}{2}mc^2(Z\alpha)^2}{\hbar c}\sim\frac{mc}{2\hbar}(Z\alpha)^2 \qquad (۶۶_۲۱)$$

به‌دست می‌آوریم

$$kr\sim\frac{1}{2}Z\alpha \qquad (۶۷_۲۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

در نتیجه، به‌ازای $Z\alpha \ll 1$ و $Zmc\alpha$ است، و از این‌رو

$$R_{k\to m} \sim 2\alpha\omega(Z\alpha)^2 \sim \alpha(Z\alpha)^2\frac{mc^2(Z\alpha)^2}{\hbar} \sim \alpha(Z\alpha)^4\frac{mc^2}{\hbar} \sim 2\times 10^{10}Z^4\,\mathrm{s}^{-1} \qquad (۶۸_۲۱)$$

چون در بسط

$$e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})^n \qquad (۶۹_۲۱)$$

جمله‌های متوالی بنابه براورد بالا به‌صورت $Z\alpha$ کاهش می‌یابند محاسبه ساده می‌شود. بنابراین، تا مرتبهٔ $Z\alpha$ داریم

$$\langle\phi_m|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{p}|\phi_k\rangle \simeq \langle\phi_m|\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{p}|\phi_k\rangle \qquad (۷۰_۲۱)$$

این نتیجه را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\langle\phi_m|\mathbf{p}|\phi_k\rangle &= m\boldsymbol{\epsilon}\cdot\langle\phi_m|d\mathbf{r}/dt|\phi_k\rangle\\ &= \frac{im}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\langle\phi_m|[H,\mathbf{r}]|\phi_k\rangle\\ &= im\frac{(E_m^0-E_k^0)}{\hbar}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\langle\phi_m|\mathbf{r}|\phi_k\rangle\\ &= im\omega\boldsymbol{\epsilon}\cdot\langle\phi_m|\mathbf{r}|\phi_k\rangle\end{aligned} \qquad (۷۱_۲۱)$$

بدین‌ترتیب، با محاسبهٔ عنصر ماتریس عملگر $\mathbf{r}$ سروکار داریم، و این دلیلی است برای اینکه تقریب ۲۱ـ۷۰ را تقریب دوقطبی بنامیم.

شایان تذکر است که در تقریب دوقطبی، اختلال ۲۱ـ۲۵، یعنی

$$\lambda V(t) = \frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{p}$$

را می‌توان با استفاده از ۲۱ـ۳۲ و ۲۱ـ۷۱ به‌صورت زیر نوشت

$$\lambda V(t) = e\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{r} \qquad (۷۲_۲۱)$$

که در واقع انرژی پتانسیل برهمکنش یک دوقطبی با گشتاور $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ در میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است.

www.arsanjan.blogfa.com

اگر ϕ_k یک حالت اولیهٔ هیدروژنگونه باشد که با اعداد کوانتومی n_i l_i m_i مشخص می‌شود، و ϕ_m حالت نهایی با اعداد کوانتومی m_f و l_f m_f باشد، آنچه باید محاسبه کرد عبارت است از

$$\begin{aligned}\langle\phi_m|\epsilon\cdot\mathbf{r}|\phi_k\rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \int d\Omega R^*_{n_f l_f}(r) Y^*_{l_f m_f}(\theta,\phi)\epsilon\cdot\mathbf{r} R_{n_i l_i}(r) Y_{l_i m_i}(\theta,\phi)\\ &= \int_0^\infty r^2 dr R^*_{n_f l_f}(r)\, r\, R_{n_i l_i}(r)\\ &\quad\times\int d\Omega Y^*_{l_f l_f}(\theta,\phi)\epsilon\cdot\hat{\mathbf{r}} Y_{l_i m_i}(\theta,\phi)\end{aligned} \qquad (۷۳_۲۱)$$

دربارهٔ انتگرال شعاعی برای یک مورد خاص در بخش بعد بحث خواهیم کرد. در اینجا انتگرال زاویه‌ای را بررسی می‌کنیم. داریم

$$\epsilon\cdot\hat{\mathbf{r}} = \epsilon_x \sin\theta\cos\phi + \epsilon_y \sin\theta\sin\phi + \epsilon_z\cos\theta$$

با توجه به اینکه

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}Y_{1,0}(\theta,\phi) = \cos\theta \qquad \sqrt{\frac{3}{8\pi}}Y_{1,\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sin\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad (۷۴_۲۱)$$

به‌دست می‌آوریم

$$\epsilon\cdot\hat{\mathbf{r}} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\epsilon_z Y_{1,0} + \frac{-\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1,1} + \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}}Y_{1,-1}\right) \qquad (۷۵_۲۱)$$

بنابراین، انتگرال زاویه‌ای در ۲۱_۷۳ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int d\Omega Y^*_{l_f m_f}(\theta,\phi) Y_{1,m}(\theta,\phi) Y_{l_i m_i}(\theta,\phi) \qquad (۷۶_۲۱)$$

ابتدا روی زاویهٔ سمتی انتگرال می‌گیریم:

$$\int_0^{2\pi} d\phi\, e^{-im_f\phi} e^{im\phi} e^{im_i\phi} = 2\pi\,\delta_{m,m_f-m_i} \qquad (۷۷_۲۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

بدین‌ترتیب، اولین قاعدهٔ گزینش به‌صورت زیر درمی‌آید

$$m_f - m_i = m = ۱, ۰, -۱ \qquad (۷۸_۲۱)$$

این قاعدهٔ گزینشی است که در بحث اثر زیمان متذکر شدیم. مخصوصاً، اگر محور z را در راستای تکانهٔ فوتون $\mathbf{k}$ بگیریم آنگاه شرط ۲۱ـ۳۸ ایجاب می‌کند که $\epsilon_z = ۰$ و در نتیجه $m = \pm ۱$ به‌دست می‌آید. بنابراین،

$$m_f - m_i = \pm ۱ \qquad (۷۹_۲۱)$$

به‌عنوان یک مورد خاص، متذکر می‌شویم که اگر حالت نهایی یک حالت پایه با $l_f = m_f = ۰$ باشد آنگاه $m = -m_i$. برای مثال، اگر $m_i = ۱$ آنگاه $m = -۱$ و در نتیجه بردار قطبش فوتون عبارت است از $(\epsilon_x + i\epsilon_y)/\sqrt{۲}$. مضمون این نتیجه این است که اگر اتم در حالت اولیه با $m_i = ۱$ در راستای محور z قطبیده باشد، آنگاه در یک واپاشی به حالتی با تکانهٔ زاویه‌ای صفر پایستگی مؤلفهٔ z تکانهٔ زاویه‌ای ایجاب می‌کند که فوتون حامل این مقدار باشد. بنابراین، اسپین فوتون باید در جهت مثبت محور z باشد، یعنی باید پیچیدگی مثبت $(+۱)$ داشته باشد، یا، معادل آن، باید قطبش دایره‌ای چپگرد داشته باشد. این درست همان چیزی است که جملهٔ $(\epsilon_x + i\epsilon_y)/\sqrt{۲}$ نشان می‌دهد.

از انتگرال‌گیری روی θ قاعدهٔ گزینش دیگری به‌دست می‌آید. ابتدا مورد خاص $l_f = ۰$ را در نظر می‌گیریم. چون $Y_{۰,۰} = ۱/\sqrt{۴\pi}$، انتگرال‌گیری زاویه‌ای ۲۱ـ۷۶ به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{۱}{\sqrt{۴\pi}} \int d\Omega Y_{l,m}(\theta,\phi) Y_{l,m_i}(\theta,\phi) = \frac{۱}{\sqrt{۴\pi}} \delta_{l,۱} \delta_{m_i,-m} \qquad (۸۰_۲۱)$$

که نشان می‌دهد حالت اولیه باید دارای $l_i = ۱$ باشد. در هیدروژن، گذارهای غالب به‌حالت پایه عبارت‌اند از $np \to ۱s$.

به‌طور کلی، وقتی l_i و l_f صفر نیستند، باز هم یک قاعدهٔ گزینش به‌دست می‌آوریم. در به‌دست آوردن این قاعده، که فراتر از سطح اطلاعات ریاضی دربارهٔ توابع خاص است که در این کتاب فرض شده است، از قضیهٔ جمع برای هماهنگهای کروی استفاده می‌شود که عبارت است از

$$Y_{l_۱,m_۱}(\theta,\phi) Y_{l_۲,m_۲}(\theta,\phi) = \sum_{L=|l_۱-l_۲|}^{l_۱+l_۲} C(L, m_۱+m_۲; l_۱, l_۲, m_۱, m_۲) Y_{L,m_۱+m_۲}(\theta,\phi) \qquad (۸۱_۲۱)$$

ضرایب $C(L, m_۱ + m_۲; l_۱, l_۲, m_۱, m_۲)$ همان ضرایب کلبش‌ـگوردان هستند که در ۱۵ـ۴۶ دیده می‌شوند. تکانه‌های زاویه‌ای ممکن در طرف راست درست همانهایی هستند که از

جمع تکانه‌های زاویه‌ای l_1 و l_2 می‌توان به‌دست آورد. با جاگذاری در ۲۱ـ۷۶ به نتیجهٔ زیر
www.arsanjan.blogfa.com
می‌رسیم

$$\int d\Omega Y^*_{l_f m_f}(\theta,\phi) \sum_{L=|l_i-1|}^{l_i+1} C(L, m_i+m_i, 1, l_i, m_i, m_i) Y_{L,m+m_i}(\theta,\phi) = 0$$

مگر اینکه

$$l_f = l_i + 1, l_i, |l_i - 1| \qquad (۲۱ـ۸۲)$$

از اینجا صورت کلی قاعدهٔ گزینش برای تابش دوقطبی الکتریکی به‌دست می‌آید:

$$\Delta l = 1, 0, -1 \qquad (۲۱ـ۸۳)$$

که با این قید، چنانکه رابطهٔ ۲۱ـ۸۰ به‌روشنی نشان می‌دهد، همراه است که گذارهای صفر-صفر روی نمی‌دهند. قید دیگری نیز وجود دارد که ناشی از پایستگی پاریته است. چون $\mathbf{r}$ تحت انعکاس فرد است، یک قاعدهٔ گزینش اضافی برای گذارهای دوقطبی الکتریکی وجود دارد:

$$\text{حالت اتمی باید تغییر پاریته دهد} \qquad (۲۱ـ۸۴)$$

چون پاریته از $(-1)^l$ به‌دست می‌آید، این قاعده ایجاب می‌کند که مقدار l باید عملاً تغییر کند. بنابراین، برای مثال گذارهای $3p \to 2p$ تا مرتبهٔ $Z\alpha$ مجاز نیستند.

تا جایی که اختلال منحصر به‌جفت‌شدگی زیر باشد

$$\frac{e}{mc}\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \qquad (۲۱ـ۸۵)$$

وابستگی به اسپین در آن وجود ندارد، و از این‌رو اسپینها نمی‌توانند در گذار تغییر جهت دهند. بنابراین، به یک قاعدهٔ گزینش اضافی می‌رسیم:

$$\Delta S = 0 \qquad (۲۱ـ۸۶)$$

که قبلاً در بحث طیف هلیم متذکر شدیم.

قاعده‌های گزینشی که در بالا بیان کردیم مطلق نیستند. قوانین پایستگی تکانهٔ زاویه‌ای و پاریته (برای فرایندهای الکترومغناطیسی) مطلق هستند، اما ۲۱ـ۸۳ فقط تقریباً درست است. گذارهای

www.arsanjan.blogfa.com

بین حالتها که در آنها l بیشترین تغییر را می‌کند از طریق سازوکار دوقطبی الکتریکی روی دهند. این گذارها در صورتی انجام می‌شوند که عنصر ماتریس

$$\langle \phi_f | e^{-ik\cdot r} \epsilon \cdot p | \phi_i \rangle \qquad (۸۷_۲۱)$$

مخالف صفر باشد. برای $\Delta l = ۲$، توان اول $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ سهمی مخالف صفر دارد. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\epsilon\cdot\mathbf{p} &= \frac{۱}{۲}(\epsilon\cdot\mathbf{p}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \epsilon\cdot\mathbf{r}\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}) + \frac{۱}{۲}(\epsilon\cdot\mathbf{p}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \epsilon\cdot\mathbf{r}\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}) \\ &= \frac{۱}{۲}(\epsilon\cdot\mathbf{p}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \epsilon\cdot\mathbf{r}\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}) + \frac{۱}{۲}(\mathbf{k}\times\epsilon)\cdot(\mathbf{r}\times\mathbf{p}) \qquad (۸۸_۲۱) \end{aligned}$$

جملهٔ اول را جملهٔ چارقطبی الکتریکی می‌نامند، و جملهٔ دوم را که به $\mathbf{L}\cdot\mathbf{B}$ مربوط است جملهٔ دوقطبی مغناطیسی می‌نامند. برای این گذارها، که عنصر ماتریس آنها را $Z\alpha$ بارکوچکتر از جملهٔ اصلی براورد کردیم، به‌ترتیب داریم $\Delta l = ۲$ و $\Delta l = ۰$. چون عملگرهای رابطهٔ ۲۱ـ۸۸ زوج هستند، بین حالتهای اتمی تغییر پاریته نخواهیم داشت. برای مثال، گذارهای $۳d \to ۱s$ نمی‌توانند از طریق سازوکار دوقطبی الکتریکی روی دهند اما با سازوکار چارقطبی الکتریکی مجاز هستند. در واقع، معلوم می‌شود که به احتمال زیاد حالت $۳d$ ابتدا به حالت $۲p$ افت می‌کند و سپس از حالت اخیر گذار مطلوب $۲p \to ۱s$ صورت می‌گیرد، یعنی دو فوتون متوالی گسیل می‌شوند.

قاعدهٔ گزینش اسپین $\Delta S = ۰$ نیز چندان خدشه‌ناپذیر نیست. علاوه بر جفت‌شدگی ۲۱ـ۸۵، جفت‌شدگی زیر، که در اثر نابهنجار زیمان بررسی شد، نیز وجود دارد

$$\lambda V(t) = \frac{ge}{۲mc}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \qquad (۸۹_۲۱)$$

عنصر ماتریس برای جملهٔ القاکنندهٔ گذار $\Delta S \neq ۰$ را می‌توان از مقایسهٔ آن با عنصر ماتریس دوقطبی الکتریکی براورد کرد:

$$\frac{(eg/۲mc)\hbar|\mathbf{k}\times\epsilon|}{(۲e/mc)|\mathbf{p}\cdot\epsilon|} \simeq \frac{\hbar|\mathbf{k}|}{|\mathbf{p}|} \simeq \frac{\hbar\omega}{|\mathbf{p}|c} \simeq \frac{mc^۲(Z\alpha)^۲}{mc^۲(Z\alpha)} \simeq Z\alpha \qquad (۹۰_۲۱)$$

و می‌بینیم که بازداشته می‌شود، درست مانند عنصر ماتریس دوقطبی مغناطیسی که شباهت صوری زیادی با آن دارد. به‌عنوان یک مثال از وضعیتی که در آن جفت‌شدگی ۲۱ـ۸۹ نقش مهمی دارد، فرایند هسته‌ای فروپاشی فوتونی دوترون را در نظر می‌گیریم

$$\gamma + d \to n + p \qquad (۹۱_۲۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

دوترون با تقریب بسیار خوب یک حالت ${}^3S_1$ است. در گذار دوقطبی الکتریکی، دستگاه نهایی $(n-p)$ باید در حالت ${}^3P$ باشد زیرا $\Delta l = 1$ و $\Delta S = 0$. اما معلوم می‌شود که، درست بالاتر از آستانهٔ واکنش، بعید است دو نوکلئون در یک حالت نسبی P باشند. به‌طور کلی، ذرات تنها به‌شرطی می‌توانند با احتمال محسوس در یک حالت نسبی تکانهٔ زاویه‌ای L باشند که

$$|\mathbf{p}|a \gtrsim hL \qquad (۹۲_۲۱)$$

که در آن $\mathbf{p}$ تکانهٔ نسبی و a اندازهٔ دستگاه است. در مورد دوترون، وقتی انرژی γ کمتر از $10\,\mathrm{MeV}$ است، بعید است که دستگاه $(n-p)$ در یک حالت P باشد. اما جفت‌شدگی اضافی

$$-\frac{e}{2Mc}(g_p\mathbf{s}_p + g_n\mathbf{s}_n)\cdot\mathbf{B} \qquad (۹۳_۲۱)$$

می‌تواند باعث گذار بین حالت ${}^3S_1$ و حالت نامقید ${}^1S_0$ شود. برهم‌کنش را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$-\frac{e}{2Mc}\left[\frac{1}{2}(g_p+g_n)(\mathbf{s}_p+\mathbf{s}_n)+\frac{1}{2}(g_p-g_n)(\mathbf{s}_p-\mathbf{s}_n)\right]\cdot\mathbf{B} \qquad (۹۴_۲۱)$$

جملهٔ اول تحت تبادل $p \leftrightarrow n$ متقارن است، و در نتیجه نمی‌تواند در گذار بین حالت اسپینی متقارن و حالت اسپینی پادمتقارن سهمی داشته باشد، اما جملهٔ دوم سهیم است. ضرایب در واقع بسیار بزرگ هستند، زیرا $g_p \cong 5{,}56$ و $g_n = -3{,}81$.

یک قاعدهٔ گزینش وجود دارد که خدشه‌ناپذیر است، و آن قاعده‌ای است که گذارهای صفر-صفر (مربوط به تکانهٔ زاویه‌ای کل $j = 0$) را در فرایندهای تک‌فوتونی ممنوع می‌کند. روش کلی اثبات مطلق بودن این قاعدهٔ گزینش به‌صورت زیر است: عنصر ماتریس، که یک کمیت نرده‌ای است باید به‌طور خطی شامل قطبش فوتون باشد، و از این‌رو باید به‌صورت $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{V}$ باشد که در آن $\mathbf{V}$ برداری است که در مسئله وارد می‌شود. اگر حالتهای اولیه و نهایی حالتهای $j = 0$ باشند، یعنی وابسته به هیچ راستایی نباشند، آنگاه تنها برداری که داریم تکانهٔ فوتون $\mathbf{k}$ است. اما $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{k} = 0$، و در نتیجه راهی برای ساختن عنصر ماتریس در دست نیست. بنابراین، چنین عنصری نباید وجود داشته باشد.[1]

---

۱. رابطهٔ $\boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{k} = 0$ مستقل از انتخاب پیمانه است، و بیان عرضی بودن میدان الکترومغناطیسی است. این نوع استدلالها "بنابر شمارش" در فیزیک ذرات بنیادی، که در آن برهم‌کنش واقعا شناخته نیست، فراوان به‌کار می‌رود.

www.arsanjan.blogfa.com

گذار $2p \to 1s$

اکنون رابطهٔ ۲۱ـ۷۳ را اخصاصاً برای گذار $2p \to 1s$ بررسی می‌کنیم. باید انتگرال شعاعی را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dr\, r^3 R_{10}(r) R_{21}(r) \\
&\quad = \int_0^\infty dr\, r^3 \left[2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{24}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{5/2} r\, e^{-Zr/2a_0}\right] \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^4 \int_0^\infty dr\, r^4 e^{-3Zr/2a_0} \qquad (۹۵_۲۱) \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^4 \left(\frac{2a_0}{3Z}\right)^5 \int_0^\infty dx\, x^4 e^{-x} = \frac{24}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{3}\right)^5 Z^{-1} a_0
\end{aligned}$$

انتگرال زاویه‌ای به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}
\int d\Omega Y_{0,0}^* \boldsymbol{\epsilon}\cdot\hat{\mathbf{r}} Y_{1,m} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d\Omega \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(\epsilon_z Y_{1,0} + \frac{-\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1,1}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}} Y_{1,-1}\right) Y_{1,m} \qquad (۹۶_۲۱) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\epsilon_z \delta_{m,0} + \frac{-\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}}\delta_{m,-1} + \frac{\epsilon_x + i\epsilon_y}{\sqrt{2}}\delta_{m,1}\right)
\end{aligned}$$

مجذور قدرمطلق حاصلضرب ۲۱ـ۹۵ و ۲۱ـ۹۶ عبارت است از

$$96\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{a_0}{Z}\right)^2 \frac{1}{3}\left[\delta_{m0}\epsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2)\right] \qquad (۹۷_۲۱)$$

و آهنگ گذار به‌ازای یک مقدار معین m برای اتم برانگیخته به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned}
R_{2p\to 1s} &= \int d\Omega_{\mathbf{p}} \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) \frac{\omega}{m^2 c^2} m^2 \omega^2 \frac{2^{15}}{3^{10}} \left(\frac{a_0}{Z}\right)^2 \\
&\quad \times \left[\delta_{m,0}\epsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\delta_{m,1} + \delta_{m,-1})(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2)\right] \qquad (۹۸_۲۱)
\end{aligned}$$

که در آن کمیت

www.arsanjan.blogfa.com

$$\omega = \frac{1}{\hbar}\left[\frac{1}{2}mc^2(Z\alpha)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{3}{8}\frac{mc^2}{\hbar}(Z\alpha)^2 \qquad (۹۹_۲۱)$$

بسامد تابش گسیل‌شده در گذار است.

انتگرال زاویه‌ای در ۲۱ـ۹۸ روی راستاهای فوتون گرفته می‌شود، و ساده نیست زیرا ϵ مقید است که بر راستای تکانهٔ فوتون عمود باشد. انتگرال‌گیری بسیار ساده خواهد بود اگر حالت اولیهٔ p سمتگیری نداشته باشد، یعنی در سه حالت ممکن $m(m = 1, 0, -1)$ با احتمال برابر روی دهد. آنگاه آهنگ گذار به‌صورت زیر است

$$R_{2p\to 1s} = \frac{1}{3}\sum_{m=-1}^{1} R_{2p\to 1s}(m) \qquad (۱۰۰_۲۱)$$

چون

$$\sum_{m=-1}^{1}\left[\delta_{m0}\,\epsilon_z^2 + \frac{1}{2}(\delta_{m1}+\delta_{m,-1})(\epsilon_x^2+\epsilon_y^2)\right] = \epsilon_x^2+\epsilon_y^2+\epsilon_z^2 = 1 \qquad (۱۰۱_۲۱)$$

تابع زیر انتگرال مستقل از راستای فوتون می‌شود. نتیجه را باید در ۲ نیز ضرب کنیم، زیرا دو حالت قطبش ممکن برای فوتون داریم و هر دو را آشکارسازی می‌کنیم. بهتر است طرف راست رابطهٔ ۲۱ـ۵۵ را به‌صورت دقیقتر زیر بنویسیم

$$\int d\Omega_{\mathbf{p}}\frac{\alpha}{2\pi}\frac{\omega_{km}}{m^2c^2}\sum_{\lambda=1}^{2}|\langle\phi_m|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}\cdot\mathbf{p}|\phi_k\rangle|^2 \qquad (۱۰۲_۲۱)$$

که در آن λ قطبشها را نشان می‌دهد. دو حالت قطبش برهم عمود هستند، و در نتیجه داریم

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'} \qquad (۱۰۳_۲۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

از ترکیب تمام اینها، به‌دست می‌آوریم

$$R_{۲p\to ۱s} = ۲\cdot ۴\pi\frac{\alpha}{۲\pi}\frac{۱}{c^۲}\left(\frac{۳}{۸}\frac{mc^۲}{\hbar}Z^۲\alpha^۲\right)^۳\frac{۲^{۱۵}}{۳^{۱۰}}\left(\frac{\hbar}{mcZ\alpha}\right)^۲\frac{۱}{۳}$$

$$= \frac{۲^۸}{۳^۸}\frac{mc^۲}{\hbar}\alpha(Z\alpha)^۴ \cong ۰٫۶\times ۱۰^۹ Z^۴ \mathrm{s}^{-۱} \qquad (۱۰۴_۲۱)$$

این نتیجه حدود ۳۰ بار کوچکتر از براورد ۲۱ـ۶۸ است. بنابراین، جزئیات عوامل در عنصرهای ماتریس اهمیت دارند و حدس نمی‌تواند جای محاسبه را بگیرد. با این همه، از ملاحظات ابعادی و احتساب مناسب توانهای α می‌توان به‌عنوان راهنما برای تعیین مرتبهٔ بزرگی کمیتهای فیزیکی در فیزیک اتمی استفاده کرد.

رابطهٔ آهنگ گذار

$$R_{fi} = \frac{d\Omega_{\mathbf{p}}}{۲\pi}\frac{e^۲}{\hbar c}\frac{\omega^۳}{c^۲}\sum_{\lambda=۱}^{۲}|\langle f|\mathbf{r}|i\rangle\cdot\epsilon^{(\lambda)}|^۲ \qquad (۱۰۵_۲۱)$$

را می‌توان با ضرب کردن انرژی کوانتوم نور $h\omega$ در آن به فرمولی برای شدت تابش تبدیل کرد:

$$I_{fi} = d\Omega_{\mathbf{p}}\frac{e^۲}{۲\pi c^۳}\omega^۴\sum_{\lambda=۱}^{۲}|\langle f|\mathbf{r}|i\rangle\cdot\epsilon^{(\lambda)}|^۲ \qquad (۱۰۶_۲۱)$$

اما این درست فرمول کلاسیک برای شدت نوری است که یک دوقطبی نوسانی با گشتاور زیر گسیل می‌کند

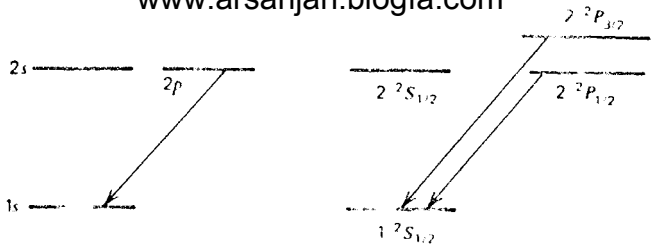
$$\mathbf{d} = e\langle f|\mathbf{r}|i\rangle\, e^{-i\omega t} \qquad (۱۰۷_۲۱)$$

و مثال دیگری از اصل تطابق را به‌دست می‌دهد.

اسپین و قاعده‌های شدت

منظورکردن اسپین اوضاع را زیاد تغییر نمی‌دهد. البته هر یک از حالتهای اولیه و نهایی می‌توانند در حالتهای اسپین "بالا" یا "پایین" باشند، اما چون برهم‌کنش درگذارهای اتمی وابسته به اسپین نیست تنها گذارهای "بالا" ← "بالا" و "پایین" ← "پایین" مجاز هستند. بنابراین، آهنگهای گذار نه تنها از ml مستقل‌اند (چنانکه در بخش قبل دیدیم) بلکه به m_s، و در نتیجه m_j، نیز وابسته نیستند. با وارد کردن جفت‌شدگی اسپین-مدار، شکافتگیهای تراز کوچکی (بر مقیاس اختلاف

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۲۱ـ۲ شکافتگی خط طیفی $2p - 1s$ به‌علت جفت‌شدگی اسپین-مدار.

انرژی $2p - 1s$) به‌دست می‌آوریم. برای مثال، ساختار ترازی $n = 1$ و $n = 2$، چنانکه در شکل ۲۱ـ۲ نشان داده شده است، تغییر می‌کند. خط طیفی مربوط به گذار $2p \rightarrow 1s$ به دو خط، $^2P_{3/2} - {}^2S_{1/2}$ و $^2P_{1/2} - {}^2S_{1/2}$، شکافته می‌شود. برای حالتهای شکافته، انتگرال شعاعی و فضای فاز تقریبا بدون تغییر می‌مانند، و در نتیجه نسبت شدت دو خط را می‌توان تنها از قسمتهای زاویه‌ای انتگرال، یعنی صرفا از بررسیهای تکانهٔ زاویه‌ای تعیین کرد.

جدول زیر توابع موج حالتهای مورد بحث را نشان می‌دهد.

		پاریته‌فرد	پاریته‌زوج
J	m_j	$l = 1$	$l = 0$
۳/۲	۳/۲	Y_{11+}	—
۳/۲	۱/۲	$\sqrt{2/3}\, Y_{10+} + \sqrt{1/3}\, Y_{11-}$	—
۳/۲	−۱/۲	$\sqrt{1/3}\, Y_{1,-1+} + \sqrt{2/3}\, Y_{10-}$	—
۳/۲	−۳/۲	$\sqrt{2/3}\, Y_{1,-1-}$	—
۱/۲	۱/۲	$\sqrt{1/3}\, Y_{10+} - \sqrt{2/3}\, Y_{11-}$	Y_{00+}
۱/۲	−۱/۲	$\sqrt{2/3}\, Y_{1,-1+} - \sqrt{1/3}\, Y_{10-}$	Y_{00-}

در مجذور عناصر ماتریس، قسمتهای شعاعی یکسان هستند. بنابراین، در بررسی آهنگهای مربوط به $P_{3/2} \rightarrow S_{1/2}$ باید مجذور عناصر ماتریس گذار برای $m_j = 3/2 \rightarrow m_j = 1/2$، ... ، $m_j = 3/2 \rightarrow m_j = -1/2$، $m_j = -3/2 \rightarrow m_j = -1/2$ را اضافه کنیم، در حالی‌که آهنگ مربوط به $P_{1/2} \rightarrow S_{1/2}$ شامل مجموع مجذورهای عناصر ماتریس برای $m_j = 1/2 \rightarrow m_j = 1/2$، ... ، $m_j = 1/2 \rightarrow m_j = -1/2$ است. این کار را می‌توان مستقیماً با استفاده از فنونی که کاملا پیچیده و فراتر از حد این کتاب هستند انجام داد. اما می‌توان این کمیتها را به‌تفصیل، با استفاده از این واقعیت که توابع موج متعامدند، محاسبه کرد.

www.arsanjan.blogfa.com

$P_{3/2} \to S_{1/2}$		
$m_j = 3/2 \to m_j = 1/2$	$\lvert\langle Y_{11}\lvert \mathbf{r}\cdot\epsilon\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = C$	
$3/2 \to -1/2$	$0 \quad$ زیرا $\quad Y_{1,-1} = 0$	
$1/2 \to 1/2$	$\lvert\langle\sqrt{2/3}\, Y_{10}\lvert \mathbf{r}\cdot\epsilon\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = 0$	$(\Delta m = 0)$
$1/2 \to -1/2$	$\lvert\langle\sqrt{1/3}\, Y_{11}\lvert \mathbf{r}\cdot\epsilon\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = C/3$	
$-1/2 \to 1/2$	$\lvert\langle\sqrt{1/3}\, Y_{1,-1}\lvert \mathbf{r}\cdot\epsilon\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = C/3$	
$-1/2 \to -1/2$	$\lvert\langle\sqrt{2/3}\, Y_{10}\lvert \mathbf{r}\cdot\epsilon\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = 0$	$(\Delta m = 0)$
$-3/2 \to 1/2$	0	
$-3/2 \to -1/2$	$\lvert\langle Y_{1,-1}\lvert \mathbf{r}\cdot\epsilon\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = C$	

از جمع جمله‌ها به‌دست می‌آوریم

$$\sum R = \frac{8C}{3} \qquad (108\text{-}21)$$

همچنین داریم

$P_{1/2} \to S_{1/2}$	
$m_j = 1/2 \to m_j = 1/2$	$\lvert\langle\sqrt{1/3}\, Y_{10}\lvert \epsilon\cdot\mathbf{r}\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = 0$
$1/2 \to -1/2$	$\lvert\langle -\sqrt{2/3}\, Y_{11}\lvert \epsilon\cdot\mathbf{r}\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = 2C/3$
$-1/2 \to 1/2$	$\lvert\langle\sqrt{2/3}\, Y_{1,-1}\lvert \epsilon\cdot\mathbf{r}\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = 2C/3$
$-1/2 \to -1/2$	$\lvert\langle -\sqrt{1/3}\, Y_{10}\lvert \epsilon\cdot\mathbf{r}\rvert Y_{00}\rangle\rvert^2 = 0$

و

$$\sum R = \frac{4C}{3} \qquad (109\text{-}21)$$

بنابراین، نسبت شدتها برابر است با

$$\frac{R(P_{3/2} \to S_{1/2})}{R(P_{1/2} \to S_{1/2})} = \frac{8C/3}{4C/3} = 2 \qquad (110\text{-}21)$$

دلیل جمع‌زدن روی تمام حالتهای اولیه این است که وقتی اتم برانگیخته است تمام ترازهای p به‌طور یکسان اشغال شده‌اند، زیرا اختلاف انرژی آنها در مقایسه با اختلاف انرژی $2p - 1s$ بسیار کوچک است. همچنین اگر آزمایشی انجام دهیم که بین حالتهای نهایی تفاوت نگذارد، مانند اندازه‌گیری طیف نمایی، روی تمام آنها جمع می‌زنیم. در محاسبهٔ آهنگ گذار $2p \to 1s$، روی حالتهای اولیهٔ m میانگین گرفتیم. در آنجا این سؤال مطرح بود: "اگر N اتم در حالتهای $2p$ داشته باشیم، در هر

www.arsanjan.blogfa.com

ثانیه چند اتم وامی‌پاشد" میانگین‌گیری را انجام داده‌ایم که در بیشتر موارد، وقتی N اتم برانگیخته شده باشند، حدود $N/3$ در هر یک از حالتهای $m = 1, 0, -1$ هستند. در اینجا، این واقعیت دخیل است که تعداد ترازها در حالت $P_{3/2}$ از حالت $P_{1/2}$ بیشتر است. مجموعاً شش تراز (چهار تراز با $j = 3/2$ و دو تراز با $j = 1/2$) و به‌طور متوسط $N/6$ اتم در هر حالت داریم. این واقعیت که در زیرمجموعهٔ ترازهای $j = 3/2$ اتمهای بیشتری وجود دارند صرفاً به‌معنای واپاشی بیشتری است، و از این‌رو شدت نیز بیشتر خواهد بود.

طول عمر و پهنای خط

عدد $R(i \to f)$ که محاسبهٔ آن‌را در این فصل آموختیم احتمال گذار $i \to f$ تقسیم بر مدت زمان اعمال اختلال را نشان می‌دهد. این مدت زمان باید در مقایسه با $h/(E_m^\circ - E_k^\circ + \hbar\omega)$ بزرگ باشد تا احتمال گذار متناسب با t شود، اما بدیهی است که نمی‌تواند زیاد بزرگ باشد. احتمال اینکه حالت اولیه دست‌نخورده باقی بماند برابر است با

$$P_i(t) = 1 - \left[\sum_{f \neq i} R(i \to f)\right] t \qquad (۱۱۱_۲۱)$$

که در آن جمع روی تمام حالتهای نهایی قابل حصول زده می‌شود. بدیهی است که این رابطه برای زمانهای به‌اندازهٔ کافی طولانی بی‌معنی است، زیرا احتمالها باید مثبت باشند. اگر تحول زمانی دستگاه را دقیقتر محاسبه کنیم[۲]، خواهیم دید که طرف راست ۲۱ـ۱۱۱ صرفاً یک تقریب (با پایینترین مرتبهٔ اختلال) از رابطهٔ صحیح زیر است ــ که این هم تنها برای زمانهای طولانی اعتبار دارد

$$P_i(t) = e^{-t\sum_{f \neq i} R(i \to f)} \qquad (۱۱۲_۲۱)$$

بنابراین، می‌توان برای حالت اولیه طول عمر تعریف کرد:

$$\tau = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sum\limits_{f \neq i} R(i \to f)} \qquad (۱۱۳_۲۱)$$

آهنگ گذار کل R مجموع آهنگهای گذار جزئی به مجراهای ممکن f است. در مثالی که به‌تفصیل بررسی کردیم، گذار $1s \to 2p$ در اتمهای هیدروژنگونه، مجرای دیگری وجود ندارد، و از این‌رو

۲. این محاسبه در مبحث ویژه، بخش "طول عمر پهنای خط و تشدید" انجام شده است.

www.arsanjan.blogfa.com

طول عمر حالت $2p$ برابر است با

$$\tau = 1.6 \times 10^{-9} Z^{-4} \mathrm{s} \qquad (۱۱۴_۲۱)$$

که توافق آن با آزمایش عالی است. این نتیجه را (به‌ازای $Z = 1$) با زمانی که طول می‌کشد تا الکترون "یک‌بار دور هسته بگردد" مقایسه می‌کنیم. سرعت αc است و فاصله از مرتبهٔ $3 \times 10^{-8} \mathrm{cm}$ است؛ بنابراین، زمان مشخصه از مرتبهٔ $1.4 \times 10^{-16} \mathrm{s}$ است. برحسب این زمان، عمر حالت $2p$ بسیار طولانی است.

چون طول عمر حالت $2p$ متناهی است، انرژی آن بنابه اصل عدم قطعیت باید عدم قطعیتی با بزرگی زیر داشته باشد

$$\Delta E \sim \frac{h}{\tau} \qquad (۱۱۵_۲۱)$$

این عدم قطعیت باعث می‌شود شدت خط به‌عنوان تابعی از بسامد در $\omega_0 = (E_{2p} - E_{1s})/h$ کاملاً تیز نباشد، بلکه توزیعی به‌صورت زیر داشته باشد

$$I(\omega) \propto \frac{(R/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + R^2/4} \qquad (۱۱۶_۲۱)$$

توجه کنید که در حد $R \to 0$، یعنی در حدی که نظریهٔ اختلال دقیقاً کاربرد دارد، از فرمول بالا به‌دست می‌آوریم

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{(\omega - \omega_0)^2 + \epsilon^2} = \pi\, \delta(\omega - \omega_0) \qquad (۱۱۷_۲۱)$$

شکل خط با تابع دلتای پایستگی انرژی نشان داده شده است. پهنای خط ۲۱ـ۱۱۶ برابر است با R، و این معیاری از عدم قطعیت در انرژی است. این شکل خط را شکل خط لورنتسی می‌نامند.

مسائل

۲۱ـ۱ یک اتم هیدروژن در میدان الکتریکی یکنواخت $\mathbf{E}(t)$ با وابستگی زمانی

$$\mathbf{E}(t) = 0 \qquad t < 0$$
$$= \mathbf{E}_0 e^{-\gamma t} \qquad t > 0$$

قرار دارد. اگر این اتم ابتدا در حالت پایه باشد، احتمال این را به‌دست آورید که در $t \to \infty$ اتم به حالت $2p$ گذار کند.

www.arsanjan.blogfa.com

۲۱ـ۲ رابطه‌ای برای $c_n(t)$ تا مرتبهٔ دوم λ به‌دست آورید. بنویسید

$$c_n(t) = \delta_{nk} + \lambda c_n^{(1)}(t) + \lambda^2 c_n^{(2)}(t) + \cdots$$

نشان دهید که معادلهٔ مرتبهٔ اول برای $c_n^{(1)}(t)$ تغییر نمی‌کند، و $c_n^{(2)}(t)$ از معادلهٔ زیر پیروی می‌کند

$$c_m^{(2)}(t) = \frac{1}{i\hbar\lambda} \int_0^t dt' \sum_n c_n^{(1)}(t') e^{i(E_m^0 - E_n^0)t'/\hbar} \langle \phi_m | V(t') | \phi_n \rangle$$

جواب $c_n^{(1)}(t')$ را جاگذاری کنید و رابطهٔ خود را تا جایی که امکان دارد ساده کنید.

۲۱ـ۳ یک نوسانگر هماهنگ را در نظر بگیرید که با هامیلتونی زیرتوصیف می‌شود

$$H = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2(t) x^2$$

که در آن

$$\omega(t) = \omega_0 + \delta\omega \cos ft$$

و $\delta\omega \ll \omega_0$. با فرض اینکه دستگاه در $t = 0$ در حالت پایه است، احتمال گذار از حالت پایه را برحسب زمان به‌دست آورید. از نظریهٔ اختلال استفاده کنید. توجه کنید که اگر $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle n|x^2|0\rangle &= \hbar/\sqrt{2}m\omega \qquad n = 2 \\ &= 0 \qquad\qquad\quad n \neq 2 \end{aligned}$$

۲۱ـ۴ فرض کنید ذره‌ای با جرم سکون M به دو ذره با جرمهای سکون m_1 و m_2 وامی‌پاشد. با استفاده از رابطهٔ نسبیتی میان انرژی و تکانه، چگالی حالتهای ρ را که در ۲۱ـ۶۱ آمده است محاسبه کنید.

[راهنمایی: تنها یک تکانهٔ مستقل $\mathbf{p}$ وجود دارد، و به

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^6} \delta\Big(E_{\text{اولیه}} - \sum_{\text{حالتهای نهایی}} E\Big)$$

احتیاج دارید.]

www.arsanjan.blogfa.com

۵ـ۲۱ محاسبهٔ مسئلهٔ قبل را برای واپاشی زیر انجام دهید.

$$A \to B + C + D$$

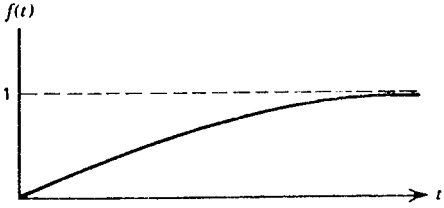
که در آن ذرات C و D بی‌جرم هستند.

[راهنمایی: در اینجا دو تکانهٔ مستقل دارید.]

۶ـ۲۱ این مسئله مثالی از قضیهٔ بی‌دررو است. بنابه این قضیه اگر تغییر هامیلتونی از H_0 به H بسیار کند باشد، دستگاهی که در یک ویژه‌حالت معین H_0 است به ویژه‌حالت متناظر H می‌رود بدون اینکه هیچ گذاری صورت گیرد. به‌عنوان یک مورد مشخص، حالت پایه را در نظر بگیرید، به‌طوری که

$$H_0 \phi_0 = E_0 \phi_0$$

فرض کنید $V(t) = f(t)V$، که در آن $f(t)$ یک تابع کند تغییر است که در نمودار زیر نشان داده شده است



اگر ω_0 حالت پایهٔ مربوط به $H = H_0 + V$ باشد، بنابه قضیهٔ بی‌دررو کارهای زیر را باید انجام دهید

$$|\langle \omega_0 | \psi(t) \rangle| \to 1$$

(الف) نشان دهید برای زمانهایی که $f(t) = 1$

$$\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i(E_m^0 - E_0^0)t'/\hbar} f(t') \to \frac{e^{i(E_m^0 - E_0^0)t/\hbar}}{E_m^0 - E_0^0}$$

از رابطهٔ زیر استفاده کنید.

$$\frac{df(t')}{dt'} \ll \frac{E_m^0 - E_0^0}{\hbar} f(t')$$

$$\frac{1}{i\omega}\frac{d}{dt}e^{i\omega t}=e^{i\omega t}$$

www.arsanjan.blogfa.com

می‌توانید تابع $f(t)$ را با یک مثال مشخص کنید، یا اینکه انتگرال جزء به جزء بگیرید، یعنی در انتگرال بالا بنویسید

(ب) با استفاده از ۲۱ـ۳ و ۲۱ـ۹، تابع $\psi(t)$ را محاسبه کنید. نتیجه را با فرمول ۱۶ـ۱۹، که در این مورد به‌صورت

$$w_0=\phi_0+\sum_{m\neq 0}\frac{\langle\phi_m|V|\phi_0\rangle}{E_0^0-E_m^0}\phi_m$$

است مقایسه کنید و از اینجا نشان دهید

$$|\langle w_0|\psi(t)\rangle|\to 1$$

۲۱ـ۷ آهنگ گذار $1s\to 2p$ را برای نوسانگر سه‌بعدی، براساس طرحی که در این فصل ارائه شد، محاسبه کنید.

۲۱ـ۸ هسته‌ها گاهی با فرایندی که تبدیل داخلی نامیده می‌شود، و در آن یکی از الکترونهای $1s$ به‌جای فوتون گسیل می‌شود، از حالت برانگیخته به حالت پایه وامی‌پاشند. فرض کنید توابع موج اولیه و نهایی هسته عبارت باشند از

$$\phi_I(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_A)\quad\text{و}\quad\phi_F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_A)$$

که در آن $\mathbf{r}_i(i=1,2,\ldots,Z)$ به پروتونها و $\mathbf{r}_{Z+1}$، ...، $\mathbf{r}_A$ به نوترونها مربوط می‌شوند. اختلالی که باعث این گذار می‌شود برهم‌کنش هسته‌ـالکترون است:

$$V=-\sum_{i=1}^{Z}\frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}$$

که در آن $\mathbf{r}$ بردار مکان الکترون است. بنابراین، عنصر ماتریس عبارت است از

$$-\int d^3\mathbf{r}\int d^3\mathbf{r}_1\cdots d^3\mathbf{r}_A\phi_F^*\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}}\sum_{i=1}^{Z}\frac{e^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|}\phi_I\psi_{100}(\mathbf{r})$$

www.arsanjan.blogfa.com

(الف) اندازهٔ تکانهٔ الکترون آلفا
(ب) با استفاده از بسط

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} \simeq \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_i}{r^3}$$

آهنگ مربوط به فرایند گذار دوقطبی را برحسب

$$\mathbf{d} = \sum \int d^3\mathbf{r}_1 \cdots d^3\mathbf{r}_A \phi_F^* \mathbf{r}_i \phi_I$$

محاسبه کنید.

۹ـ۲۱ نشان دهید وقتی $t \to \infty$

$$e^{i\omega t} \sin(\omega_0 - \omega)t \ \sin(\omega_0 + \omega)t \to -\frac{1}{2}$$

[راهنمایی: از رابطهٔ $\lim_{t\to\infty} \sin At = \lim_{t\to\infty} \cos At = 0$ استفاده کنید.]

مراجع

قضیهٔ جمع که به محاسبهٔ عمومی‌تر قاعده‌های گزینش به‌کار می‌آید در تمام کتابهای پیشرفته‌تری که در آخر این کتاب معرفی شده‌اند و همچنین در کتاب زیر بررسی شده است

M E Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, New York, 1957.

انتگرالهای شعاعی برای موارد کلی‌تر در کتابهای زیر بررسی شده‌اند

H A Bethe and R W Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, W A Benjamin, New York, 1968.

H A Bethe and E E Salpeter, *Quantum Mechanics of One-and Two-Electron Atoms*, Springer Verlag, Berlin/ New York, 1957.

E U Condon and G H Shortley, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1959.

www.arsanjan.blogfa.com

۲۲

مباحث برگزیده در نظریهٔ تابش

در فصل ۲۱ (روابط ۲۱ـ۴۰ و ۲۱ـ۴۱) گفتیم که برای جذب یک کوانتوم نور از حالت اولیه‌ای که n فوتون با بسامد زاویه‌ای ω و قطبش λ دارد پتانسیل برداری به‌صورت زیر است

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega V}}\ \sqrt{n}\ \epsilon^{(\lambda)}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (۱_۲۲)$$

و برای گسیل یک کوانتوم نور به حالت اولیه‌ای با n فوتون با بسامد زاویه‌ای ω و قطبش λ داریم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega V}}\sqrt{n+1}\epsilon^{(\lambda)}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (۲_۲۲)$$

که در آنها حالتهای قطبش نیز منظور شده‌اند. به بیان دقیق، تعداد فوتونها به تکانه و قطبش فوتون نیز بستگی دارد، و در واقع برای جذب باید بنویسیم

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega V}}\sqrt{n_\lambda(\mathbf{k})}\ \epsilon^{(\lambda)}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (۳_۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com

و برای گسیل

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega V}}\sqrt{n_\lambda(\mathbf{k})+1}\;\epsilon^{(\lambda)}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (۴_۲۲)$$

به لحاظ فیزیکی، این عوامل ایجاب می‌کنند که حضور فوتونهایی با یک بسامد خاص احتمال گسیل فوتون دیگری با همان بسامد را تقویت کند. می‌گوییم این فوتونها گسیل تابش را القا می‌کنند یا برمی‌انگیزند.

در فرایند "کوانتیده کردن" میدان الکترومغناطیسی یعنی وقتی میدانهای الکتریکی و مغناطیسی را، مانند $p(t)$ و $x(t)$ در حرکت یک‌بعدی ذره، متغیرهای دینامیکی در نظر می‌گیریم پیدایش این عوامل وابسته به n امری کاملاً عادی به‌نظر می‌رسد. این روش فراتر از سطح این کتاب است. به‌جای آن، عوامل $\sqrt{n}$ و $\sqrt{n+1}$ را به روش جالب اینشتین، که در سال ۱۹۱۷ یعنی قبل از کشف مکانیک کوانتومی ارائه شد، محاسبه می‌کنیم.

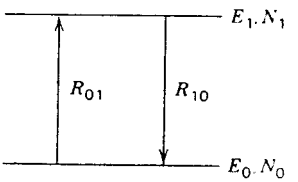
ضرایب A و B اینشتین

اینشتین با استفاده از نظریهٔ پلانک، نظریهٔ بور و مکانیک آماری به روش زیر استدلال کرد.

گازی متشکل از مولکولهایی را در نظر بگیرید که در یک کاواک در دمای T با تابش برهم‌کنش می‌کنند. بنابه نظریهٔ بور، این مولکولها می‌توانند در حالتهای پایای مختلفی باشند. در حالت تعادل، نسبت تعداد مولکولها در یک حالت m به تعداد مولکولها در یک حالت n با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\frac{N_m}{N_n}=\frac{g_m}{g_n}\,\frac{e^{-E_m/kT}}{e^{-E_n/kT}}=\frac{g_m}{g_n}e^{-(E_m-E_n)/kT} \qquad (۵_۲۲)$$

که در آن g_m مرتبهٔ واگنی است، یعنی تعداد تراز‌هایی که انرژی E_m دارند. (از مکانیک کوانتومی اکنون می‌دانیم که $g_m=2J_m+1$ که در آن J_m تکانهٔ زاویه‌ای کل حالتی است که انرژی E_m دارد، اما در آنچه در زیر می‌آید به این رابطه احتیاج نداریم.) اکنون یک زوج تراز E_1 و E_0 با



شکل ۲۲_۱ نمایش نموداری دستگاه دوترازی.

www.arsanjan.blogfa.com

$E_1 > E_0$ در نظر بگیرید (شکل ۲۲ـ۱۴). آنگاه R_{21} برای انرژی پایینتر به تراز انرژی بالاتر باید با تعداد مولکولهای N_0 که انرژی E_0 دارند و با شدت تابش در کاواک که نور جذب‌شده از آن بسامد ν دارد متناسب باشد. بنابراین

$$R_{01} = N_0 u(\nu, T) B_{01} \qquad (۶ـ۲۲)$$

که در آن B_{01} ضریبی است که جذب تابش توسط مولکولهای دارای انرژی E_0 را توصیف می‌کند و ضریب جذب القایی نامیده می‌شود، زیرا تابش موجود باعث این فرایند می‌شود. برای آهنگ گذار از حالت بالاتر به حالت پایینتر، اینشتین از این اصل بور استفاده کرد که گسیل خودبه‌خود می‌تواند با آهنگی مستقل از تابش موجود روی دهد، اما در اینجا باید گسیل القایی نیز وجود داشته باشد. اگر N_1 تعداد مولکولها در حالت ۱ باشد، داریم

$$R_{10} = N_1 (u(\nu, T) B_{10} + A_{10}) \qquad (۷ـ۲۲)$$

B_{10} گسیل القایی و A_{10} گسیل‌خودبه‌خود را توصیف می‌کند. در وضعیت تعادل، تعداد گذارهای $0 \to 1$ باید برابر با تعداد گذارهای $1 \to 0$ باشد، و در نتیجه

$$N_0 u(\nu, T) B_{01} = N_1 (u(\nu, T) B_{10} + A_{10}) \qquad (۸ـ۲۲)$$

از ترکیب این رابطه با ۲۲ـ۶ به‌دست می‌آوریم

$$\frac{u(\nu, T) B_{10} + A_{10}}{u(\nu, T) B_{01}} = \frac{N_0}{N_1} = \frac{g_0}{g_1} e^{-(E_0 - E_1)/kT}$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت زیر نوشت

$$g_1 A_{10} = u(\nu, T)(g_0 B_{01} e^{(E_1 - E_0)/kT} - g_1 B_{10}) \qquad (۹ـ۲۲)$$

پیامدهای این رابطه عبارت‌اند از

(الف) به‌ازای مقدار ثابت $E_1 - E_0$، اگر $T \to \infty$ آنگاه $e^{(E_1 - E_0)/kT} \to 1$، و از قانون ریلی‌ـجینز (فصل ۱) به‌دست می‌آوریم $u(\nu, T) \to (8\pi\nu^2/c^3)kT$. چون طرف چپ معادلهٔ ۲۲ـ۹ مستقل از T است، نتیجه می‌گیریم

$$g_0 B_{01} = g_1 B_{10} \qquad (۱۰ـ۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com

که نشان می‌دهد به‌ازای هر مولکول آهنگ گسیل القایی با آهنگ جذب القایی برابر است.

(ب) از جاگذاری نتیجهٔ بالا در ۲۲ـ۹ به‌دست می‌آوریم

$$g_1 A_{10} = u(\nu, T)(g_1 B_{10})(e^{(E_1 - E_0)/kT} - 1)$$

یا

$$u(\nu, T) = \frac{A_{10}/B_{10}}{e^{(E_1 - E_0)/kT} - 1} \qquad (11\text{ـ}22)$$

طرف چپ از قانون وین ۱ـ۴ پیروی می‌کند، و در نتیجه

$$\nu^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right) = \frac{A_{10}/B_{10}}{e^{(E_1 - E_0)/kT} - 1} \qquad (12\text{ـ}22)$$

چون طرف چپ این معادله یک تابع عام است، و A_{10}/B_{10} نمی‌تواند تابع دما باشد، نتیجه می‌گیریم که باید A_{10}/B_{10} با ν^3 و $(E_1 - E_0)$ با ν متناسب باشد. بنابراین، $E_1 - E_0 = h\nu$ که در آن h یک ثابت است، و می‌توان نوشت

$$u(\nu, T) = \frac{A_{10}/B_{10}}{\nu^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad (13\text{ـ}22)$$

از مقایسهٔ این رابطه با فرمول پلانک می‌بینیم که

$$\frac{A_{10}}{B_{10}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \qquad (14\text{ـ}22)$$

برای محاسبهٔ A_{10} چنانکه در فصل ۲۱ دیدیم به مکانیک کوانتومی نیاز داریم.

آهنگ گسیل به‌ازای هر مولکول R_{10}/N_1 را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} R_{10}/N_1 = u(\nu, T)B_{10} + A_{10} &= A_{10}\left(1 + \frac{B_{10}}{A_{10}} u(\nu, T)\right) \\ &= A_{10}\left(1 + \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}\right) \end{aligned} \qquad (15\text{ـ}22)$$

www.arsanjan.blogfa.com

اما میانگین تعداد فوتونها در واحد T با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\langle n\rangle = \frac{\sum_n n e^{-nh\nu/kT}}{\sum_n e^{-nh\nu/kT}} = \left.\frac{d/dx \sum_n e^{-nx}}{\sum_n e^{-nx}}\right|_{x=h\nu/kT} = \frac{1}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (۱۶_۲۲)$$

و در نتیجه که آهنگ گسیل به‌ازای هر مولکول به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{R_{10}}{N_1} = A_{10}(1+\langle n(\nu,T)\rangle) \qquad (۱۷_۲۲)$$

بنابراین، آهنگ گسیل به‌ازای هر مولکول با $(1+\langle n\rangle)$ متناسب است که در آن $\langle n\rangle$ میانگین تعداد فوتونهای موجود است. به‌همین ترتیب، R_{01}/N_0 با میانگین تعداد فوتونهای موجود $\langle n\rangle$ متناسب است. اگرچه آهنگهای جذب وگسیل به‌ترتیب با $\langle n(\nu,T)\rangle$ و $\langle n(\nu,T)+1\rangle$ متناسب هستند، که در آنها $\langle n(\nu,T)\rangle$ تعداد متوسط فوتونها با بسامد مناسب در تابش جسم سیاه است، این عوامل از توزیع بسامد خاص تابش مستقل‌اند. در هر رویداد جذب یا گسیل تنها یک فوتون دخیل است، و از این‌رو دامنه‌های $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ به‌ترتیب شامل عوامل $\sqrt{n(\nu)}$ و $\sqrt{n(\nu)+1}$ هستند.

حیرت‌انگیز است که اینشتین چگونه توانسته است از ترکیب استدلال قوی آماری و آگاهی ابتدایی از اثرات کوانتومی تا این اندازه پیش برود.

لیزرها

چشمگیرترین کاربرد فنی گسیل القایی در تولید تابش الکترومغناطیسی تکفام همدوس و بسیار جهتدار با استفاده از تقویت نور از طریق گسیل القایی در وسیله‌ای است که لیزر نامیده می‌شود.[1] مؤلفه‌های اساسی یک لیزر عبارت‌اند از

۱. یک محیط لیزری با دست‌کم دو تراز انرژی، که با یک گاف انرژی از هم جدا شده‌اند، به‌طوری که اتمهای تراز بالاتر بتوانند در حضور فوتونهای با بسامد مناسب گذار انجام دهند.

۲. سازوکاری برای پرجمعیت کردن مجدد تراز بالاتر برای تداوم عمل.

۳. یک کاواک مناسب که حاوی فوتونهای القاگر و همچنین محیط لیزری است.

---

۱. این پدیده برای تابش در تمام بسامدها معتبر است، و در واقع ابتدا در ناحیهٔ میکروموج مطالعه شد. وسیلهٔ مربوط را میزر می‌نامند.

www.arsanjan.blogfa.com

شرایط کار لیزر

ماده‌ای را در نظر بگیرید که در آن توجه خود را به دو تراز انرژی E_1 و E_0، با $E_1 > E_0$، معطوف می‌کنیم. آهنگ تغییر $n(\nu)$، تعداد فوتونها با بسامد $\nu = (E - E_0)/h$، را می‌توان با استفاده از آهنگ افزایش ناشی از گسیل القایی و خودبه‌خود توسط N_1 اتم در حالت E_1، آهنگ کاهش ناشی از جذب القایی توسط N_0 اتم در حالت E_0، و آهنگ اتلاف فوتونها ناشی از نشت از کاواک، که متناسب با $n(\nu)$ است، حساب کرد. معادلهٔ مربوط عبارت است از

$$\frac{dn(\nu)}{dt} = N_1(u(\nu)B_{10} + A_{10}) - N_0\,u(\nu)B_{01} - \frac{n(\nu)}{\tau_0} \qquad (۱۸_۲۲)$$

τ_0 بعد زمان دارد، و کاواک باید به‌گونه‌ای طراحی شود که τ_0 در مقایسه با زمانی که فوتونها طول کاواک را می‌پیمایند کوچک باشد. رابطه‌ای میان چگالی انرژی فوتون و تعداد فوتونها برقرار است. فرمول

$$u(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}h\nu n(\nu) \qquad (۱۹_۲۲)$$

که برای تابش جسم سیاه صادق است یک رابطهٔ کلی است، زیرا چگالی را به‌صورت حاصلضرب تعداد مدها در واحد بازهٔ بسامد، انرژی در این بسامد و تعداد فوتونهای دارای این انرژی توصیف می‌کند. بنابراین،

$$\frac{dn(\nu)}{dt} = n(\nu)\left[\left(N_1 - \frac{g_1}{g_0}N_0\right)A_{10} - \frac{1}{\tau_0}\right] + N_1A_{10} \qquad (۲۰_۲۲)$$

که نشان می‌دهد تعداد فوتونها با زمان افزایش می‌یابد مگر اینکه

$$N_1 - \frac{g_1}{g_0}N_0 > \frac{1}{A_{10}\tau} \qquad (۲۱_۲۲)$$

چون در تعادل گرمایی داریم

$$N_1 - \frac{g_1}{g_0}N_0 = N_1\left(1 - \frac{N_0/g_0}{N_1/g_1}\right) = N_1(1 - e^{-(E_0 - E_1)/kT}) \qquad (۲۲_۲۲)$$
$$= N_1(1 - e^{h\nu/kT}) < 0$$

www.arsanjan.blogfa.com

می‌بینیم که لیزر باید در مد عمل کند. ما نشان داده‌ایم که باید یک جمعیت اضافی در اتمها در تراز E_1 ایجاد کنیم، یعنی باید وارونی جمعیت به‌وجود آوریم. یک راه انجام این کار را در زیر توصیف می‌کنیم

پمپاژ اپتیکی

یک راه ایجاد وارونی جمعیت استفاده از ماده‌ای است که در آن فرایند شامل گذارهایی بین سه تراز است. شکل ۲۲ـ۲ یک دستگاه سه‌ترازی را نشان می‌دهد. معادله‌ها آهنگ تغییر N_2، N_1 و N_0 را در حضور یک باریکهٔ نور با چگالی انرژی u_p در بسامدی توصیف می‌کنند که اتمها را از حالت پایهٔ "۰" به یکی از دو حالت برانگیخته که بالاتر است، حالت "۲"، پمپ می‌کند. عواملی که در تغییر N_2 دخیل هستند عبارت‌اند از واپاشی خودبه‌خود و القایی به حالتهای "۱" و "۰" که عدد اشغال تراز "۲" را کاهش می‌دهد و برانگیزش القایی از حالتهای "۱" و "۰" که N_2 را افزایش می‌دهد:

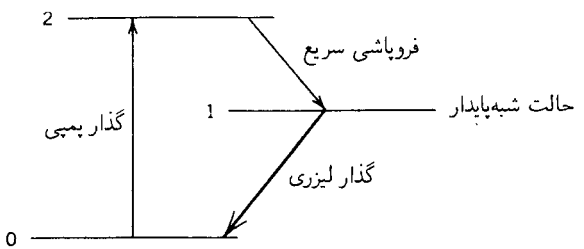
$$\begin{aligned}\frac{dN_2}{dt} =& N_2A_{21} - N_2A_{20} - N_2B_{21}u(\nu_{12}) - N_2B_{20}u_p(\nu_{02}) \\ &+ N_1B_{12}u(\nu_{12}) + N_0B_{02}u_p(V_{02})\end{aligned} \qquad (۲۳_۲۲)$$

به‌همین ترتیب، داریم

$$\frac{dN_1}{dt} = -N_1A_{10} - N_1B_{12}u(\nu_{12}) - N_1u(\nu_{01})B_{10} + N_2A_{21} + N_2B_{21}u(\nu_{12}) \qquad (۲۴_۲۲)$$

در وضعیت پایا هر دو مشتق زمانی صفر می‌شوند.

فرض کنید ماده به‌گونه‌ای است که $R_{21} \gg R_{10}$. در این مورد، تجمع اتمها در حالت "۲" و افزایش چگالی تابش در ν_{12} روی نخواهد داد. می‌توان به‌آسانی نشان داد که از معادله‌های



شکل۲۲ـ۲ نمایش نموداری گذار پمپ‌شده، که به دنبال آن افت سریع به حالت شبه‌پایدار و از آنجا گذار لیزری روی می‌دهد.

www.arsanjan.blogfa.com

وضعیت پایا، با $u(\nu_{۱۲}) = ۰$، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{N_۱}{N_۰} = \frac{R_{۲۱}}{R_{۱۰}} \frac{B_{۰۲}u_p}{A_{۲۱} + A_{۲۰} + B_{۰۲}u_p} \qquad (۲۵_۲۲)$$

وقتی چگالی انرژی پمپاژ u_p بزرگ است عامل دوم از مرتبهٔ ۱ است، و $N_۲$ و $N_۱ \gg N_۲$، که وارونی جمعیت را نشان می‌دهد.

به لحاظ فیزیکی، اتمها به حالت برانگیختهٔ بالاتر "۲" پمپ می‌شوند و به‌سرعت به‌حالت شبه‌پایدار "۱" که در آن وارونی جمعیت ایجاد می‌شود افت می‌کنند، و گذارهای لیزری به حالت پایه روی می‌دهند. این دستگاه سه‌ترازی در لیزر یاقوت به کار می‌رود. البته انواع دیگر لیزر نیز وجود دارند، و بحث بالا تنها به منظور نشان دادن راهی برای ایجاد وارونی جمعیت است. بدین‌ترتیب، سازوکارهای مختلف پمپاژ و مواد لیزری مختلف امکان لیزرهایی را فراهم می‌آورند که می‌توانند در قسمتهای مختلف طیف الکترومغناطیسی کار کنند. همچنین امکان دارد از موادی استفاده کنیم که در آنها تابش لیزری به ترازهای (کم‌فاصلهٔ) ارتعاشی نهایی مختلفی منتهی می‌شود، و در نتیجه می‌توان لیزرهای کوکپذیر ساخت.

کاواک

تولید باریکهٔ کم‌عرض موازی احتیاج به کاواکی با ساختار استوانه‌ای دارد که در دو سر آن آینه‌هایی با شفافیت کم تعبیه شده‌اند. این آینه‌ها برای نگه‌داشتن فوتونها در داخل کاواک هستند تا چگالی انرژی $u(\nu_{۱۰})$ افزایش یابد. یادآوری می‌کنیم که آهنگ تغییر تعداد فوتونها عبارت است از

$$\frac{dn(\nu)}{dt} = N_۱(u(\nu)B_{۱۰} + A_{۱۰}) - N_۰\,u(\nu)B_{۰۱} - \frac{n(\nu)}{\tau_۰}$$

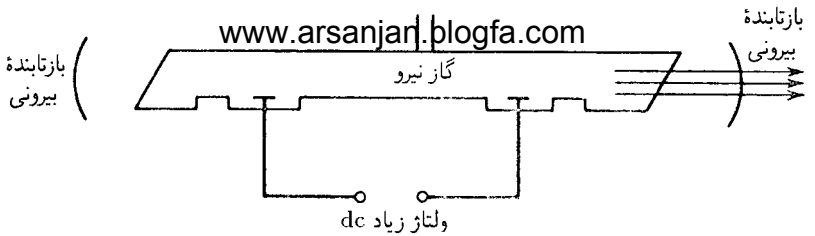
که در آن $N_۱ \gg N_۰$. می‌توان $\tau_۰$، "طول عمر فوتونها در کاواک"، را به روش زیر براورد کرد: فرض کنید تابش در کاواک استوانه‌ای به طول L فقط جلو و عقب می‌رود. اگر n^* ضریب شکست محیط باشد، زمان پیمایش برابر با n^*L/c است. اگر ضریب بازتاب آینه $r(\approx ۰٫۹۹)$ باشد، شدت نور پس از k پیمایش به r^k کاهش می‌یابد، و در نتیجه با $r = ۱ - \epsilon$ داریم

$$I_k/I_۰ = (۱ - \epsilon)^k \approx e^{-k\epsilon} \qquad (۲۶_۲۲)$$

پس از $k = ۱/\epsilon = ۱/(۱ - r)$ بار پیمایش، شدت به $۱/e$ مقدار اولیهٔ خود کاهش می‌یابد. بنابراین، طول عمر تابش در کاواک برابر است با

$$\tau_۰ \approx kn^*L/c = n^*L/c(۱ - r) \qquad (۲۷_۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۲۲ـ۳ تصویر نموداری لیزر.

اگر کاواک به دریچه‌هایی با زاویهٔ بروستر (که تقریباً به‌طور کامل حاوی یک حالت قطبش تابش هستند) منتهی شود، که در پشت آنها آینه‌های کروی یکسان قرار دارند که فاصلهٔ میانشان برابر با شعاع خمیدگی مشترک آنها است (شکل ۲۲ـ۳)، ضریب بازتاب را می‌توان به ۱ نزدیک کرد. توجه کنید که پهنای خط تابش برابر است با

$$\Delta\nu = 1/\tau_0 = c(1-r)n^{-1}L \qquad (۲۸_۲۲)$$

که در مقایسه با $c/2n^{-1}L$، یعنی فاصلهٔ بسامدی دو مد مجاور در کاواکی به‌اندازهٔ L، بسیار کوچک است. بنابراین، یک باریکهٔ تقریباً تکفام تولید می‌شود.

سرد کردن اتمها

در این بخش یک کاربرد لیزرها را بیان می‌کنیم که با مطالعهٔ اتمها ارتباط مستقیم دارد، یعنی استفاده از آنها برای کند کردن اتمها و در نتیجه کاهش پهن‌شدگی دوپلری خطهای طیفی که از آنچه ۲۱ـ۱۱۶ توصیف می‌کند بیشتر است.

خطهای طیفی از چند راه پهن می‌شوند. اتمها به‌طور کلی به تنهایی مشاهده نمی‌شوند. در گازی از اتمها عموماً برخوردهایی روی می‌دهد، و زمان بین این برخوردها، τ_c، اگر از عمر متوسط حالت مورد بررسی کمتر باشد، پهنای خط طیفی را تعیین می‌کند، زیرا τ_c عملاً طول‌عمر حالت است، و در نتیجه h/τ_c بزرگتر از پهنای طبیعی خط است. پهن‌شدگی برخوردی را می‌توان با کاهش چگالی (یا فشار) گاز اتمهای مورد بررسی کم کرد. پهن‌شدگی دوپلری نیز وجود دارد. وقتی اتمی با سرعت v حرکت می‌کند، بسامد تابش گسیل‌شده از اتم به‌اندازهٔ $\Delta\omega = (v/c)\omega$ تغییر می‌کند. اگر سرعت اتم را برابر با $v_{\text{rms}} = \sqrt{3kT/M_{\text{اتم}}}$ ، یعنی سرعت ریشهٔ میانگین مجذوری اتمها در گازی با دمای T، بگیریم آنگاه به‌عنوان مثال برای هیدروژن داریم $\Delta\omega/\omega \approx 3/0 \times 10^{-6}\sqrt{T}$. این نتیجه بسیار بیشتر از مقدار طبیعی $\Delta\omega/\omega$ است، که برای خط $2p \to 1s$ تقریباً برابر با 3×10^{-8} است. بنابراین، برای غلبه بر پهن‌شدگی دوپلری باید اتمها را سرد کرد. این کار با قرار دادن اتم در باریکهٔ لیزر انجام می‌شود. اتمی را در نظر بگیرید که در جهت مثبت z با سرعت

www.arsanjan.blogfa.com

v حرکت می‌کند. فرض کنید اختلاف انرژی بین دو تراز که بین آنها گذار انجام می‌شود $\hbar\omega_\circ$ و بسامد باریکهٔ لیزر (تکفام) ω باشد. ω را کمی متفاوت با $\omega_\circ$ می‌گیریم، و پارامتر واکوکی را به‌صورت $\delta = \omega - \omega_\circ < \circ$ تعریف می‌کنیم. اگر باریکهٔ لیزر در جهت مثبت z منتشر شود، اتم یک باریکه "می‌بیند" که به سرخ منتقل شده است زیرا به‌نظر می‌رسد که منشأ باریکه از اتم دور می‌شود. بنابراین، بسامدی که اتم می‌بیند $\omega(1 - v/c)$ است. در نتیجه، مقدار واکوکی باریکهٔ لیزر از بسامد تشدید برابر است با $\omega(1 - v/c) - \omega_\circ = \delta - \omega v/c$. چون $\delta < \circ$، مقدار این واکوکی بزرگتر از مقدار δ است، و احتمال جذب فوتونها کاهش می‌یابد، زیرا بسامد نوری که باید جذب شود روی منحنی تشدید در نقاط دورتر واقع می‌شود. از طرف دیگر، با یک باریکهٔ لیزر دیگر که در جهت منفی z منتشر می‌شود، واکوکی برابر است با $\omega(1 + v/c) - \omega_\circ = \delta + \omega v/c$، و در نتیجه بسامد نوری که باید جذب شود به قلهٔ تشدید نزدیکتر است (تشدید در $\omega v/c = |\delta|$ روی می‌دهد). بنابراین، احتمال جذب فوتون بزرگتر است. این نشان می‌دهد نیرویی در جهت منفی z بر اتم وارد می‌شود. اتم فوتون را بازگسیل می‌کند چون وامی‌پاشد، اما این گسیل در راستای خاصی صورت نمی‌گیرد و به‌طور متوسط تقارن کروی دارد.[۲] بدین‌ترتیب، اتم در راستای z تکانه از دست می‌دهد. اگر سه جفت لیزر با شدت یکسان در راستای محورهای x، y و z در جهتهای مخالف داشته باشیم، تمام درجات آزادی به‌حساب آورده می‌شوند.

برای اینکه بحث بالا را بیش از این کمی کنیم، نیروی فشار تابشی را که باریکه بر اتم وارد می‌کند محاسبه می‌کنیم. فرض می‌کنیم تنها با دو تراز اتم سروکار داریم. این تقریب خوبی است اگر بسامد میدان الکتریکی نوسانی به بسامد مربوط به برانگیزش از حالت پایه نزدیک باشد. آهنگ جذب تکانه‌ای با بزرگی $\hbar\omega/c$ عبارت است از

$$\begin{aligned} R &= \frac{2\pi}{\hbar}|\langle 1|e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}|0\rangle|^2\delta(E_1 - E_\circ - \hbar\omega) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2}|\langle 1|e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}|0\rangle|^2\delta(\omega_\circ - \omega) \end{aligned} \qquad (۲۹_۲۲)$$

که در آن عملگر گشتاور دوقطبی $e\mathbf{r}$ باعث گذار می‌شود. اکنون باید تابع دلتا را برای منظور کردن پهنای خط حالت برانگیختهٔ $|1\rangle$ تغییر دهیم، و بدین منظور از جانشانی زیر استفاده می‌کنیم (برای توجیه این کار به مبحث ویژهٔ ۴ مراجعه کنید)

$$\pi\delta(\omega_\circ - \omega) \to \frac{R/2}{(\omega_\circ - \omega)^2 + R^2/4} \qquad (۳۰_۲۲)$$

---

۲. فرض می‌کنیم شدت باریکهٔ لیزر چندان زیاد نیست، به‌طوری که برانگیختگی و واپاشی پسین رویدادهایی هستند که کاملاً از هم فاصله دارند. بعداً در این فصل مواردی را خواهیم دید که در آنها دستگاه بین حالت پایه و حالت برانگیخته به سرعت نوسان می‌کند. در این مورد، گسیل با برانگیزش همدوس است، و اطلاعات راستایی از بین نمی‌رود.

که در آن R آهنگ واپاشی خودبه‌خود در نبود میدان تابش به‌صورت زیر است

www.arsanjan.blogfa.com

$$F = \frac{\hbar\omega}{c}\,\frac{۲}{\hbar^۲}|\langle ۱|e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}|۰\rangle|^۲\frac{R/۲}{(\omega_۰-\omega)^۲+R^۲/۴} \qquad (۳۱_۲۲)$$

اکنون کمیت بی‌بعد زیر را معرفی می‌کنیم

$$I = \frac{|\langle ۱|e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}|۰\rangle|^۲}{(\hbar R/۲)^۲} \qquad (۳۲_۲۲)$$

که برحسب آن

$$F = \frac{\hbar\omega}{c}IR\frac{R^۲/۴}{(\omega_۰-\omega)^۲+R^۲/۴} \qquad (۳۳_۲۲)$$

برای یک میدان ضعیف، یعنی برای مقادیر کوچک I، این نیرو بسیار کوچک است. برای میدانهای بسیار شدید، یعنی برای مقادیر بزرگ I، واپاشیهای‌القایی واپاشیهای‌خودبه‌خود را تحت‌الشعاع قرار می‌دهند، و در این شرایط اتم بین حالت پایه و حالت برانگیخته به‌سرعت نوسان می‌کند.[۳] مخصوصاً، فوتونهای گسیل‌شده با فوتونهای جذب شده همدوس هستند، و از این‌رو اتم در مجموع هیچ تکانه‌ای جذب نمی‌کند. معلوم می‌شود که شدت بهینهٔ لیزر به‌گونه‌ای است که $I \approx ۱$.

برای اتمی که در همان جهت باریکه حرکت می‌کند یک واکوکی انتقال دوپلری اضافی وجود دارد به‌طوری که

$$F = \frac{\hbar\omega}{c}IR\left[\frac{R^۲/۴}{(\omega-\omega_۰-\omega v/c)^۲+R^۲/۴}\right] \qquad (۳۴_۲۲)$$

اکنون اگر یک باریکهٔ موج ایستاده در نظر بگیریم، یا معادل آن یک باریکهٔ لیزر با همان بسامد ω که در جهت منفی z انتشار می‌یابد اضافه کنیم، نیرویی در جهت مخالف، با بسامدی که به آبی منتقل شده است یعنی $\omega(۱+v/c)$، به‌دست می‌آوریم. بنابراین، نیروی برایند وارد بر باریکه عبارت است از

$$F_{\text{برایند}} = \frac{\hbar\omega IR}{c}\left[\frac{R^۲/۴}{(\omega-\omega_۰-\omega v/c)^۲+R^۲/۴}-\frac{R^۲/۴}{(\omega-\omega_۰+\omega v/c)^۲+R^۲/۴}\right]$$

۳. به‌بخش بعد مراجعه کنید.

www.arsanjan.blogfa.com

تا کمترین مرتبه برحسب v/c، به‌دست می‌آوریم

$$F_{\text{برایند}} = \hbar\omega IR/c^{۲}\frac{R^{۲}/۴}{(\omega-\omega_{۰})^{۲}+R^{۲}/۴}\frac{۴\omega(\omega-\omega_{۰})^{۲}}{(\omega-\omega_{۰})^{۲}+R^{۲}/۴}v$$
$$= \frac{\hbar\omega IR}{c^{۲}}\frac{R^{۲}/۴}{\delta^{۲}+R^{۲}/۴}\frac{۴\omega\delta}{\delta^{۲}+R^{۲}/۴}v \qquad (۳۵_۲۲)$$

از آنجا که $\delta < ۰$، یعنی بسامد لیزر اندکی پایین‌تر از قلهٔ تشدید $\omega_{۰}$ انتخاب شده است، این نیرو در جهت مخالف v است، یعنی یک نیروی مالشی به‌صورت $F_{\text{برایند}} = -\beta v$ است. این نیرو تابع مقدار واکوکی است، و بیشترین مقدار آن وقتی است که $dF/d\delta = ۰$، یعنی وقتی که $|\delta| = \omega_{۰} - \omega = R/۲\sqrt{۳}$. حرکت اتم در هر سه بعد باید کند شود، و برای این منظور از سه جفت لیزر استفاده می‌شود تا محیطی به‌وجود آید که معمولاً آن‌را ملاس نوری می‌نامند.

بنابراین، بیشینهٔ نیروی مالشی به‌ازای $I \approx ۱$ عبارت است از

$$F \approx -\sqrt{\frac{۲۷}{۴}}\frac{\hbar\omega_{۰}^{۲}}{c^{۲}}v \qquad (۳۶_۲۲)$$

به اتمها همچنین یک نیروی کاتوره‌ای نیز وارد می‌شود که ناشی از برخوردهای کاتوره‌ای با فوتونهایی است که باریکهٔ لیزر را می‌سازند. بنابراین، اتمها مانند ذراتی رفتار می‌کنند که در یک شاره دارای حرکت براونی هستند. تفصیل فرایند سرد کردن فراتر از اهداف این بحث است، اما پیش‌بینی استدلال نیمه‌کلاسیک بالا این است که اتمها تا دمایی که با رابطهٔ زیر داده می‌شود سرد می‌شوند

$$T = \frac{\hbar\omega}{kc}$$

که در آن k ثابت بولتزمن است. به‌طورکلی، این دما درگسترهٔ $۲ \times ۱۰^{-۴}\text{K}$ است. بررسی عمیقتر جزئیات فرایند، که در آن واگنی ترازهای برانگیخته و قطبش فوتونها به‌حساب آورده می‌شوند، نشان می‌دهد که باید بتوان اتمها را تا دمایی از مرتبهٔ $۴ \times ۱۰^{-۵}\text{K}$ سرد کرد، که با آنچه از آزمایش به‌دست آمده است توافق دارد.[۴] در واقع، با پیشرفتهای اخیر در تکنولوژی سرد کردن لیزری اتمها، دماهای اتمی $۷ \times ۱۰^{-۷}\text{K}$ حاصل شده‌اند. وقتی اتمها تا چنین دماهایی سرد می‌شوند، اندازه‌گیری پهنای خط طبیعی امکانپذیر می‌شود، و این تأثیر زیادی بر آزمون پیش‌بینیهای الکترودینامیک کوانتومی دارد.

---

۴. برای یک بحث مفصل غیرفنی به مقالهٔ زیر، که مراجع بسیاری در آن معرفی شده‌اند، مراجعه کنید
C N Cohen-Tannoudji and W D Phillips in *Phys Today*, 43(10), 33(1990).

www.arsanjan.blogfa.com

اتم دوترازی در میدان الکتریکی تکفام

دو حالت اتم مورد نظر را ویژه‌حالتهای یک هامیلتونی H_0 می‌گیریم:

$$H_0|\phi_1\rangle = E_1|\phi_1\rangle$$
$$H_0|\phi_0\rangle = E_0|\phi_0\rangle \qquad (۳۷_۲۲)$$

فرض می‌کنیم $E_1 > E_0$، و از نمادنگاری

$$\omega_a = (E_1 - E_0)/\hbar \qquad (۳۸_۲۲)$$

و $|\phi_1\rangle = |1\rangle$ و $|\phi_0\rangle = |0\rangle$ استفاده خواهیم کرد. اکنون این دستگاه دوترازی را در یک میدان الکتریکی قرار می‌دهیم. فرض کنید این میدان الکتریکی به‌اندازه‌ای قوی است که اثرات مرتبهٔ اول و دوم برحسب $\mathbf{E}$، برخلاف آنچه در بحث اثر اشتارک در فصل ۱۶ دیدیم، برای بررسی دستگاه کافی نیستند. بنابراین، از نظریهٔ اختلال استفاده نخواهیم کرد. در اینجا هامیلتونی به‌صورت زیر است

$$H = H_0 + V(t) \qquad (۳۹_۲۲)$$

که در آن، مانند سابق، داریم

$$V(t) = \frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{p} \qquad (۴۰_۲۲)$$

$\mathbf{p}$ عملگر تکانهٔ الکترون است، و در نتیجه

$$\mathbf{p} = \frac{im}{\hbar}[H_0, \mathbf{r}] \qquad (۴۱_۲۲)$$

همچنین، از تقریب دوقطبی استفاده می‌کنیم، به‌طوری که

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{A}_0^* e^{i\omega t} \qquad (۴۲_۲۲)$$

یعنی پتانسیل برداری در پهنای اتم ثابت است. این پتانسیل را برحسب میدان الکتریکی می‌نویسیم. از رابطهٔ

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}$$

www.arsanjan.blogfa.com

نتیجه می‌گیریم که $\mathbf{E}_0 = -(i\omega/c)\mathbf{A}_0$ و $\mathbf{E}_0^* = (i\omega/c)\mathbf{A}_0^*$. بنابراین،

$$V(t) = \frac{e}{\hbar\omega}(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - \mathbf{E}_0^* e^{i\omega t}) \cdot [H_0, \mathbf{r}] \qquad (۴۳_۲۲)$$

بدین‌ترتیب، هر عنصر ماتریس عملگر $V(t)$ به‌صورت زیر خواهد بود

$$\langle 0|V(t)|1\rangle = \frac{e}{\hbar\omega}(\langle 0|\mathbf{E}_0 E_0 - E_1)\{\cdot\mathbf{r}|1\rangle e^{-i\omega t} - \langle 0|\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{r}|1\rangle e^{i\omega t}\} \qquad (۴۴_۲۲)$$

اکنون جواب معادلهٔ شرودینگر وابسته به زمان را $|\psi(t)\rangle$ می‌گیریم. با استفاده از قضیهٔ بسط، مانند فصل ۲۱، می‌نویسیم

$$|\psi(t)\rangle = C_0(t)e^{-iE_0 t/\hbar}|0\rangle + C_1(t)e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle \qquad (۴۵_۲۲)$$

بنابراین، از

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t))|\psi(t)\rangle$$

و ۲۲ـ۴۵، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{d}{dt}C_0(t)e^{-iE_0 t/\hbar}|0\rangle + i\hbar\frac{d}{dt}C_1(t)e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle \\ &= V(t)C_0(t)e^{-iE_0 t/\hbar}|0\rangle + V(t)C_1(t)e^{-iE_1 t/\hbar}|1\rangle \end{aligned}$$

اگر عناصر ماتریس این معادله را به‌ترتیب با ضرب کردن در $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به‌دست آوریم، و با توجه به

$$\langle 0|\mathbf{r}|0\rangle = \langle 1|\mathbf{r}|1\rangle = 0 \qquad (۴۶_۲۲)$$

به دو معادلهٔ زیر می‌رسیم

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_0(t) = C_1(t)e^{-i\omega_{ad}t}\langle 0|V(t)|1\rangle \qquad (۴۷_۲۲)$$

و

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_1(t) = C_0(t)e^{i\omega_{ad}t}\langle 1|V(t)|0\rangle \qquad (۴۸_۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com

صورت گستردهٔ معادلهٔ ۲۲ـ۴۷

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_{\circ}(t)=\frac{\omega_d}{\omega}C_{\backslash}(t)\{-\langle\circ|e\mathbf{E}_{\circ}\cdot\mathbf{r}|\backslash\rangle e^{-i(\omega+\omega_d)t}+\langle\circ|e\mathbf{E}_{\circ}^{*}\cdot\mathbf{r}|\backslash\rangle e^{-i(\omega_d-\omega)t}\}$$

ما با وضعیتهای فیزیکیی کار خواهیم داشت که در آنها ω نزدیک به ω_d یا برابر با آن است. جملهٔ شامل $e^{-i(\omega_d+\omega)t}$ بسیار سریع نوسان می‌کند، و با میانگین‌گیری روی زمان سهمی به‌دست نمی‌دهد. مانند بحث تشدید پارامغناطیسی در فصل ۱۴، این‌گونه جمله‌ها را حذف می‌کنیم. این تقریب را غالباً تقریب موج چرخان می‌نامند. پس از حذف، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{d}{dt}C_{\circ}(t)&=\frac{\omega_d}{\omega}C_{\backslash}(t)\langle\circ|e\mathbf{E}_{\circ}^{*}\cdot\mathbf{r}|\backslash\rangle e^{-i(\omega_d-\omega)t}\\&\equiv\hbar\gamma C_{\backslash}(t)e^{-i(\omega_d-\omega)t}\end{aligned}\qquad(۴۹_۲۲)$$

که برحسب پارامتر واکوکی

$$\delta=\omega-\omega_d\qquad(۵۰_۲۲)$$

به‌صورت زیر درمی‌آید

$$i\hbar\frac{d}{dt}C_{\circ}(t)=\hbar\gamma C_{\backslash}\,e^{i\delta t}\qquad(۵۱_۲۲)$$

با همین تقریب، داریم

$$\begin{aligned}i\hbar\frac{d}{dt}C_{\backslash}(t)&=\frac{\omega_d}{\omega}C_{\circ}(t)\langle\backslash|e\mathbf{E}_{\circ}\cdot\mathbf{r})|\circ\rangle\;e^{i(\omega_d-\omega)t}\\&=\hbar\gamma C_{\circ}(t)e^{-i\delta t}\end{aligned}\qquad(۵۲_۲۲)$$

که در آن جملهٔ

$$\gamma=\frac{\omega_d}{\hbar\omega}\langle\circ|e\mathbf{E}_{\circ}^{*}\cdot\mathbf{r}|\backslash\rangle\qquad(۵۳_۲۲)$$

را می‌توان حقیقی گرفت. با مشتق‌گیری از ۲۲ـ۴۹ نسبت به زمان، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}C_{\circ}(t)&=\gamma\delta C_{\backslash}e^{i\delta t}-i\gamma\frac{d}{dt}C_{\backslash}(t)e^{i\delta t}\\&=i\delta\frac{d}{dt}C_{\circ}(t)-\gamma^{۲}C_{\circ}(t)\end{aligned}\qquad(۵۴_۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com

با یک جواب آزمونی به‌صورت

$$C_i(t) = e^{-i\Omega t} \qquad (۵۵_۲۲)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\Omega^۲ + \delta\Omega - \gamma^۲ = ۰ \qquad (۵۶_۲۲)$$

یا

$$\Omega = \Omega_\pm = -\frac{۱}{۲}\delta \pm \sqrt{\frac{۱}{۴}\delta^۲ + \gamma^۲} \qquad (۵۷_۲۲)$$

بنابراین، جواب عمومی به‌صورت زیر است

$$C_۰(t) = e^{i\delta t/۲}(A\ \cos\ \sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}t + B\ \sin\ \sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}t) \qquad (۵۸_۲۲)$$

و

$$\begin{aligned} C_۱(t) =& \frac{۱}{\gamma}e^{-i\delta t}\frac{d}{dt}C_۰(t) \\ =& -e^{-i\delta t/۲}\left\{\frac{\delta}{۲\gamma}(A\ \cos\ \sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}t + B\ \sin\ \sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}t)\right. \\ & \left. - i\frac{\sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}}{\gamma}(A\ \sin\ \sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}t - B\ \cos\ \sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}t)\right\} \end{aligned} \qquad (۵۹_۲۲)$$

اگر دستگاه در $t = ۰$ در حالت $|۰\rangle$ باشد، $C_۰(۰) = ۱$ و $C_۱(۰) = ۰$، و در نتیجه $A = ۱$ و $B = ۰$ $i\sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}\ B = (\delta/۲)A$، یعنی $B = -i\delta/۲\sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}$. بنابراین، در یک زمان بعد داریم

$$\begin{aligned} |C_۰(t)|^۲ &= \cos^۲\sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}\ t + \frac{\delta^۲}{\delta^۲ + ۴\gamma^۲}\sin^۲\sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}\ t \\ &= ۱ - \frac{۴\gamma^۲}{\delta^۲ + ۴\gamma^۲}\sin^۲\sqrt{\delta^۲/۴ + \gamma^۲}\ t \end{aligned} \qquad (۶۰_۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com

در مورد کوک کامل، $\delta = 0$، احتمال

$$|C_0(t)|^2 = \cos^2 \gamma t \qquad (۶۱_۲۲)$$

دستگاه با بسامد γ بین دو حالت نوسان می‌کند، و به‌طور متوسط نیمی از زمان را در حالت بالاتر و نیمی از زمان را در حالت پایینتر می‌گذراند. این بسامد در $\delta = 0$، یعنی وقتی $\omega = \omega_0$، برابر است با

$$\gamma = \frac{1}{\hbar}\langle 0|e\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{r}|1\rangle \qquad (۶۲_۲۲)$$

که بسامد رابی نامیده می‌شود. متذکر می‌شویم که $\mathbf{E}_0^+$ متناسب با $\mathbf{A}_0^+$ است، و از این‌رو هنگامی که حالت پایینتر $|0\rangle$ نیز n فوتون با بسامد ω داشته باشد آنگاه، بنابه ۲۲ـ۲، $\mathbf{E}_0^+$ متناسب با $\sqrt{n+1}$ است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\gamma = \sqrt{n+1}\,\gamma_0 \qquad (۶۳_۲۲)$$

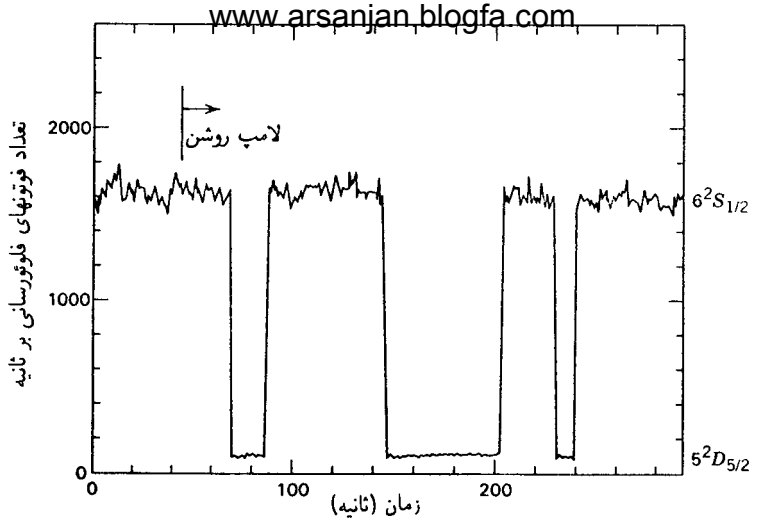
به‌آسانی می‌توان نشان داد که اگر حالت اولیهٔ دستگاه $|1\rangle$ باشد، و این حالت n فوتون با بسامد ω داشته باشد، آنگاه بسامد γ برابر است با $\sqrt{n}\gamma_0$.

بررسی اتمهای تک در یک کاواک که در آن تنها یک مد از میدان الکتریکی نوسانی موجود است با اختراع و ساخت دامهای بسامد رادیویی توسط ه دامله و همکارانش امکانپذیر شده است. نوسانهایی که معادلهٔ ۲۲ـ۶۱ پیش‌بینی می‌کند با آزمایش تأیید شده‌اند.

مشاهدهٔ جهشهای کوانتومی

اختراع دامهایی که در آنها یونهای تک را بتوان مطالعه کرد روشهای مختلف جدیدی را برای بررسی اتمها فراهم می‌آورد. یک نظر ابتکاری را ابتدا ه دامله مطرح کرد و چند گروه تجربی در دههٔ گذشته آن‌را مشاهده کردند. اصول آزمایش را در اینجا بیان می‌کنیم. یک دستگاه سه‌ترازی شامل حالت پایهٔ $|0\rangle$ و حالتهای برانگیختهٔ $|1\rangle$ و $|2\rangle$ را در نظر بگیرید. گذار بین حالتهای $|0\rangle$ و $|1\rangle$ مجاز است اما گذار بین حالتهای $|2\rangle$ و $|0\rangle$ ممنوع است (البته نه مطلقاً)، و در نتیجه حالت $|2\rangle$ شبه‌پایدار است. با یک چشمهٔ شدید نور (لیزر) که برای بسامد زاویه‌ای $\omega_{10} = (E_1 - E_0)/\hbar$ کوک شده است و همچنین یک چشمهٔ ضعیف نور که برای بسامد زاویه‌ای $\omega_{20} = (E_2 - E_0)/\hbar$ کوک شده است اتم را در معرض تابش قرار می‌دهیم. تعداد گذارهای میان حالت پایه و حالت برانگیختهٔ مجاز بسیار زیاد است. عملاً میدان قوی لیزری الکترون را با آهنگی بسیار تند به حالت $|1\rangle$ برانگیخته می‌کند، و الکترون نیز با آهنگی بسیار تند به حالت پایه افت می‌کند. بنابراین، یک علامت

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۲۲ـ۴ رد فلوئورسانی نوعی که جهشهای کوانتومی را نشان می‌دهد. در دوره‌های فلوئورسانی کم، اتم قطعاً در تراز شبه‌پایدار است.[۵]

پیوستهٔ نور گسیلیده از اتم مشاهده می‌شود. این دقیقاً نمود نوسان رابی است که در بخش قبل بررسی شد. گاهی لیزر ضعیف الکترون را به حالت $|۲\rangle$ برانگیخته می‌کند. چون الکترون اکنون در یک حالت شبه‌پایدار است، افت آن به حالت پایه ممکن است چند ثانیه طول بکشد. در این مدت فلوئورسانی روی نمی‌دهد، یعنی اتم تاریک است. وقتی الکترون سرانجام به حالت پایه فرو افتاد، میدان لیزری قوی بلافاصله آن‌را به حالت برانگیختهٔ مجاز برمی‌انگیزد، و الکترون به سرعت فرو می‌افتد، و بدین‌ترتیب باعث تداوم تابش فلوئورسان می‌شود. فلوئورسانی عملاً جهشهای کوانتومی بین حالت پایه و حالت شبه‌پایدار را دیدبانی می‌کند (شکل ۲۲ـ۴).

تحلیل سادهٔ این فرایند به‌صورت زیر است. فرض کنید $A_{۱۰}$، $B_{۱۰}$ و $A_{۲۰}$ و $B_{۲۰}$ به‌ترتیب ضرایب اینشتین برای گذارهایی باشند که $(۰,۱)$ و $(۰,۲)$ را به هم مربوط می‌کنند. شرایط مربوط به گذارها ایجاب می‌کنند که $A_{۲۰} \gg A_{۱۰}$. اگر چگالیهای انرژی باریکه‌های لیزر به‌ترتیب $U_۱$ و $U_۲$ باشند، معادلهٔ آهنگ احتمال اینکه اتم در حالت برانگیختهٔ $|۱\rangle$ باشد با فرض ناواگنی (و در نتیجه $g_i = ۱$) عبارت است از

$$\frac{dP_۱}{dt} = -P_۱(A_{۱۰} + B_{۱۰}U_۱) + B_{۱۰}U_۱P_۰ \qquad (۶۴ـ۲۲)$$

این معادله ائتلاف احتمال ناشی از گسیل خودبه‌خود و القایی و افزایش احتمال به واسطهٔ جذب

۵. اقتباس مجاز از
W Nagourney, J Sandberg and H Dehmelt, *Phys Rev Lett*, **56**, 2797, 1986.

www.arsanjan.blogfa.com

القایی از حالت پایه را توصیف می‌کند، با شرط اینکه در $t=0$ اتم با P_0 یعنی احتمال اینکه الکترون در حالت پایه باشد. به‌همین ترتیب، معادلهٔ آهنگ احتمال اینکه اتم در حالت شبه‌پایدار $|2\rangle$ باشد به‌صورت زیر است

$$\frac{dP_2}{dt} = -(A_{20} + B_{20}U_2)P_2 + B_{20}U_2P_0 \qquad (۶۵_۲۲)$$

مجموع احتمالها برابر با ۱ است: $P_0 + P_1 + P_2 = 1$. اگر باریکهٔ لیزری که حالت پایه را به حالت برانگیختهٔ $|1\rangle$ جفت می‌کند شدید باشد آنگاه $U_1 \to \infty$ و $P_0 = P_1$. بنابراین، اگر احتمال برانگیختگی به‌حالت شبه‌پایدار را با P_+ نشان دهیم $(P_+ = P_2)$ و احتمال عدم برانگیختگی به این حالت را با P_- نشان دهیم $(P_- = 1 - P_2 = P_0 + P_1)$، این معادله‌ها منجر می‌شوند به

$$\frac{dP_+}{dt} = -R_-P_+ + R_+P_- \qquad (۶۶_۲۲)$$

که در آن

$$\begin{aligned} R_+ &= \frac{1}{2}B_{20}U_2 \\ R_- &= A_{20} + B_{20}U_2 \end{aligned} \qquad (۶۷_۲۲)$$

معادلهٔ

$$\frac{dP_-}{dt} = R_-P_+ - R_+P_- \qquad (۶۸_۲۲)$$

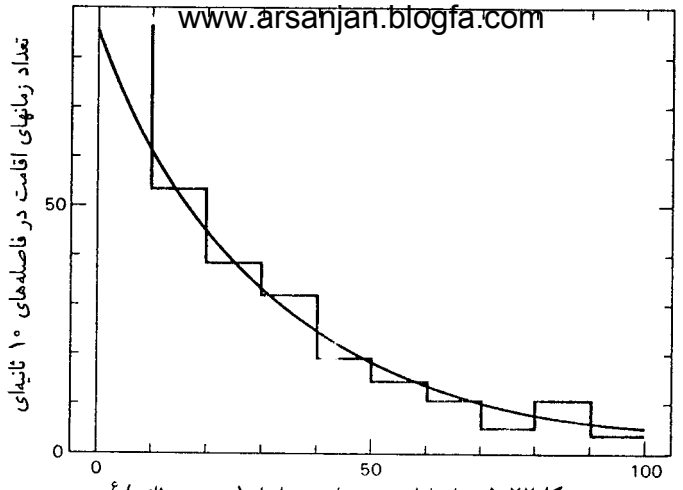
خودبه‌خود با توجه به $P_+ + P_- = 1$ به‌دست می‌آید. می‌توان این معادله‌ها را نمایشگر یک دستگاه دوترازی دانست که در آن آهنگ گذار به بالا R_+ و آهنگ گذار به پایین R_- است.

کمیتهایی که به لحاظ تجربی اهمیت دارند این احتمالها هستند که در بازهٔ زمانی t تا $t+T$ هیچ گذاری روی ندهد و در انتهای این بازه الکترون به حالت برانگیخته برود (P_{0+}) یا به حالت پایه(P_{0-}) . با کمی اندیشه می‌توان نتیجه گرفت که اگر آزمایش شروع شود و شدت باریکهٔ لیزر مستقل از زمان باشد، این احتمالها فقط تابع طول بازهٔ زمانی T هستند. معادله‌های آهنگ این احتمالها را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{dP_{0+}}{dT} = -R_-P_{0+} \qquad (۶۹_۲۲)$$

$$\frac{dP_{0-}}{dT} = -R_+P_{0-} \qquad (۷۰_۲۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۲۲ـ۵ زمان اقامت در تراز شبه‌پایدار (برحسب ثانیه).[۶]

"شرایط اولیه" برای این معادله‌ها ایجاب می‌کنند که $P_{0\pm}(T=0)$ را بدانیم. فرض کنید شدت فلوئورسانی در زمانی مانند t قطع شود. این زمان را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $T=0$، و در نتیجه $P_{0+}(T=0)=1$. جواب معادله با این شرط اولیه به‌صورت زیر است

$$P_{0+}(T)=e^{-R_-T} \qquad (۷۱_۲۲)$$

این احتمال آن است که پس از زمان T علامت هنوز "قطع" باشد. به‌همین ترتیب، می‌توان نشان داد که پس از برقرار شدن فلوئورسانی احتمال اینکه پس از بازهٔ زمان T هنوز برقرار باشد به‌صورت زیر است

$$P_{0-}(T)=e^{-R_+T} \qquad (۷۲_۲۲)$$

از تحلیل آماری توزیع زمانهای برقراری و قطع، مانند آنچه در شکل ۲۲ـ۵ نشان داده شده است، می‌توان برای اندازه‌گیری A_2 استفاده کرد. برای حالتهایی که عمر بسیار درازی دارند، اندازه‌گیری مستقیم A_2 بسیار مشکل است، زیرا آهنگ گسیل فوتونها بسیارکوچک است، و فوتونها می‌توانند در همهٔ راستاها گسیل شوند، و در نتیجه شمارش آنها فرایند بسیارکندی است.

باید توجه کرد که در مکانیک کوانتومی معمولاً با مجموعهٔ آماری بزرگی از دستگاههای یکسان سروکار داریم. در این مورد، یک اتم منفرد را بررسی می‌کنیم و به‌جای مجموعهٔ آماری این عضو

---

۶. اقتباس مجاز از

W Nagourney, J Sandberg, and H Dehmelt, *Phys Rev Lett*, **56**, 2297(1986), by permission.

www.arsanjan.blogfa.com

مجموعهٔ آماری را با شرایط اولیهٔ یکسان آماده کنیم. وقتی تابش به پیوستاری از حالتها گسیل می‌شود به‌طور کلی این کار امکانپذیر نیست، اما برای مورد خاص میدان الکتریکی تک‌مد امکانپذیر است.

اثر موسباؤر

یک اتم (یا هر دستگاه کوانتومی دیگر) می‌تواند مانند یک ساعت دقیق کار کند، زیرا گذارهای آن‌را تابشهایی اعلام می‌کنند که بسامدهای کاملاً معینی دارند. اگر پهنای طبیعی خط تنها محدودیت موجود بود، می‌توانستیم به دقت بسیار زیادی دست یابیم.

متأسفانه، چنانکه در بحث سرد کردن اتمها گفته شد، حرکت اتمها باعث پهن‌شدگی دوپلری خط می‌شود. شاید فکر کنید استفاده از یک چشمهٔ مایع یا جامد می‌تواند این اثر را حذف کند، اما آنگاه پهن‌شدگی ناشی از تأثیر اتمهای مجاور به همان اندازه مضر خواهد بود. گذارهای هسته‌ای را در نظر می‌گیریم. هسته‌ای مانند $_{۷۷}Ir^{۱۹۱}$ یک پرتو γ با انرژیی از مرتبهٔ $۱۰۰keV$، با طول عمر $۱۰^{-۱۰}s$، گسیل می‌کند. در این مورد،

$$\frac{\Delta\omega}{\omega}=\frac{\Delta E}{E}=\frac{\hbar/\tau}{E}\cong\frac{۱۰^{-۲۷}/۱۰^{-۱۰}}{۱۰^{۵}\times ۱٫۶\times ۱۰^{-۱۲}}\simeq ۰٫۶\times ۱۰^{-۱۰} \qquad (۷۳_۲۲)$$

متأسفانه یک جابه‌جایی خط ناشی از پس‌زنی وجود دارد. پرتو γ حامل تکانهٔ $\hbar\omega/c$ است، و هسته برای پایستگی تکانه باید با همین تکانه پس بزند. این پس‌زدن با انرژی پس‌زنی

$$\Delta E=\frac{P_{\text{پس‌زنی}}^{۲}}{۲M}=\frac{۱}{۲M}\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^{۲} \qquad (۷۴_۲۲)$$

و در نتیجه با کاهش انرژی تابش‌شده همراه است. تغییر نسبی بسامد برابر است با

$$\frac{\Delta E}{\hbar\omega}\simeq\frac{\hbar\omega}{۲Mc^{۲}}\simeq\frac{۱۰^{-۱}(\text{MeV})}{۲\times ۹۴۰\times ۱۹۱(\text{MeV})}\simeq ۳\times ۱۰^{-۷} \qquad (۷۵_۲۲)$$

مشاهدهٔ تابشی با این انرژی را نمی‌توان با روشهای مرسوم، اگرچه بسیار دقیق‌اند، انجام داد بلکه باید از آشکارسازی استفاده کرد که دقیقاً برای این تابش "کوک" شده باشد. این کار به بهترین نحو با استفاده از همان مادهٔ گسیلنده (مثلاً $_{۷۷}Ir^{۱۹۱}$) به‌عنوان جاذب تابش صورت می‌گیرد. جذب در بسامد "تشدید" که در آن تابش گسیل شده است به مقدار بسیار زیادی تقویت می‌شود، اما در اینجا نیز جابه‌جایی پس‌زنی وجود خواهد داشت. بنابراین، جابه‌جایی کل برابر است با $\Delta\omega/\omega\simeq ۶\times ۱۰^{-۷}$. بدین‌ترتیب، این "کوک دقیق" کارایی ندارد، زیرا خط به‌اندازه‌ای بیشتر

www.arsanjan.blogfa.com

از پهنای خود، که از مرتبهٔ $\omega \sim ۱۰^{۱۰}$ است، جابه‌جا می‌شود. می‌توان این پس‌زدن را با حرکت دادن گسیلنده با سرعت پس‌زنی جبران کرد. این سرعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{v}{c} = \frac{P_{\text{پس‌زنی}}}{Mc} = \frac{\hbar\omega/c}{Mc} = ۲\frac{\hbar\omega}{۲Mc^۲} \simeq ۶ \times ۱۰^{-۷} \qquad (۷۶_۲۲)$$

یعنی $v = ۱٫۶ \times ۱۰^۴ \text{cm/s}$. این مقدار نشاندهندهٔ مشکلات فنی است، اما با یک دستگاه فرامرکز گریز تحقق یافته است.

یک پیشرفت بزرگ با کشف موسباؤر در سال ۱۹۵۸ روی داد: در شرایط خاصی احتمال زیادی برای گسیل بدون پس‌زنی وجود دارد. البته گسیل همیشه با پس‌زدن همراه است، اما به‌جای هسته قسمت بزرگی از بلور که هسته در آن قرار دارد پس می‌زند. چون جرم بلور $۱۰^{۲۲}$ بار بیشتر از جرم هسته است، انرژی پس‌زنی کاملاً قابل چشمپوشی است. برای اینکه درکی شهودی از آنچه روی می‌دهد به‌دست آوریم، فرض می‌کنیم هسته در یک چاه نوسانگر هماهنگ، با بسامد مشخصهٔ $\omega_۰$، حرکت می‌کند. ترازهای نوسانگر عبارت‌اند از

$$E_n = \hbar\omega_۰ \left(n_x + n_y + n_z + \frac{۳}{۲}\right) \qquad (۷۷_۲۲)$$

این چاه هماهنگ در واقع یک توصیف تقریبی از نیروهای بلوریی است که خواص شبکه را تعیین می‌کنند. اگر نیروهایی که هسته را به همسایه‌هایش می‌پیوندد قوی باشند ــ اگر "فنرها" سفت باشندــ آنگاه $\omega_۰$ بزرگ است؛ اگر "فنرها "نرم باشند، $\omega_۰$ کوچک است. فاصلهٔ ترازها برای "فنر سفت "زیاد است، یعنی چگالی حالتهای آن کوچک است، در حالی‌که چگالی حالت برای "فنر نرم "بزرگ است. اکنون به بررسی عنصر ماتریس مربوط به گذار از حالت هسته‌ای $\Psi_i(\mathbf{r}_۱, \mathbf{r}_۲, \ldots, \mathbf{r}_N)$ به‌حالت هسته‌ای $\Psi_f(\mathbf{r}_۱, \mathbf{r}_۲, \ldots, \mathbf{r}_N)$ می‌پردازیم، و برهم‌کنش را به‌صورت

$$-\frac{e}{Mc}\sum_{\text{پروتونها}} \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{A}_k(\mathbf{r}_k, t) \qquad (۷۸_۲۲)$$

می‌گیریم. عنصر ماتریس مزبور متناسب است با

$$-\frac{e}{Mc}\int\cdots\int d^۳\mathbf{r}_۱, \ldots, d^۳\mathbf{r}_N \Psi_f^*(\mathbf{r}_۱, \ldots, \mathbf{r}_N)\sum_k \boldsymbol{\epsilon}\cdot\mathbf{p}_k\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_k}\Psi_i(\mathbf{r}_۱, \ldots, \mathbf{r}_N) \qquad (۷۹_۲۲)$$

اگر مختصهٔ مرکز جرم $\mathbf{R} = (۱/N)\sum_i \mathbf{r}_i$ را وارد کنیم آنگاه (الف) جملهٔ برهم‌کنش به‌صورت

www.arsanjan.blogfa.com

زیر درمی‌آید

$$-\frac{e}{Mc}e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{R}}\sum_{\text{پروتونها}}\epsilon\cdot\mathbf{p}_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\rho_k} \qquad (۸۰_۲۲)$$

که در آن $\boldsymbol{\rho}_i=\mathbf{r}_i-\mathbf{R}$، و (ب) تابع موج هسته به حاصلضربی که حرکت داخلی و حرکت مرکز جرم هسته را در پتانسیل هماهنگ توصیف می‌کند تجزیه می‌شود:

$$\Psi(\mathbf{r}_1,\ldots,\mathbf{r}_N)=\psi_{n_xn_yn_z}(\mathbf{R})\phi(\boldsymbol{\rho}_1,\ldots,\boldsymbol{\rho}_{N-1}) \qquad (۸۱_۲۲)$$

با جاگذاری در ۲۲ـ۷۹ به‌دست می‌آوریم

$$-\frac{e}{Mc}\int d^3\mathbf{R}\psi^*_{nf}(\mathbf{R})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_{ni}(\mathbf{R}) \qquad (۸۲_۲۲)$$

$$\times\int d^3\boldsymbol{\rho}_1,\ldots,d^3\boldsymbol{\rho}_{N-1}\phi^*_f(\boldsymbol{\rho}_1,\ldots,\boldsymbol{\rho}_{N-1})\sum_{\text{پروتونها}}\epsilon\cdot\mathbf{p}_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\rho_k}\phi_i(\boldsymbol{\rho}_1,\ldots,\boldsymbol{\rho}_{N-1})$$

بنابراین، می‌توان عنصر ماتریس را به‌صورت زیر نوشت

$$M=M_{\text{داخلی}}\int d^3\mathbf{R}\psi^*_{nf}(\mathbf{R})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_0(\mathbf{R}) \qquad (۸۳_۲۲)$$

که در آن قرار داده‌ایم $n_i=0$، زیرا هسته در ابتدا در حالت پایهٔ شبکه است. احتمال اینکه گذار تابشی هسته را در حالت پایهٔ شبکه باقی بگذارد عبارت است از

$$P_0(k)=\frac{|M_{\text{داخلی}}|^2\left|\int d^3\mathbf{R}\psi^*_0(\mathbf{R})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_0(\mathbf{R})\right|^2}{|M_{\text{داخلی}}|^2\sigma_{nf}\left|\int d^3\mathbf{R}\psi^*_{nf}(\mathbf{R})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_0(\mathbf{R})\right|^2} \qquad (۸۴_۲۲)$$

$$=\left|\int d^3\mathbf{R}\psi^*_0(\mathbf{R})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\psi_0(\mathbf{R})\right|^2$$

که در آن حاصل‌جمع در مخرج کسر را، با استفاده از رابطهٔ کاملیت، برابر با ۱ قرار داده‌ایم.[۷] برای

۷. اثبات صوری از همه سریعتر است. داریم

$$\sum_{nf}|\langle n_f|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}|0\rangle|^2=\sum_{nf}\langle 0|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}|n_f\rangle\langle n_f|e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}|0\rangle$$

با توجه به $\sum|n_f\rangle\langle n_f|=1$. به‌دست می‌آوریم $=\langle 0|e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}|0\rangle=1$.

www.arsanjan.blogfa.com

محاسبهٔ این احتمال، از تابع موج حالت پایهٔ بهنجارشدهٔ نوسانگر استفاده می‌کنیم. در فصل ۷ برای تابع موج حالت پایهٔ یک‌بعدی به‌دست آوردیم

$$\psi_{\circ}(x) = \left(\frac{m\omega_{\circ}}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega_{\circ}x^{2}/2\hbar}$$

بنابراین، در سه بعد داریم

$$\psi_{\circ}(R) = \psi_{\circ}(x)\psi_{\circ}(y)\psi_{\circ}(z) = \left(\frac{m\omega_{\circ}}{\pi\hbar}\right)^{3/4} e^{-m\omega_{\circ}\mathbf{R}^{2}/2\hbar} \qquad (۸۵_۲۲)$$

پس باید کمیت زیر را محاسبه کنیم

$$\left|\left(\frac{M_N\omega_{\circ}}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \int d^{3}\mathbf{R}\, e^{-M_N\omega_{\circ}\mathbf{R}^{2}/\hbar} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}}\right|^{2}$$

که در آن M_N جرم هسته است. می‌نویسیم

$$\begin{aligned} P_{\circ} &= \left(\frac{M_N\omega_{\circ}}{\pi\hbar}\right)^{3} \left| \int d^{3}\mathbf{R}\, e^{-(M_N\omega_{\circ}/\hbar[\mathbf{R}+i\mathbf{k}(\hbar/2M_N\omega_{\circ}]^{2}} e^{-k^{2}\hbar/4M_N\omega_{\circ}} \right|^{2} \\ &= e^{-\hbar k^{2}/2M_N\hbar\omega_{\circ}} \\ &= e^{-(\text{فاصلهٔ تراز})/(\text{انرژی پس‌زنی})} \end{aligned} \qquad (۸۶_۲۲)$$

زیرا $P_{\text{پس‌زنی}} = \hbar k$، و $\hbar\omega_{\circ}$ فاصلهٔ تراز در شبکه است. بنابراین، اگر فاصلهٔ تراز بزرگ باشد، یعنی یک فنر سفت داشته باشیم، گسیل بدون پس‌زنی محتمل‌تر می‌شود. الگویی که در اینجا برای شبکه به‌کار بردیم، که در آن هر هسته در پتانسیل هماهنگ خودش حرکت می‌کند، الگوی شبکهٔ اینشتین است، و بسامد $\omega_{\circ}$ بسامد دبی است، و از این‌رو باید به‌جای $\omega_{\circ}$ در واقع ω_D را به‌کار می‌بردیم، که رابطهٔ آن با دمای دبی T_D به‌صورت زیر است

$$\hbar\omega_D = kT_D \qquad (۸۷_۲۲)$$

یک بررسی دقیقتر با استفاده از الگوی دبی برای توصیف شبکه تنها نما را به‌اندازهٔ ضریب ۳/۲ تغییر می‌دهد.

www.arsanjan.blogfa.com

کاملاً درست نیست که بگوییم ... این است که در یک زمان τ برابر با طول عمر گذار ($\tau \simeq ۱٫۴ \times ۱۰^{-۷}$s برای $Fe^{۵۷}$) تنها یک ناحیه از بلور با اندازهٔ زیر پس‌زنی را جذب می‌کند

$$L = v_s \tau$$

که در آن v_s سرعت انتشار آشفتگی (یعنی سرعت صوت) در شبکه است. اما براورد درستی از v_s از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$v_s \simeq \frac{a\omega_D}{۲\pi}$$

که در آن a ثابت شبکه است. بنابراین،

$$\frac{L}{a} \simeq \frac{\omega_D \tau}{۲\pi}$$

و با $\omega_D \simeq ۱۰^{۱۳}$s، تعداد هسته‌های جذب‌کنندهٔ پس‌زنی، که از مرتبهٔ $(L/a)^۳$ است، باز هم بسیار زیاد است.

با استفاده از براوردهای بالا، همراه با رابطهٔ عدم قطعیت، می‌توان نشان داد که نمی‌توان تعیین کرد که این یک هستهٔ منفرد است که "واقعاً" پس می‌زند یا نه؟ برای اندازه‌گیری انرژی پس‌زنی $\hbar k^۲/۲M_N$ به زمانی از مرتبهٔ زیر احتیاج داریم

$$\Delta t \gg \frac{\hbar}{(\hbar^۲ k^۲/۲M_N)}$$

شرط روی دادن اثر موسباؤر این است که

$$\frac{\hbar^۲ k^۲}{۲M_N} < \hbar\omega_D$$

در نتیجه، به‌دست می‌آوریم

$$\Delta t \gg \frac{۱}{\omega_D}$$

www.arsanjan.blogfa.com

در این مدت، آشفتگی فاصلهٔ زیر را طی می‌کند

$$d \simeq v_s \Delta t \sim \frac{a\omega_D}{2\pi} \Delta t \gg \frac{a}{2\pi}$$

که چندین هسته را دربرمی‌گیرد.

این سؤال پیش می‌آید که چگونه با استفاده از حالتهای انرژی هسته در شبکهٔ بلور می‌توان مسئلهٔ پس‌زنی و پایستگی تکانه را حل کرد؟ درکجای این رهیافت گفته می‌شود که بلور تکانه را جذب می‌کند؟ جواب کوانتوم‌ـمکانیکی این است که اگر بخواهیم دربارهٔ تکانه صحبت کنیم باید در نمایش تکانه کار کنیم. اما این روش پیچیده است، زیرا توصیف نیروهای بلور در این نمایش مشکل است. آنچه باید انجام داد تجزیهٔ حرکت بلور ــ بلور در واقع تعدادی نوسانگر است که "فنرهای" هر یک از آنها همسایگان مجاورش هستند ــ به مدهای بهنجار و کوانتیده کردن اینهاست. کوانتومهای حرکت شبکه، مانسته‌های فوتون، را فونون می‌نامند. بنابراین، گسیل بدون پس‌زنی به‌معنای گذاری است که در آن فونون گسیل نمی‌شود. فرمول حاصل بسیار شبیه به ۲۲ـ۸۶ است. در این شرایط، پهن‌شدگی ناشی از پس‌زنی در مقایسه با پهنای طبیعی خط بینهایت کوچک است. باز هم یک پهن‌شدگی دوپلری ناشی از حرکت گرمایی وجود خواهد داشت، اما این مشکل را می‌توان با سرد کردن گسیلنده و جاذب چاره کرد.

گسیلنده‌های بدون پس‌زنی یک ساعت عالی در اختیار ما می‌گذارند، و تحقیقات با استفاده از اثر موسباؤر در بسیاری از زمینه‌ها، مانند فیزیک حالت جامد و شیمی، صورت می‌گیرند. در اینجا تنها یک کاربرد، اندازه‌گیری زمینی انتقال به سرخ گرانشی، را بیان می‌کنیم. بنابه اصل هم‌ارزی، اگر فوتونی به‌اندازهٔ x سقوط کند، انتقال بسامد آن عبارت است از

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{gx}{c^2} \qquad (۲۲\text{ـ}۸۸)$$

این انتقال را می‌توان با پس‌زنی جاذب با سرعت v، که از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود، جبران کرد

$$v^2 = 2gx \qquad (۲۲\text{ـ}۸۹)$$

(اگر فوتون و جاذب با هم سقوط آزاد می‌کردند، جذب تشدیدی روی می‌داد.) اگر جاذب یا چشمه را به نوسان سریع درآوریم ــ با استفاده از یک مبدل ــ و منحنی جذب را به این نوسانها ارتباط دهیم، می‌توانیم انتقال گرانشی را وارسی کنیم. چون سرعت، برای فاصلهٔ $x = 20\,\mathrm{m}$، از مرتبهٔ $20\,\mathrm{m/s}$ است، این آزمایش شدنی است، و چندین گروه آن‌را انجام داده‌اند. با توجه به خطاهای آزمایش، این اثر تأیید شده است. به‌عنوان مثال، برای Fe^{57} انتقال پیش‌بینی شده برابر است با $\Delta\omega/\omega = 4{,}92 \times 10^{-15}$، و مقدار تجربی که پوند و ربکا به‌دست آورده‌اند

www.arsanjan.blogfa.com

$(۵٫۱۳ \pm ۰٫۵۱) \times ۱۰^{-۱۵}$ است. این بهای بسیار بزرگی برای بسامدهای انرژی پرتو γی گسیل‌شده از $Fe^{۵۷}$ واقع بر یک میزچهٔ چرخان اندازه‌گیری شده است باز هم نتایجی در تأیید اصل هم‌ارزی به‌دست داده است.

مراجع

بحث مناسبی دربارهٔ نظریهٔ کوانتومی نور، با کاربرد آن در لیزرها، را می‌توان در کتاب زیر یافت

R Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

برای مبحث اثر موسباؤر مراجعه کنید به

H Lipkin, *Quantum Mechanics-New Approaches to Selected Topics*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

www.arsanjan.blogfa.com

۲۳

نظریهٔ برخورد

کاوش در ساختار اتمی و مولکولی تا حد زیادی از طریق طیف نمایی انجام شده است. اگر بخواهیم نیروهای هسته‌ای و قانونهای حاکم بر برهم‌کنشهای ذرات بنیادی را درک کنیم، تنها روش موجود استفاده از پراکندگی ذرات گوناگون از هدفهای مختلف است. به‌یک معنا، طیف نمایی نیز صورتی از "پراکندگی" است. اتم در حالت پایه با پرتابه‌ای (که می‌تواند الکترون در لامپ تخلیه باشد) یا با برخورد با ذرات دیگر هدف (مثلاً در گرم کردن گاز) برانگیخته می‌شود، و سپس با بازگشت اتم به حالت پایه یا افت آن به یک حالت برانگیختهٔ دیگر یک فوتون خروجی مشاهده می‌شود. معمولاً این فرایندها را "برخورد "نمی‌نامیم زیرا اتم ترازهای انرژی کاملاً معینی دارد که برای زمانهای بسیار طولانیتر از زمان برخورد در آنها توقف می‌کند،[۱] و در نتیجه می‌توان "واپاشی" را از فرایند برانگیزش متمایز کرد. مخصوصاً، مشخصه‌های واپاشی به مد خاص برانگیختگی حساس نیستند. هسته و ذرات بنیادی نیز دارای ترازهای انرژی هستند، اما معمولاً طول عمر آنها به‌اندازهٔ کافی زیاد نیست که بتوان تفکیک به برانگیختگی و واپاشی را تضمین کرد، به‌خصوص چون همراه با پراکندگی "تشدیدی" یک پراکندگی غیرتشدیدی "زمینه" نیز وجود دارد، و جدا کردن این دو از هم گاهی پیچیده است. بنابراین، در این فصل فرایند را به‌طور کلی بررسی خواهیم کرد.

---

۱. یادآوری می‌کنیم که طول عمر حالت $2p$ در هیدروژن $۱٫۶ \times ۱۰^{-۹}$s است، که در مقایسه با زمان مشخصهٔ $a_۰/\alpha c \simeq ۲ \times ۱۰^{-۱۷}$s بسیار بزرگ است.

www.arsanjan.blogfa.com

سطح مقطع برخورد

بهترین راه بررسی پراکندگی فرمولبندی کردن معادله‌هایی است که آنچه را روی می‌دهد به‌دقت توصیف کنند: یک ذرهٔ فرودی که با یک بستهٔ موج توصیف می‌شود به هدف نزدیک می‌شود. این بستهٔ موج باید از لحاظ فضایی بزرگ باشد، و از این‌رو در طی آزمایش به‌طور محسوسی پخش نمی‌شود، و باید در مقایسه با ذرهٔ هدف بزرگ اما در مقایسه با ابعاد آزمایشگاه کوچک باشد، یعنی نباید هدف و آشکارساز را به‌طور همزمان بپوشاند. در واقع، اندازه‌های جانبی را پهنای باریکه در شتابدهنده تعیین می‌کند. سپس برهم‌کنش با هدف روی می‌دهد، و در نهایت دو بستهٔ موج خواهیم دید: یکی همچنان در جهت جلو حرکت می‌کند و قسمت ناپراکندهٔ باریکه را نشان می‌دهد، و دیگری که تحت یک زاویه دور می‌شود نمایشگر ذرات پراکنده است. تعداد ذراتی که به‌ازای واحد شار فرودی در واحد زمان به درون یک زاویهٔ فضایی پراکنده می‌شوند بنابه تعریف سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی است. این رهیافت را مستقیماً به‌کارنمی‌بریم[۲] ، و به‌جای آن از بعضی از مطالب فصل ۱۰ برای تعیین سطح مقطع دیفرانسیلی استفاده خواهیم کرد. اما به هنگام تعبیر نتایج صوری مفهوم بستهٔ موج را در نظر خواهیم داشت.

در بحث جوابهای پیوستاری معادلهٔ شرودینگر در فصل ۱۰ نتیجه گرفتیم که (الف) جواب معادلهٔ شرودینگر در غیاب پتانسیل به‌صورت موج تخت $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ است که شار زیر را توصیف می‌کند

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) = \frac{\hbar k}{m} \qquad (۱_۲۳)$$

اگر راستای $\mathbf{k}$ را محور z بگیریم، می‌توانیم رفتار این جواب به‌ازای مقادیر بزرگ r را به‌صورت مجموعی از امواج کروی ورودی و خروجی بنویسیم (به ۱۰ـ۷۲ مراجعه کنید):

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \Rightarrow \frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} - \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (۲_۲۳)$$

(ب) پایستگی ذرات به این نتیجه منجر می‌شود که وجود یک پتانسیل شعاعی تنها می‌تواند $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ را به تابعی تغییر دهد که صورت مجانبی آن عبارت است از

$$\psi(\mathbf{r}) \Rightarrow \frac{i}{2k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l\left[\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} - S_l(k)\frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r}\right]P_l(\cos\theta) \qquad (۳_۲۳)$$

---

۲. برای ملاحظهٔ بحث جالبی با استفاده از این رهیافت به مقالهٔ زیر، که از لحاظ ریاضی در سطح این کتاب است، مراجعه کنید:

R Hobbie, *American Journal of Physics*, **30**, 857, 1962.

www.arsanjan.blogfa.com

که در آن[۳]

$$|S_l(k)| = ۱ \qquad (۴_۲۳)$$

صورت مجانبی ۲۳ـ۳ را می‌توان با استفاده از ۲۳ـ۲ تبدیل کرد به

$$\psi(\mathbf{r}) \Rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \left[\sum_{l=۰}^{\infty}(۲l+۱)\frac{S_l(k)-۱}{۲ik}P_l(\cos\,\theta)\right]\frac{e^{ikr}}{r} \qquad (۵_۲۳)$$

که یک موج تخت به علاوهٔ یک موج کروی خروجی را نان می‌دهد. توجه کنید که با معادلهٔ عملاً تک‌ذره‌ای شرودینگر کارمی‌کنیم، و در نتیجه m جرم کاهیده است و θ عبارت است از زاویه، در دستگاه مرکز جرم، میان راستای $\mathbf{k}$ (محور z) و نقطهٔ مجانبی $\mathbf{r}$ که شمارشگر احتمالاً در آنجا قرار دأده می‌شود. وقتی هدف بسیار سنگینتر از پرتابه است، تفاوتی میان زاویهٔ آزمایشگاه و زاویهٔ مرکز جرم وجود ندارد. همچنین توجه کنید که می‌توانستیم جوابی به‌صورت یک موج تخت به‌علاوهٔ یک موج کروی ورودی بسازیم، زیرا می‌توان جملهٔ اول در ۲۳ـ۳ را با ضریبی که در ۲۳ـ۴ صدق کند تغییر داد. اما جوابی که پراکندگی را توصیف می‌کند باید شامل موج خروجی باشد. اکنون شار مربوط به جواب مجانبی ۲۳ـ۵ را محاسبه می‌کنیم. می‌نویسیم

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{۲im}\left\{\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right]^{*}\boldsymbol{\nabla}\left[e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\right] - \text{همیوغ مختلط}\right\} \qquad (۶_۲۳)$$

$f(\theta)$ در این رابطه عبارت است از

$$f(\theta) = \sum_{l=۰}^{\infty}(۲l+۱)f_l(k)P_l(\cos\,\theta) \qquad (۷_۲۳)$$

که در آن

$$f_l(k) = [S_l(k)-۱]/۲ik \qquad (۸_۲۳)$$

---

۳. بحث پس از ۱۰ـ۸۹ را ببینید. $S_l(k)$ نمادنگاری متعارف برای $e^{۲i\beta_l(k)}$ است که در ۱۰ـ۸۸ تعریف شده است.