www.arsanjan.blogfa.com

فیزیک کوانتومی

استیون گاریوودیچ

ترجمه محی الدین شیخ الاسلامی

www.arsanjan.blogfa.com

فیزیک کوانتومی

استیون گازیورووویچ

ترجمهٔ محی‌الدین شیخ‌الاسلامی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

www.arsanjan.blogfa.com

Quantum Physics
Stephen Gasiorowicz
Second Edition
John Wiley & Sons, 1996

فیزیک کوانتومی
تألیف استیون گازیورو ویچ
ترجمهٔ محی‌الدین شیخ‌الاسلامی
ویراستهٔ دکتر منیژه رهبر
نسخه‌پرداز: زهرا رحیمدل قادر
حروفچین: پروین حاج اسماعیل زنجانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۷۸
چاپ پنجم ۱۳۸۴
تعداد ۴۰۰۰
چاپ: محمدامین
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

گازیورو ویچ، استیون، ۱۹۲۸ - Gasiorowicz, Stephen
فیزیک کوانتومی / استیون گازیورو ویچ؛ ترجمهٔ محی‌الدین شیخ‌الاسلامی؛ ویراستهٔ منیژه رهبر ــ تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۸.
چهار، ۵۹۹ ص. : مصور، جدول، نمودار. ــ (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۹۵۲. فیزیک؛ ۸۷)
ISBN 964-01-0952-5

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
عنوان اصلی: Quantum Physics, 2nd ed. 1996.
این کتاب با ناشران و مترجمان مختلف در سالهای متفاوت نیز منتشر شده است.
واژه‌نامه.
کتابنامه.
نمایه.
چاپ پنجم: ۱۳۸۴.
۱.کوانتوم. الف. شیخ‌الاسلامی، محی‌الدین، مترجم. ب. مرکز نشر دانشگاهی. ج. عنوان.
۹ف۲گ/۱۲/QC۱۷۴ ۵۳۰/۱۲
کتابخانهٔ ملی ایران ۱۵۵۰۶ - ۷۸م

www.arsanjan.blogfa.com

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار ویرایش اول	۱
پیشگفتار ویرایش دوم	۳
۱. محدودیتهای فیزیک کلاسیک	۵
۲. بسته‌های موج و رابطه‌های عدم قطعیت	۳۶
۳. معادلهٔ موج شرودینگر و تعبیر احتمالاتی	۵۳
۴. ویژه‌تابعها و ویژه‌مقدارها	۶۹
۵. پتانسیلهای یک‌بعدی	۹۴
۶. ساختار کلی مکانیک موجی	۱۴۴
۷. روشهای عملگری در مکانیک کوانتومی	۱۶۵
۸. دستگاههای N ذره‌ای	۱۸۶
۹. معادلهٔ شرودینگر در سه‌بعد (۱)	۲۰۵
۱۰. معادلهٔ شرودینگر در سه‌بعد (۲)	۲۱۵
۱۱. تکانهٔ زاویه‌ای	۲۴۰
۱۲. اتم هیدروژن	۲۶۰
۱۳. برهم‌کنش الکترون با میدان الکترومغناطیسی	۲۷۵
۱۴. عملگرها، ماتریسها، و اسپین	۳۰۱
۱۵. جمع تکانه‌های زاویه‌ای	۳۲۴
۱۶. نظریهٔ اختلال مستقل از زمان	۳۴۱
۱۷. اتم هیدروژن واقعی	۳۵۸
۱۸. اتم هلیم	۳۷۴

www.arsanjan.blogfa.com

عنوان	صفحه
۱۹. ساختار اتمها	۳۹۴
۲۰. مولکولها	۴۱۲
۲۱. تابش اتمی	۴۳۴
۲۲. مباحث برگزیده در نظریهٔ تابش	۴۶۶
۲۳. نظریهٔ برخورد	۴۹۳
۲۴. جذب تابش در ماده	۵۲۸
پیوست الف: انتگرال فوریه و توابع دلتا	۵۴۳
پیوست ب: عملگرها	۵۵۰
مبحث ویژهٔ ۱: سینماتیک نسبیتی	۵۵۷
مبحث ویژهٔ ۲: عملگر چگالی	۵۶۲
مبحث ویژهٔ ۳: تقریب ونتزل-کرامرز-بریلوئن	۵۶۹
مبحث ویژهٔ ۴: طول عمر، پهنای خط، و تشدید	۵۷۳
ثابتهای فیزیکی	۵۸۲
مراجع	۵۸۳
فهرست راهنما	۵۹۰

www.arsanjan.blogfa.com

پیشگفتار ویرایش اول

این کتاب را می‌توان درآمدی بر فیزیک کوانتومی دانست. در نگارش آن، چند نکته را به‌عنوان راهنما در نظر داشته‌ام.

۱. پیش از هر چیز، برای ایجاد درک شهودی در هر رشتهٔ جدیدی بهتر است که مطالعهٔ آن با مبنایی از شناخت مشروح دستگاههای ساده شروع شود. به همین دلیل، تعدادی از مسائل را با تفصیل بسیار حل کرده‌ام، به‌طوری که بینش حاصل از آن‌را می‌توان برای دستگاههای پیچیده‌تر به‌کار برد.

۲. هر جنبه‌ای از مکانیک کوانتومی در درک دست‌کم یکی از پدیده‌های فیزیکی مفید بوده است. در هر مرحله از شرح و بسط موضوع، روی کاربردها تأکید کرده‌ام. اگرچه هیچ مبحثی از فیزیک کوانتومی به‌طور کامل تشریح نشده است، اما هدف من پر کردن فاصلهٔ میان درس فیزیک نوین و ببین صوری‌تر مکانیک کوانتومی است. از این‌رو، کاربردهای بسیاری را بررسی کرده‌ام، و بر براورد مرتبهٔ بزرگی و اهمیت اعداد تأکید کرده‌ام.

۳. برای حفظ تعادل با سطح فیزیکی کتاب، ساختار ریاضی را تا حد امکان ساده گرفته‌ام. مفاهیم جدید، مانند عملگرها، و ابزارهای ریاضی جدید الزاماً ظاهر می‌شوند. عملگرها را بیشتر با استفاده از تشابه، به‌جای تعریف دقیق، بررسی کرده‌ام، و استفاده از ابزارهای ریاضی جدید را تا جایی که امکان داشته است به حداقل رسانده‌ام.

در رهیافت به نظریهٔ کوانتومی، مکانیک موجی و معادلهٔ شرودینگر را برای شروع انتخاب کرده‌ام. اگرچه با رهیافت بردار حالت سریعتر می‌توان به ساختار اساسی مکانیک کوانتومی رسید، اما تجربه نشان داده است که استفاده از ابزارهای آشناتر، مانند معادله‌های دیفرانسیل، نظریه را قابل فهمتر و همخوانی با فیزیک کلاسیک را شفافتر می‌کند.

حجم کتاب احتمالاً بیشتر از آن است که بتوان در یک سال به‌آسانی تدریس کرد. مطالب اساسی را می‌توان در یک سه ماههٔ تحصیلی تدریس کرد. این قسمت از کتاب تشکیل شده است از فصلهای ۱ تا ۶، ۸ و ۹ که در آنها شکل‌گیری نظریهٔ کوانتومی، معادلهٔ شرودینگر و ساختار کلی مکانیک موجی بیان شده‌اند. تعدادی مسئلهٔ ساده در فصل ۵ حل شده‌اند، و دربارهٔ رابطهٔ آنها با

www.arsanjan.blogfa.com

پدیده‌های فیزیک بحث شده است. تعمیم به دستگاههای چندذره‌ای و به سه بعد بررسی شده است. مطالب سه ماههٔ دوم مستقیماً به مسائل فیزیک اتمی مربوط می‌شوند، و در این قسمت از ابزار ریاضی پیچیده‌تری استفاده می‌شود. در اینجا دربارهٔ روشهای عملگری (فصل ۷)، تکانهٔ زاویه‌ای (فصل ۱۰)، اتم هیدروژن (فصل ۱۲)، عملگرها، ماتریسها و اسپین (فصل ۱۴)، جمع عملگرهای زاویه‌ای (فصل ۱۵)، نظریهٔ اختلال مستقل از زمان (فصل ۱۶) و اتم هیدروژن واقعی (فصل ۱۷) بحث می‌کنیم. این برنامه دانشجو را برای روبه رو شدن با مسائل بسیار متنوعی که طی سه ماههٔ سوم و آخر بررسی می‌شوند آماده می‌کند. این مسائل عبارت‌اند از برهم‌کنش ذرات باردار با میدان مغناطیسی (فصل ۱۳)، اتم هلیم (فصل ۱۸)، تابش اتمها و مباحث مربوط (فصلهای ۲۲ و ۲۳)، نظریهٔ برخورد (فصل ۲۴) و جذب تابش در ماده (فصل ۲۵). این قسمت با یک بحث کیفی‌تر دربارهٔ ساختار اتمها و مولکولها (فصلهای ۱۹ تا ۲۱) تکمیل می‌شود. آخرین فصل که دربارهٔ ذرات بنیادی و تقارنهای آنها است هدف دوگانه‌ای دارد که عبارت است از توصیف بعضی از پیشرفتهای اخیر در خط مقدم فیزیک و نشان دادن اینکه چگونه مفاهیم اساسی نظریهٔ کوانتومی در قلمرو فواصل بسیار کوچک کاربرد یافته‌اند.

در شرح و بسط موضوع اصلی طبعاً بعضی مباحث حاشیه‌ای پیش می‌آیند. به‌جای طولانی‌تر کردن فصلها، بخش جداگانهٔ "مباحث ویژه" را اضافه کرده‌ام. در اینجا سینماتیک نسبیتی، اصل هم‌ارزی، تقریب WKB، بحث مفصلی در طول عمر، پهنای خط و تشدید پراکندگی، و نظریهٔ یوکاوا برای نیروهای هسته‌ای بیان می‌شوند. به همان دلیل، درآمد کوتاهی بر انتگرال فوریه، تابع دلتای دیراک، و چند مطلب صوری دربارهٔ عملگرها در پیوستهای ریاضی آخر کتاب گنجانده شده‌اند.

*خاطر بحثهای بسیار دربارهٔ موضوع مکانیک کوانتومی، خود را مدیون همکارانم در دانشگاه مینه‌سوتا، مخصوصاً بنجامین بیمان و دونالد گفن، می‌دانم. از یوجین مرزباخر که دست‌نوشته‌ام را خوانده است و پیشنهادهای مفید بسیاری برای اصلاح آن داده است سپاسگزاری می‌کنم. همچنین از دانشجویانم در درس مکانیک کوانتومی مقدماتی که چندین سال درس داده‌ام تشکر می‌کنم. علاقهٔ آشکار آنها به موضوع مرا بر آن داشت تا یادداشتهای مکملی بنویسم که بعداً به‌صورت کتاب حاضر درآمد.

استیون گازیوروویچ

www.arsanjan.blogfa.com

پیشگفتار ویرایش دوم

ویرایش اول فیزیک کوانتومی بیش از ۲۰ سال قبل انتشار یافت. رهنمودهایی که در پیشگفتار آن مطرح کردم و همچنین رهیافت کلی آن‌را هنوز هم تأیید می‌کنم. ویرایش کنونی تفاوت اساسی با ویرایش اول ندارد اما از چند لحاظ مهم بهتر شده است.

آموزش

برای آسانتر شدن کار دانشجو، جزئیات بیشتری از استدلالها و محاسبات را بیان کرده‌ام و به بحثهای فیزیکی بیشتری در ورای نتایج صوری محاسبات پرداخته‌ام. همچنین تعداد عناوین بخشها و زیربخشها را زیادتر کرده‌ام، که این باعث می‌شود کار مدرس نظم بیشتری پیدا کند. در راستای هدف ارائهٔ کتابی دربارهٔ فیزیک کوانتومی تعداد کاربردها را افزایش داده‌ام.

کاربردها

تغییراتی بنیادی در تعداد زیادی از کاربردهایی که در متن کتاب گنجانده شده‌اند به‌وجود آورده‌ام. بحث گاز فرمیون واگن را برای محاسبهٔ ساده‌ای از شعاع ستارهٔ نوترونی گسترش داده‌ام. در بحث برهم‌کنش الکترون با میدان مغناطیسی، به ترازهای لانداؤ و مختصراً به اثر کوانتومی هال با اعداد درست اشاره کرده‌ام.

تغییراتی که در نیمهٔ دوم این ویرایش صورت گرفته‌اند عبارت‌اند از کوتاه کردن بحث ساختار مولکولی و حذف فصل مربوط به فیزیک ذرات بنیادی. در عوض، به نظریهٔ تابش توجه بیشتری کرده‌ام. در اینجا بحث ضرایب A و Bی اینشتین، لیزرها، سرد کردن اتمها، خواص اتمهای دوترازی در میدانهای الکتریکی شدید، و موضوع جذاب مشاهدهٔ جهشهای کوانتومی را اضافه کرده‌ام.

در بخش مباحث ویژه، بحث اصل هم‌ارزی اینشتین را، که مناسبتی با این کتاب ندارد، با بحثی دربارهٔ عملگر چگالی عوض کرده‌ام. دربارهٔ این عملگر توضیحی در متن درس داده نشده است، و افزودن آن باعث می‌شود که دانشجویان، اگر لازم باشد، بتوانند معلومات خود را گسترش دهند.

www.arsanjan.blogfa.com

سپاسگزاری

در سالهای گذشته با افرادی که از ویرایش اول استفاده کرده‌اند ارتباط داشته‌ام. غلطهای چاپی و همچنین مسائل غیرقابل حل را به من تذکر داده‌اند. چون این اشتباهات را نزدیک به ۲۰ سال قبل به من اطلاع داده‌اند (بسیاری از آنها در چاپ دوم تصحیح شدند) اسامی تمام آن افراد را به‌خاطر ندارم. وظیفهٔ خود می‌دانم که از همهٔ آنها تشکر کنم، از جمله از استادان ج س تِن و تام دِوْلین. تذکرات جالبی از استادان لوول براون، ریچارد روبینت، ایان گاتلند، یوآن‌ها، و روبرت لوری دریافت داشته‌ام، و مایلم مخصوصاً از دوست و همکارم ارل پیترسون برای پیشنهادهای مفیدش تشکر کنم.

استیون گازیوروویچ

www.arsanjan.blogfa.com

۱

محدودیتهای فیزیک کلاسیک

پایان قرن نوزدهم و آغاز قرن بیستم دورهٔ بحران در فیزیک بود. یک رشته نتیجه‌های تجربی به مفاهیمی نیاز داشتند که کاملاً با فیزیک کلاسیک ناسازگارند. پیشرفت این مفاهیم، در یک کشاکش جذاب از حدسهای اساسی و آزمایشهای درخشان، در نهایت به نظریهٔ کوانتومی منجر شد.[۱] هدف ما در این فصل توصیف زمینهٔ این بحران و، پس از درک ماوقع، ارائهٔ مفاهیم جدید به ترتیبی است که اگرچه از لحاظ تاریخی درست نیست اما اسرارآمیز بودن گذار به نظریهٔ کوانتومی را برای خواننده کمتر می‌کند. مفاهیم جدید، یعنی خواص ذره‌ای تابش، خواص موجی ماده، و کوانتیدگی کمیتهای فیزیکی، در پدیده‌هایی که بررسی خواهیم کرد ظاهر می‌شوند.

---

۱. گزارش جالب‌توجهی از تکوین و تکامل نظریهٔ کوانتومی را می‌توان در کتاب زیر یافت.

M Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, Second Edition, American Institute of Physics, New York 1983.

همچنین مراجعه کنید به

A Pais, *Subtle is The Lord...*, Oxford University Press, NY (1982), Ch 19.

www.arsanjan.blogfa.com

تابش جسم سیاه

تابش جسم سیاه کلاسیک

وقتی جسمی گرم می‌شود تابش می‌کند. در حالت تعادل، نور گسیل شده تمام طیف بسامدهای ν را با یک توزیع طیفی در بر می‌گیرد، که هم به بسامد نور، یا معادل آن طول‌موج λ، بستگی دارد و هم به دما. می‌توان کمیت توان گسیل $E(\lambda,T)$ را به‌صورت انرژی گسیل شده در طول‌موج λ در واحد سطح و در واحد زمان تعریف کرد. پژوهش نظری در حوزهٔ تابش گرمایی در سال ۱۸۵۹ با کار گوستاو کیرشهوف شروع شد که نشان داد به‌ازای یک λی معین نسبت توان گسیل E به ضریب جذب A، که بنا به تعریف کسر تابش فرودی با طول‌موج λ است که جسم جذب می‌کند، برای تمام جسمها یکسان است. کیرشهوف دو صفحهٔ گسیلنده و جذب‌کنندهٔ موازی در نظر گرفت و از شرط تعادل نشان داد که (به‌ازای هر λ) انرژی گسیل شده با انرژی جذب شده برابر است، یعنی نسبتهای E/A باید برای این دو صفحه یکسان باشند. اندکی پس از آن، او دریافت که برای جسم سیاه، که بنابه تعریف به سطحی گفته می‌شود که تمام تابش فرودی را کاملاً جذب می‌کند و در نتیجه برای آن $A = ۱$، تابع $E(\lambda,T)$ یک تابع جهانی است.

برای مطالعهٔ این تابع، لازم است که بهترین چشمهٔ ممکن تابش جسم سیاه را به‌دست آوریم. یک حل عملی این مسئله بررسی تابش گسیل شده از یک روزنهٔ کوچک در محفظه‌ای است که تا دمای T گرم شده است. با توجه به ناکاملیهای سطح داخلی کاواک، واضح است که هر تابشی که به روزنه فرود می‌آید دیگر نمی‌تواند از آن خارج شود. بدین‌ترتیب، سطح روزنه تقریباً یک "جذب‌کنندهٔ کامل" است، و در نتیجه تابش ناشی از آن واقعاً "تابش جسم سیاه" است. اگر روزنه به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، این تابش همان تابشی است که به دیواره‌های کاواک فرود می‌آید. بنابراین، دانستن توزیع تابش داخل کاواکی که دیواره‌های آن در دمای T هستند ضروری است.

کیرشهوف نشان داد که، بنابه قانون دوم ترمودینامیک، تابش داخل کاواک ــ برای هر طول‌موج ــ باید همسانگرد باشد، یعنی شار مستقل از راستا است؛ باید همگن باشد، یعنی در هر نقطه یکسان؛ است و باید برای تمام کاواکهای با دمای مساوی یکسان باشد.[۲] با استدلالهای سادهٔ هندسی می‌توان نشان داد که توان گسیل با چگالی انرژی $u(\lambda,T)$ در کاواک ارتباط دارد (مسئلهٔ ۱ـ۱). این رابطه به‌صورت زیر است

$$u(\lambda,T) = \frac{۴E(\lambda,T)}{c} \qquad (۱\text{ـ}۱)$$

چگالی انرژی کمیتی است که به لحاظ نظری اهمیت دارد، و درک دقیقتر آن در سال ۱۸۹۴ با

---

۲. این مطالب در بسیاری از کتابهای درسی فیزیک جدید و فیزیک آماری توضیح داده شده‌اند. مرجعهای مربوطه را می‌توانید در آخر این فصل و آخر کتاب بیابید.

www.arsanjanibloga.com

کار ویلهلم وین حاصل شد که بعدها به نام او،[۳] نشان داد چگالی انرژی باید به‌صورت زیر باشد

$$u(\lambda, T) = \lambda^{-5} f(\lambda T) \qquad (۲_۱)$$

که در آن f تابع هنوز نامعلومی از تنها یک متغیر است. اگر، چنانکه مناسبتر است، بخواهیم با چگالی انرژی برحسب بسامد $u(\nu, T)$ کار کنیم با توجه به اینکه $\lambda = c/\nu$ و

$$\begin{aligned} u(\nu, T) &= u(\lambda, T) \left| \frac{d\lambda}{d\nu} \right| \\ &= \frac{c}{\nu^2} u(\lambda, T) \end{aligned} \qquad (۳_۱)$$

قانون وین به‌صورت زیر در می‌آید

$$u(\nu, T) = \nu^3 g\left(\frac{\nu}{T}\right) \qquad (۴_۱)$$

این قانون، که تجربه آن‌را تأیید کرده است (شکل ۱ـ۱)، مستلزم دو پیامد زیر است:

۱. با داشتن توزیع طیفی تابش جسم سیاه در یک دمای معین، می‌توان توزیع در هر دمای دیگر را با استفاده از روابط بالا به‌دست آورد.

۲. اگر تابع $f(x)$ ــ یا معادل آن، تابع $g(x)$ــ به‌ازای یک مقدار $x > 0$ بیشینه‌ای داشته باشد، طول‌موج $\lambda_{(\max)}$ که در آن چگالی انرژی و در نتیجه توان گسیل بیشینه است با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\lambda_{(\max)} = \frac{b}{T} \qquad (۵_۱)$$

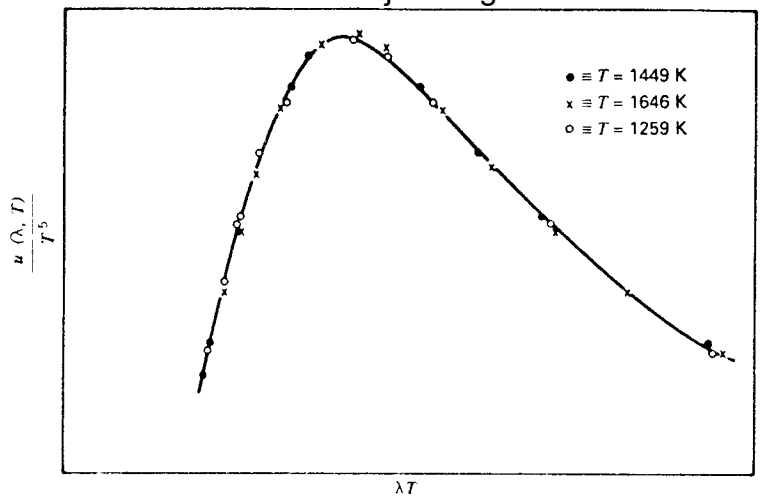
که در آن b یک ثابت جهانی است. مقدار این ثابت، بنابه آزمایشهای اوتولومر و ای پرینگزهایم (۱۸۹۷)، برابر است با $b = 0.2898 \text{cm K}$.

---

۳. وین یک کاواک کروی کاملاً بازتابنده را در نظر گرفت که به‌طور بی‌دررو منقبض می‌شود. تغییر توزیع انرژی برحسب λ باید به علت انتقال دوپلر در بازتاب باشد. به‌فصل ۵ از کتاب زیر مراجعه کنید

F K Richtmyer, E H Kennard, and J N Cooper, *Introduction to Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1969.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۱ تأیید تجربی رابطهٔ ۱ـ۲ به‌صورت $u(\lambda,T)/T^5$ که یک تابع جهانی برحسب λT است.

وین با استفاده از یک الگو (که تنها به لحاظ تاریخی جالب توجه است) صورتی برای $g(\nu/T)$ به‌دست آورد که عبارت است از

$$g\left(\frac{\nu}{T}\right) = Ce^{-\beta\nu/T} \qquad (۶\text{ـ}۱)$$

و بسیار عجیب است که این تابع، که حاوی دو پارامتر قابل تنظیم است، با داده‌های بسامد زیاد (طول‌موج کم) کاملاً جور در می‌آید، اما با بعضی از مفاهیم بسیار کلی فیزیک کلاسیک سازگار نیست. جان ویلیام استروت ریلی، در سال ۱۹۰۰، نتیجهٔ زیر را به‌دست آورد

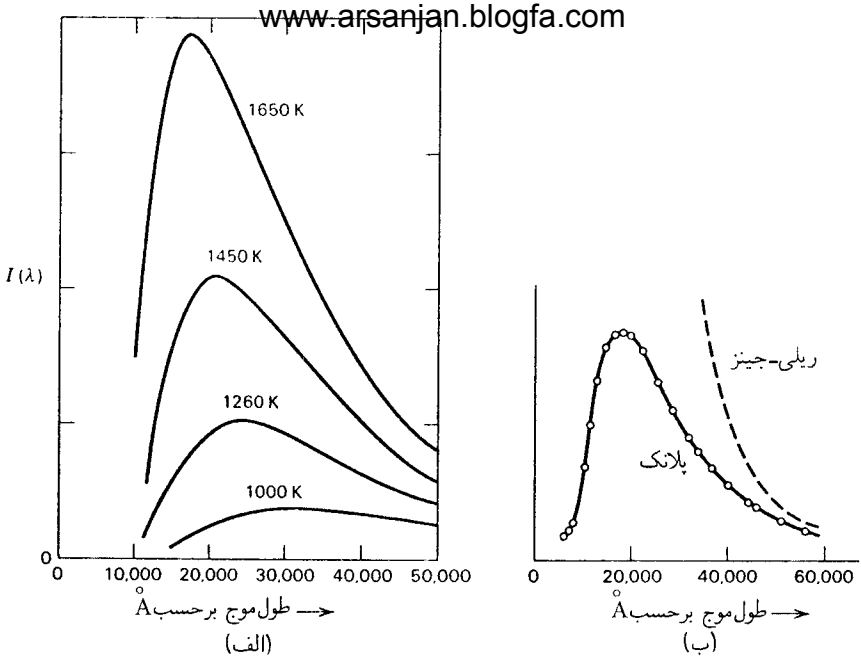
$$u(\nu,T) = \frac{۸\pi\nu^۲}{c^۳}kT \qquad (۷\text{ـ}۱)$$

که در آن k ثابت بولتزمن ($۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۱۶}\mathrm{erg/K}$) و c سرعت نور است، ($۳٫۰۰ \times ۱۰^{۱۰}\mathrm{cm/s}$) است. محاسبهٔ فرمول ۱ـ۷ شامل دو قسمت بود: (۱) تعیین انرژی میانگین به‌ازای هر درجهٔ آزادی برای یک دستگاه دینامیکی در حال تعادل گرمایی بر مبنای قانون کلاسیک همپاری انرژی،[۴] و (۲) تعیین تعداد مدها (یعنی درجه‌های آزادی) برای تابش الکترومغناطیسی محبوس در یک کاواک با بسامدی در بازهٔ $(\nu, \nu+d\nu)$.[۵]

۴. قانون همپاری پیش‌بینی می‌کند که انرژی میانگین به‌ازای هر درجهٔ آزادی $kT/۲$ است. برای یک نوسانگر ــ و مدهای میدان الکترومغناطیسی نوسانگرهای هماهنگ ساده هستند ــ یک سهم $kT/۲$ از انرژی جنبشی با یک سهم مساوی از انرژی پتانسیل جمع می‌شود و نتیجه kT است.

۵. تعداد این مدها $۴\pi\nu^۲/c^۳$ است که باید در ۲ ضرب شود زیرا امواج الکترومغناطیسی، که عرضی‌اند، متناظر با ←

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۲ (الف) توزیع توان تابیده از جسم سیاه در دماهای مختلف. (ب) مقایسهٔ داده‌های تجربی در ۱۶۰۰K با فرمولهای پلانک و ریلی-جینز.

قانون ریلی-جینز۱ـ۷ (جینز یک اشتباه جزئی در محاسبهٔ ریلی را تصحیح کرد) در بسامدهای زیاد، برخلاف فرمول وین، با آزمایش توافق ندارد اما در بسامدهای کم بر منحنی تجربی منطبق است (شکل ۱ـ۲). قانون ریلی-جینز اساساً نمی‌تواند درست باشد، زیرا چگالی انرژی کل (انتگرال چگالی انرژی روی تمام بسامدها) را بینهایت پیش‌بینی می‌کند.

توزیع پلانک و کوانتوم انرژی

ماکس پلانک در سال ۱۹۰۰، از تلفیق نبوغ‌آمیز فرمول بسامد زیاد وین با قانون بسامد کم ریلی-جینز، فرمولی به‌دست آورد که به‌صورت زیر است

$$u(\nu,T)=\frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1} \qquad (8\text{ـ}1)$$

در این فرمول، h، ثابت پلانک، یک پارامتر قابل تنظیم است که معلوم شد مقدار آن برابر است با $6.63\times10^{-27}\,\mathrm{erg\,s}$. این قانون به‌ازای $h\nu/kT \ll 1$ به‌صورت قانون ریلی-جینز در می‌آید،

نوسانگرهای هماهنگ دوبعدی هستند. این نتیجه را باز هم لازم داریم، و آنرا در فصل ۱۲ محاسبه خواهیم کرد.

www.arsanjan.blogfa.com

و به‌ازای $h\nu \gg kT$ تبدیل می‌شود به

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-h\nu/kT}(1 - e^{-h\nu/kT})^{-1} \cong \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-h\nu/kT} \qquad (۹\text{ـ}۱)$$

اگر رابطهٔ ۱ـ۸ را به‌صورت حاصلضرب تعداد مدها (که می‌توان آن‌را از تقسیم چگالی انرژی ۱ـ۷ بر kT به‌دست آورد) و عامل دیگری، که می‌توان آن‌را انرژی متوسط به‌ازای هر درجهٔ آزادی تعبیر کرد، درآوریم:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kT\frac{h\nu/kT}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad (۱۰\text{ـ}۱)$$

می‌بینیم که هرگاه بسامدها در مقایسه با kT/h کوچک نباشند قانون همپاری کلاسیک تغییر می‌کند. این تغییر در قانون همپاری نشان می‌دهد که اولاً مدها انرژی میانگینی دارند که تابع بسامد آنها است، و ثانیاً میانگین انرژی مدهای پُربسامد بسیار کوچک است. این قطع مؤثر مشکل فرمول چگالی ریلی‌ـجینز را برطرف می‌کند: انرژی کل در کاواکی با حجم واحد دیگر بینهایت نیست. داریم

$$U(T) = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{(h\nu/kT)^3 d(h\nu/kT)}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3}T^4 \int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} \qquad (۱۱\text{ـ}۱)$$

انتگرال را می‌توان محاسبه کرد،[۶] و نتیجه عبارت است از رابطهٔ استفان‌ـبولتزمن برای انرژی تابش کل در واحد حجم:

$$U(T) = aT^4 \qquad (۱۲\text{ـ}۱\text{الف})$$

---

6. $\int_0^\infty dx\, x^3(e^x - 1)^{-1} = \int_0^\infty dx\, x^3 e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^4}\int_0^\infty dy\, y^3 e^{-y} = 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{15}$

www.arsanjan.blogfa.com

که در آن $\sigma = ۵٫۶۷ \times ۱۰^{-۵} \mathrm{erg/cm^۲ s K^۴}$ ثابت استفان-بولتزمن نامیده می‌شود. این نتیجه را قبلاً در ۱۸۸۴ الف مدتها قبل با استفاده از استدلال ترمودینامیکی به‌دست آمده بود. این نتیجه را می‌توان به‌صورت توان گسیل کل جسم سیاه نیز نوشت:

$$E(T) = \sigma T^۴ \qquad (۱\text{ـ}۱۲\text{ب})$$

که در آن $\sigma = ۵٫۶۷ \times ۱۰^{-۵} \mathrm{erg/cm^۲ s K^۴}$.

انحراف از قانون همپاری محض کاملاً هم غیرمنتظره نبود: یک پیامد قانون همپاری قانون گرمای ویژهٔ دولون-پتی بود که بنابه آن حاصلضرب وزن اتمی (یا مولکولی) و گرمای ویژه برای تمام جامدها مقداری ثابت است. اما انحرافهایی از پیش‌بینی‌های دولون-پتی از سال ۱۸۷۲ به‌بعد مشاهده شدند.[۷] این انحرافها نشان می‌دادند که گرمای ویژه در دماهای کم کاهش می‌یابد.[۸]

موفقیت بی‌چون و چرای رابطهٔ ۱ـ۸ باعث شد که پلانک به جستجوی منشأ آن بپردازد و پس از دو ماه به این نتیجه رسید که می‌توان آن‌را با این فرض به‌دست آورد که انرژی وابسته به هر مد میدان الکترومغناطیسی به‌طور پیوسته (با مقدار میانگین kT) تغییر نمی‌کند بلکه مضرب درستی از یک کوانتوم انرژی کمینهٔ ϵ است. در این شرایط، با استفاده از توزیع احتمال بولتزمن برای دستگاهی در تعادل گرمایی در دمای T

$$P(E) = \frac{e^{-E/kT}}{\sum\limits_{E} e^{-E/kT}} \qquad (۱\text{ـ}۱۳)$$

انرژی میانگین وابسته به هر مد را محاسبه می‌کنیم:

$$\overline{E} = \sum_{E} EP(E)$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=۰}^{\infty} n\epsilon\, e^{-n\epsilon/kT}}{\sum\limits_{n=۰}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT}}$$

---

۷. بنابه قانون همپاری، مجموعه‌ای از N نوسانگر ــ و شبکه‌ای از اتمها با نیروهای کشسان بین آنها را می‌توان چنین در نظر گرفت ــ دارای انرژی $۳NkT$ است که در آن ضریب ۳ ناشی از این است که برخلاف نوسانگرهای مربوط به میدان تابش در کاواک که دوبعدی هستند، در یک جسم جامد نوسانگرها سه‌بعدی‌اند. گرمای ویژه برای یک مول از مشتق‌گیری نسبت به T و قرار دادن $N = N_۰$، عدد آووگادرو، به‌دست می‌آید: $C_v = ۳N_۰ k = ۳R$ که در آن $R = ۸٫۱۳ \times ۱۰^۷ \mathrm{erg/K}$.

۸. بحث بسیار کوتاهی دربارهٔ گرمای ویژه را در فصل ۲۰ خواهید دید.

www.arsanjan.blogfa.com

$$= \frac{-\epsilon \dfrac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} \Bigg|_{x=\epsilon/kT}$$

$$= \epsilon \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \Bigg|_{x=\epsilon/kT}$$

$$= \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \qquad (۱۴_۱)$$

که با ۱ـ۱۰ سازگار است به شرط اینکه فرض کنیم

$$\epsilon = h\nu \qquad (۱۵_۱)$$

و تعداد مدها را تغییر ندهیم.

پلانک استدلال کرد که به دلیل ناشناخته‌ای اتمها در دیواره‌های کاواک تابش را به‌صورت "کوانتومهایی" با انرژی $nh\nu (n = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ گسیل می‌کنند، اما به موجب سازگاری، چنانکه اینشتین چند سال بعد نشان داد، تابش الکترومغناطیسی به‌گونه‌ای رفتار می‌کند که انگار از مجموعه‌ای از کوانتومهای انرژی با انرژی $h\nu$ تشکیل شده است.[۹]

انرژیی که هر کوانتوم حمل می‌کند فوق‌العاده کم است. برای نور در ناحیهٔ اپتیکی، با مثلاً $\lambda = ۶۰۰۰ \text{Å}$، داریم

$$h\nu = h\frac{c}{\lambda} = \frac{۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۲۷} \times ۳٫۰۰ \times ۱۰^{۱۰}}{۶ \times ۱۰^{-۵}} \simeq ۳٫۳ \times ۱۰^{-۱۲} \text{erg}$$

و در نتیجه تعداد کوانتومهای نور با این طول‌موج که به‌عنوان مثال از یک چشمهٔ ۱۰۰ واتی گسیل می‌شوند برابر است با

$$N = \frac{۱۰۰ \times ۱۰^{۷}}{۳٫۳ \times ۱۰^{-۱۲}} \cong ۳ \times ۱۰^{۲۰} \text{quanta/s}$$

با این تعداد زیاد کوانتوم، شاید عجیب نباشد که ماهیت ذره‌ای نور را مستقیماً احساس نمی‌کنیم؛ خواهیم دید که در مقیاس ماکروسکوپیک نباید هیچ انحرافی از اپتیک کلاسیک وجود داشته باشد. با این‌همه، تعبیری که پلانک از فرمول خود ارائه کرد در تصویری که از تابش داریم تغییر اساسی به‌وجود می‌آورد.

---

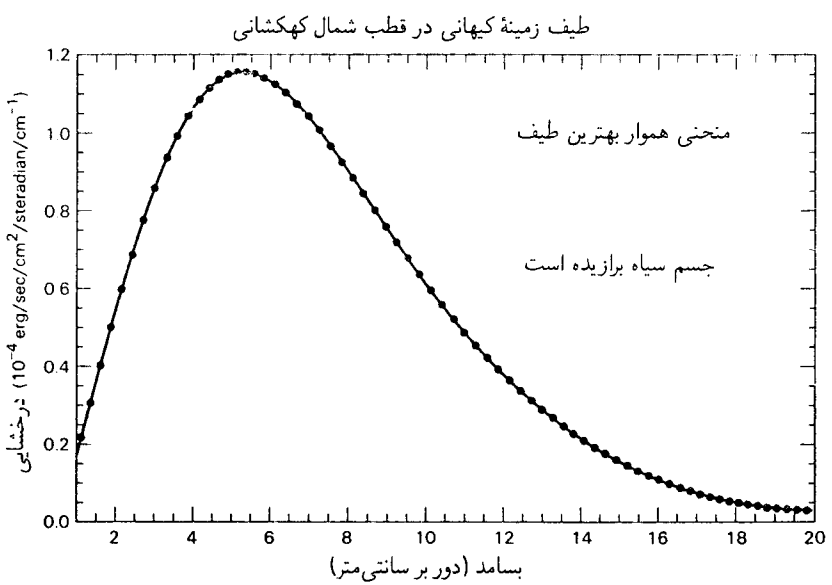
۹. به‌ازای یک بسامد معین ν، کوانتومها می‌توانند با هر تعداد درست موجود باشند و در نتیجه انرژی می‌تواند مقادیر $nh\nu$، با $n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$، داشته باشد.

www.arsanjan.blogfa.com

تابش میکروموج کیهانی زمینه

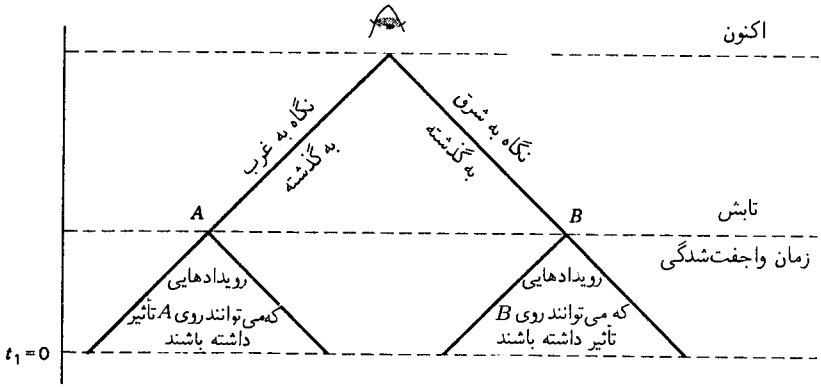
به‌علت پیشرفتهای ناشی از کشف زمینه‌ای در تابش کیهانی در ناحیهٔ میکروموج توسط پنزیاس و ویلسون در سال ۱۹۶۴، تابش جسم سیاه در خط مقدم فیزیک قرارگرفته است. در اواخر دههٔ ۱۹۴۰، جورج گاموف، رالف آلفر، و رابرت هرمن بعضی از پیامدهای الگوی مهبانگ آفرینش جهان را مطالعه کردند. کار آنها، و محاسباتی که بعداً پیبلس انجام داد، نشان داد که فراوانی کنونی هیدروژن در جهان را تنها به شرطی می‌توان درک کرد که مقدار زیادی تابش در مراحل کاملاً اولیهٔ جهان وجود می‌داشت. انبساط جهان باعث سرد شدن ماده و تابش موجود در جهان شد، و وقتی دما به حدود ۳۰۰۰K رسید تابش دیگر برهم‌کنش عمده‌ای با مادهٔ جهان نداشت زیرا الکترونهای آزاد توانستند با نوکلئونها ترکیب شوند و اتمها را تشکیل دهند. از آن زمان جهان نسبت به تابش شفاف شد، و دمای تابش با اندازهٔ "جعبه"ای که حاوی این تابش است، یعنی جهان، به‌طور خطی افت کرد. ماندهٔ فعلی تابش در چند سال اخیر توسط ماهوارهٔ ناسای کوبه (کاوشگر زمینهٔ کیهانی) مطالعه شده است. چنانکه شکل ۱ـ۳ نشان می‌دهد، طیف با دقت زیاد با توزیع جسم سیاه، مربوط به دمای کنونی ۲٫۷۳۵K، مطابقت دارد. این زمینهٔ تابش جسم سیاه کیهانی داستان مهبانگ را تأیید می‌کند، و اطلاعاتی دربارهٔ انبساط جهان و همچنین شرایطی که در زمان واجفت‌شدگی ایجاد شدند به‌دست می‌دهد.

تغییرات جزئی دما به‌صورت تابعی از راستا با حرکت منظومهٔ شمسی نسبت به مرکز کهکشان، که با حرکت کهکشان ما به‌سمت خوشهٔ کهکشانهای ویرگو (توده‌ای از ماده در فاصلهٔ حدود ۵۰



شکل۱ـ۳ نتایج اندازه‌گیریهای کوبه روی تابش زمینه.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل ۱ـ۴ مسئلهٔ افق: ناظری که تابش جسم سیاه زمینه را با نگاه کردن به شرق و غرب اندازه‌گیری می‌کند اثر شرایط در A و B در زمان واجفت‌شدگی را می‌بیند. در الگوی مهبانگ مرسوم، برابری دماها در A و B را نمی‌توان درک کرد زیرا در زمان مهبانگ ($t_1 = 0$) مخروطهای نورگذشتهٔ A و B روی هم نمی‌افتند. داستان تورم فرض می‌کند که در نخستین دوره پس از مهبانگ جهان متحمل یک انبساط انفجاری نمایی شده است، و در نتیجه هر دو ناحیه درگذشتهٔ A و B از یک ناحیهٔ قدیمی‌تر و بسیار کوچکتر ناشی شده‌اند که در آن هیچ‌یک از این دو ناحیه خارج از قلمرو تأثیر یکدیگر نبوده‌اند. در نمودار بالا مقیاس ثابتی برای زمان رعایت نشده است زیرا بازهٔ بین مهبانگ و اکنون از مرتبهٔ 10^5 بار بزرگتر از بازهٔ بین مهبانگ و زمان واجفت‌شدگی است.

میلیون سال نوری) ترکیب شده است، سازگار هستند. سرعت این حرکت از مرتبهٔ $370\,km/s$ است و ناهمگنی را می‌توان به انتقال دوپلر وابسته به این حرکت نسبت داد. اگر این اثر را حذف کنیم، دما با دقتی بهتر از ۱ روی 10^5 یکنواخت می‌شود. این همگنی کیهانشناسان را با مسئله‌ای مواجه کرده است. تابش جسم سیاه دریافت شده از یک راستای خاص در آسمان تابش از آن قسمت آسمان در زمان واجفت‌شدگی است (که البته به‌علت انبساط جهان از آن زمان انتقال به سرخ یافته است). یکسانی طیفهای تابش در قسمتهای کاملاً مختلف آسمان نشاندهندهٔ برابری دماها در این قسمتهای آسمان در زمان واجفت‌شدگی است، اما چنین ناحیه‌هایی خارج از افق تأثیر یکدیگر هستند (به شکل ۱ـ۴ مراجعه کنید). در سال ۱۹۸۱ آلان گوت نظر داد که مراحل کاملاً اولیهٔ مهبانگ شامل دوره‌ای با افزایش نمایی واقعاً سریع بوده‌اند، به‌طوری که می‌توانیم قسمتهای مختلف آسمان در زمان واجفت‌شدگی را به یک مبدأ مشترک منسوب کنیم مشکل همگنی فوق‌العاده تا اندازه‌ای کم شد، اما هنوز به‌سختی می‌شد تصور کرد که از ناهمگنیهایی که باید وجود می‌داشتند تا بذر به هم پیوستن ماده برای تشکیل کهنترین کهکشانها را بپاشند نباید ردهایی وجود داشته باشد. بنابراین، وقتی به کیهانشناسان از طرف گروه کوبه مژده رسید که ناهمگنیهایی در سطح 5×10^{-6} در دما یافت شده‌اند آنها نفسی به‌آسودگی کشیدند. باید امید داشت که اندازه‌گیریهای دقیقتر برای کمک به درک جزئیات جهان اولیه ادامه یابد.

www.arsanjan.blogfa.com

اثر فوتوالکتریک

فرمول پلانک هر چند هم موفقیت‌آمیز بود اما نتیجه‌گیری ماهیت کوانتومی تابش از آن چندان الزامی نیست. سهم مهمی در پذیرفتن آن از کار آلبرت اینشتین حاصل شد، که در سال ۱۹۰۵ با استفاده از مفهوم ماهیت کوانتومی نور بعضی از خاصیتهای ویژهٔ فلزات را، وقتی در معرض نور مرئی و فرابنفش قرار می‌گیرند، توضیح داد.

کشف اثر فوتوالکتریک با کار هاینریش هرتز در سال ۱۸۸۷ آغاز شد. هرتز، وقتی درگیر آزمایشهای مشهور خود روی امواج الکترومغناطیسی بود، مشاهده کرد که اگر دو سر گاف جرقه در برابر نور بنفش ناشی از جرقه در مدار اولیه پوشانده شوند طول جرقهٔ القا شده در مدار ثانویه کاهش می‌یابد. مشاهدات او توجه بسیاری را به خود جلب کرد، و واقعیتهای زیر با آزمایشهای بیشتری به اثبات رسیدند:

۱. وقتی یک صفحهٔ فلزی صیقلی شده در معرض نور قرار می‌گیرد ممکن است الکترون گسیل کند،[۱۰] اما هیچ یون مثبتی گسیل نمی‌کند.

۲. گسیل الکترون از این صفحه به بسامد نور بستگی دارد. آستانه‌ای وجود دارد که به‌طور کلی از یک فلز به فلز دیگر فرق می‌کند: نور به شرطی می‌تواند جریان فوتوالکتریک تولید کند که بسامدش بزرگتر از بسامد آستانهٔ فلز باشد.

۳. بزرگی این جریان، اگر تولید شود، متناسب با شدت چشمهٔ نور است.

۴. انرژی فوتوالکترونها مستقل از شدت چشمهٔ نور است اما با بسامد نور فرودی به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

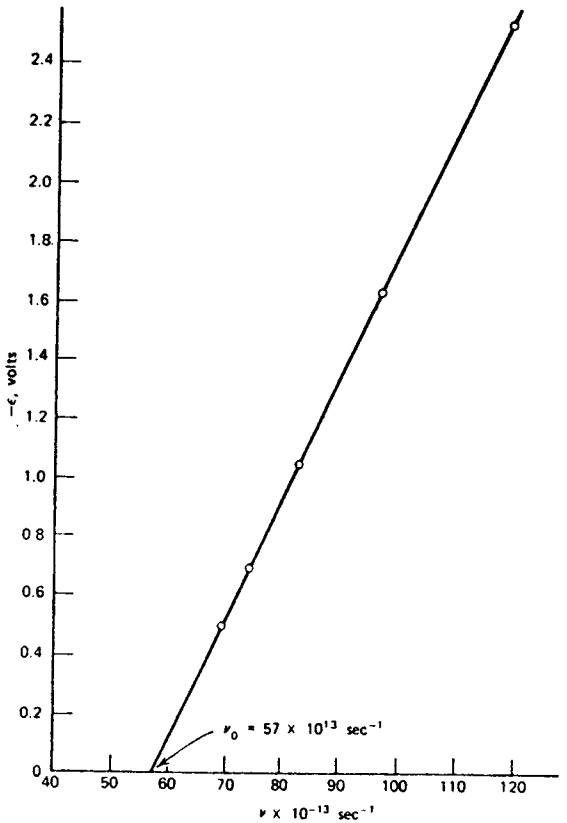
اگرچه وجود اثر فوتوالکتریک در چارچوب نظریهٔ الکترومغناطیس کلاسیک قابل درک بود ــزیرا می‌دانستند که فلزات دارای الکترون هستند و می‌شد تصور کرد که این الکترونها به علت جذب تابش شتاب بگیرندــ اما وابستگی اثر به بسامد در این نظریه قابل توضیح نیست. انرژیی که یک موج الکترومغناطیسی حمل می‌کند با شدت چشمه متناسب است و ربطی به بسامد ندارد. علاوه بر این، توضیح کلاسیک اثر فوتوالکتریک، که باید تمرکز انرژی روی تک‌تک فوتوالکترونها را در آن دخالت داد، متضمن یک تأخیر زمانی اجتناب‌ناپذیر بین ورود تابش و خروج الکترون است که هر چه شدت کمتر باشد طولانی‌تر است. در واقع چنین تأخیری حتی با تابش فرودی بسیار کم‌شدت هرگز، حداقل تا 10^{-9} ثانیه، مشاهده نشده است.

اینشتین تابش را متشکل از کوانتومهایی با انرژی $h\nu$ در نظر گرفت، که در آن ν بسامد نور است. جذب یک کوانتوم منفرد توسط یک الکترون ــفرایندی که می‌تواند کمتر از حد بالایی که قبلاً ذکر شد طول بکشد ــ انرژی الکترون را به‌اندازهٔ $h\nu$ افزایش می‌دهد. مقداری از این انرژی باید صرف جدا شدن الکترون از فلز شود. می‌توان انتظار داشت که این مقدار، W (که تابع کار نامیده می‌شود)، از یک فلز به فلز دیگر فرق کند، اما نباید به انرژی الکترون بستگی داشته باشد. بقیه به انرژی جنبشی الکترون تبدیل می‌شود، و در نتیجه، براساس این تصویر، رابطهٔ زیر باید بین

---

۱۰. این را می‌توان با یک آزمایش e/m اثبات کرد.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۵ داده‌های اثر فوتوالکتریک در نموداری از پتانسیل بازدارندهٔ لازم برای متوقف کردن شارش الکترونها از یک فلز (لیتیم)، یا معادل آن انرژی جنبشی الکترونها، برحسب بسامد نور فرودی. شیب خط h/e است.

سرعت الکترون v و بسامد نور ν برقرار باشد

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W \qquad (۱۶_۱)$$

این فرمول متضمن وجود آستانه و رابطهٔ خطی بین انرژی جنبشی الکترون و بسامد است. تناسب میان جریان و شدت چشمه را نیز می‌توان برحسب این کوانتومهای نور، که بعداً فوتون نامیده شدند، توضیح داد: چشمهٔ نور هر چه شدیدتر باشد فوتونهای بیشتری گسیل می‌کند، و این فوتونها به‌نوبهٔ خود می‌توانند الکترونهای بیشتری آزاد کنند.

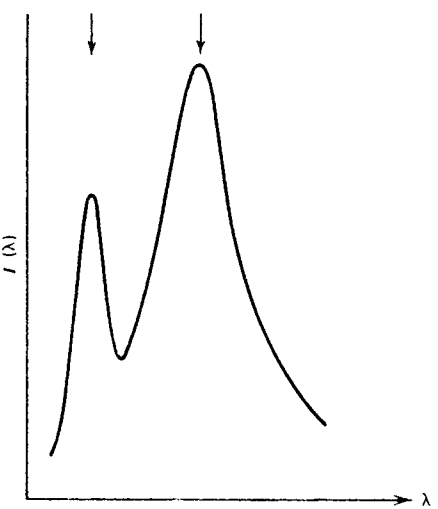
رابرت آندروز میلیکان آزمایشهای مفصلی انجام داد و درستی فرمول اینشتین را به‌اثبات رساند (شکل ۱ـ۵). آنچه آزمایشهای میلیکان و پیش از او نشان دادند این بود که اولاً نورگاهی مانند مجموعه‌ای

www.arsanjan.blogfa.com

از ذره‌ها رفتار می‌کند، و ثانیاً این "ذرات" می‌توانند منفرداً عمل کنند، و در نتیجه می‌توان وجود یک فوتون منفرد را پذیرفت و خواص آن‌را بررسی کرد. معلوم شده است که تابع کار W از مرتبهٔ چند الکترون ولت است ($1\text{eV} = ۱٫۶ \times ۱۰^{-۱۲}\text{erg}$)، و این نتیجه را می‌توان به خواص دیگر فلزات مربوط کرد.

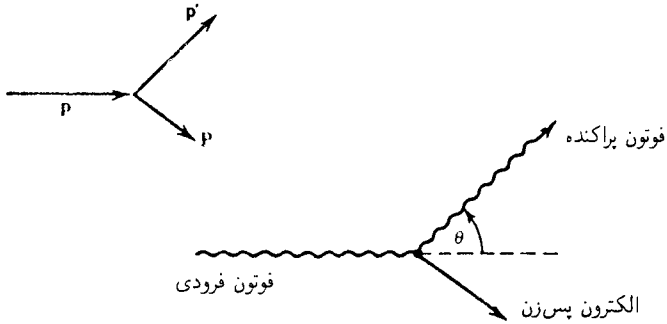
اثر کامپتون

آزمایشی که سرراست‌ترین مدرک ماهیت ذره‌ای تابش را در اختیار می‌گذارد اثر کامپتون است. آرتور هولی کامپتون کشف کرد تابشی با یک طول‌موج معین (در ناحیهٔ پرتو x) که از یک ورقهٔ فلزی می‌گذرد به‌گونه‌ای پراکنده می‌شود که با نظریهٔ تابش کلاسیک سازگار نیست. بنابه نظریهٔ کلاسیک، سازوکار این اثر عبارت است از تابش مجدد نور توسط الکترونهایی که با تابش فرودی به نوسان واداشته شده‌اند، و این منجر می‌شود به پیش‌بینی شدت مشاهده شده در زاویهٔ θ به‌صورت $(۱ + \cos^۲\theta)$ که به طول‌موج تابش فرودی بستگی ندارد. کامپتون دریافت که تابش پراکنده در یک زاویهٔ معین عملاً از دو مؤلفه تشکیل می‌شود: مؤلفه‌ای که طول‌موج آن همان طول‌موج تابش فرودی است، و مؤلفهٔ دیگری که طول‌موج آن نسبت به طول‌موج فرودی به مقداری که بستگی به زاویه دارد انتقال پیدا کرده است (شکل ۱ـ۶). کامپتون با در نظر گرفتن تابش فرودی به‌صورت باریکه‌ای از فوتونها که هر یک از آنها دارای انرژی $h\nu$ است و باعث پراکندگی کشسان یک الکترون منفرد می‌شود، توانست مؤلفهٔ "تغییریافته" را توضیح دهد. در یک برخورد کشسان، هم تکانه و هم انرژی باید پایسته باشند، و از این‌رو باید ابتدا تکانه‌ای به فوتون نسبت دهیم. با مقایسه با سینماتیک



شکل ۱ـ۶ طیف تابش پراکنده از کربن، نشاندهندهٔ خط تغییریافته در $۷۰۷۸٫۰\text{Å}$ (که طول‌موج تابش اولیه است) در سمت چپ و خط انتقال‌یافته در $۷۳۱۴٫۰\text{Å}$ در سمت راست.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۷ سینماتیک اثر کامپتون.

نسبیتی، نشان می‌دهیم که

$$p = \frac{h\nu}{c} \qquad (۱۷_۱)$$

اثبات به این ترتیب است که از رابطهٔ نسبیتی میان انرژی و تکانه، یعنی

$$E = [(m_0 c^2)^2 + (pc)^2]^{1/2} \qquad (۱۸_۱)$$

که در آن m_0 جرم سکون ذره است، نتیجه می‌گیریم که سرعت وابسته به این تکانه برابر است با

$$v = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{(m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{1/2}} \qquad (۱۹_۱)$$

برای فوتون این سرعت همیشه c است، و در نتیجه جرم سکون فوتون باید صفر باشد. بنابراین، رابطهٔ ۱ـ۱۸ به‌صورت زیر در می‌آید

$$E = pc \qquad (۲۰_۱)$$

که با جاگذاری $E = h\nu$ رابطهٔ ۱ـ۱۷ را به‌دست می‌دهد. همچنین می‌توان ۱ـ۲۰ را از بررسی انرژی و تکانهٔ موج الکترومغناطیسی به‌دست آورد اما اثبات قیاسی ساده‌تر است.

اکنون فوتونی با تکانهٔ اولیهٔ $\mathbf{p}$ در نظر بگیرید که با یک الکترون ساکن برخورد می‌کند. پس از برخورد، تکانهٔ فوتون $\mathbf{p}'$ است و الکترون با تکانهٔ $\mathbf{P}$ پس می‌زند. از پایستگی تکانه داریم (شکل ۱ـ۷)

www.arsanjan.blogfa.com

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{P} \qquad (۲۱\text{ـ}۱)$$

که از آن به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{P}^۲ = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^۲ = \mathbf{p}^۲ + \mathbf{p}'^۲ - ۲\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' \qquad (۲۲\text{ـ}۱)$$

رابطهٔ پایستگی انرژی به‌صورت زیر است

$$h\nu + mc^۲ = h\nu' + (m^۲c^۴ + P^۲c^۲)^{۱/۲} \qquad (۲۳\text{ـ}۱)$$

که در آن m جرم سکون الکترون است. در نتیجه،

$$\begin{aligned} m^۲c^۴ + P^۲c^۲ &= (h\nu - h\nu' + mc^۲)^۲ \\ &= (h\nu - h\nu')^۲ + ۲mc^۲(h\nu - h\nu') + m^۲c^۴ \end{aligned}$$

از طرف دیگر، ۱ـ۲۲ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$P^۲ = \left(\frac{h\nu}{c}\right)^۲ + \left(\frac{h\nu'}{c}\right)^۲ - ۲\frac{h\nu}{c} \cdot \frac{h\nu'}{c} \cos\ \theta$$

یا

$$P^۲c^۲ = (h\nu - h\nu')^۲ + ۲(h\nu)(h\nu')(۱ - \cos\ \theta) \qquad (۲۴\text{ـ}۱)$$

که در آن θ زاویهٔ پراکندگی فوتون است. بنابراین،

$$h\nu'(۱ - \cos\ \theta) = mc^۲(\nu - \nu')$$

یا، هم‌ارز آن

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(۱ - \cos\ \theta) \qquad (۲۵\text{ـ}۱)$$

اندازه‌گیریهای مؤلفهٔ تغییریافته با این پیش‌بینی کاملاً توافق دارند. خط تغییرنیافته ناشی از پراکندگی از تمام اتم است؛ اگر به‌جای m جرم اتم را قرار دهیم، انتقال طول‌موج بسیار کوچک می‌شود زیرا

www.arsanjan.blogfa.com

جرم اتم چندین هزار برابر جرم الکترون است. کمیت h/mc، که بعد طول دارد، طول‌موج کامپتون الکترون نامیده می‌شود، و اندازهٔ آن برابر است با

$$\frac{h}{mc} \cong ۲٫۴ \times ۱۰^{-۱۰}\text{cm} \qquad (۲۶_۱)$$

اندازه‌گیریهای پس‌زنی الکترون نیز انجام شده‌اند، و که با نظریه توافق دارند. علاوه بر این، با آزمایشهای همفرودی با تفکیک زمانی خوب معلوم شده است که فوتون خروجی و الکترون پس‌زن همزمان ظاهر می‌شوند. دربارهٔ درستی تعبیر این برخورد به‌عنوان برخوردی از نوع "توپ بیلیارد" معمولی، یعنی رفتار ذره‌گونهٔ فوتون، تردیدی وجود ندارد. از آنجا که تابش خواص موجی هم دارد و تداخل و پراش از خود نشان می‌دهد، بروز مشکلات مفهومی دور از انتظار نیست. این مشکلات وجود دارند، و در پایان این فصل دربارهٔ آنها بحث خواهیم کرد.

خواص موجی و پراش الکترون

در سال ۱۹۲۳، دوبروی از شباهت اصل فرما در اپتیک و اصل کمترین کنش در مکانیک به این نتیجه رسید که ماهیت دوگانهٔ موجی‌ـذره‌ای تابش باید همتایی به‌صورت ماهیت دوگانهٔ ذره‌ای‌ـموجی ماده داشته باشد. بنابراین، ذرات باید در شرایط خاصی خواص موجی داشته باشند، و دوبروی رابطه‌ای برای طول‌موج وابسته به ذره به‌صورت زیر به‌دست آورد[۱۱]

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad (۲۷_۱)$$

که در آن h ثابت پلانک و p تکانهٔ ذره است. کار دوبروی توجه بسیاری را به‌خود جلب کرد، و اشخاصی بر آن شدند تا با مشاهدهٔ پراش الکترون آن‌را تأیید کنند.[۱۲] مشاهدهٔ تجربی این اثر در آزمایشهای کلینتون جوزف دیویسون وگرمر صورت گرفت. دیویسون وگرمر دریافتند که در پراکندگی الکترونها از سطح یک بلور، پراکندگی ممتازی در بعضی راستاها دیده می‌شود.

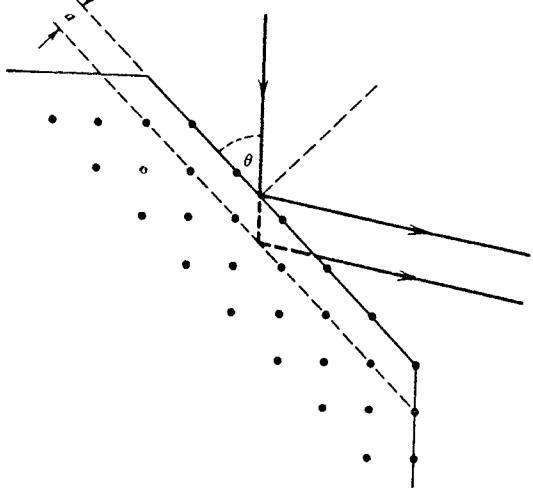
شکل ۱ـ۸ تصویر ساده شده‌ای است از آنچه اتفاق می‌افتد. در پراکندگی امواج از یک ساختار دوره‌ای، اختلاف فازی بین امواجی که از "صفحه‌های" پراکنندهٔ مجاور می‌آیند ایجاد می‌شود که مقدار آن $(۲\pi/\lambda)۲a \sin\theta$ است. اگر این اختلاف فاز برابر با $۲\pi n$ باشد، که در آن n یک عدد درست است، تداخل سازنده روی می‌دهد، یعنی وقتی که

$$\lambda = \frac{۲a \sin\theta}{n} \qquad (۲۸_۱)$$

۱۱. این رابطه مانند رابطهٔ فوتون $\lambda = c/\nu = hc/h\nu = hc/E = h/p$ است.

۱۲. تاریخچهٔ تأیید حدس دوبروی را می‌توان در کتاب ماکس یامر، که در زیرنویس ۱ معرفی شد، یافت.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۸ طرح کلی هندسهٔ پراکندگی الکترون.

نقش تداخلی را که دیویسون و گرمر در پراکندگی الکترون مشاهده کردند می‌توان با توجه به رابطهٔ ۱ـ۲۷ به فرمول بالا مربوط کرد. این تأیید گام مهمی در تکوین مکانیک موجی بود.

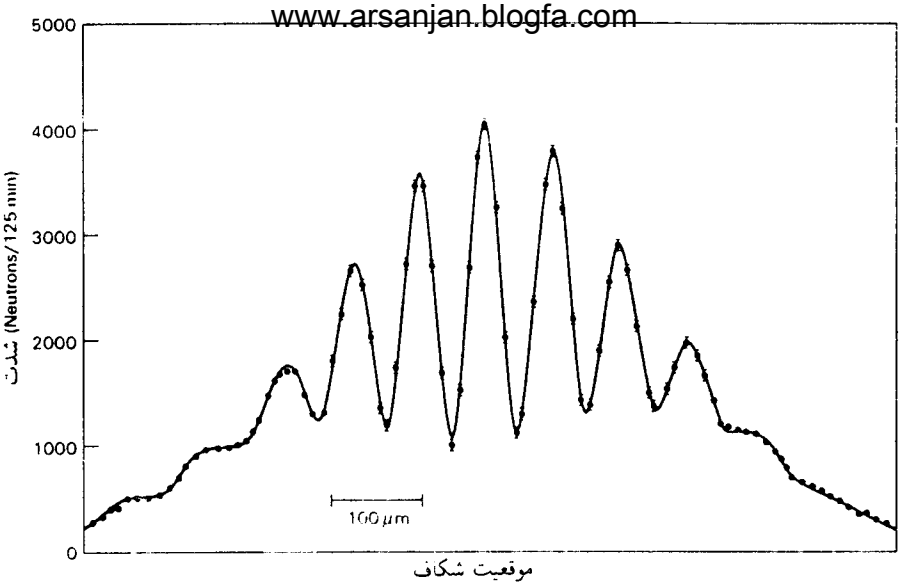
آزمایشهای پراش ذره از آن پس با باریکه‌های مولکول هیدروژن و هلیم، و با نوترونهای کند (شکل ۱ـ۹)، صورت گرفته‌اند. پراش نوترون مخصوصاً در مطالعهٔ ساختار بلورها مفید است. برای اینکه تصوری از نوع انرژیهایی که برای این آزمایشهای پراش لازم‌اند به‌دست آوریم، متذکر می‌شویم که فاصله‌های بلوری از مرتبهٔ آنگستروم هستند. این ثابت توری در آزمایش دیویسون‌ـگرمر، که در آن از نیکل استفاده شد، برابر بود با $a = ۲٫۱۵\text{Å}$. بنابراین، λ از مرتبهٔ $۱۰^{-۸}\text{cm}$ است، و در نتیجه $p = h/\lambda \cong ۶٫۶ \times ۱۰^{-۱۹}\text{gm cm/s}$. بدین‌ترتیب، انرژی جنبشی الکترون برابر است با $p^۲/۲m_e = (۶٫۶ \times ۱۰^{-۱۹})^۲/(۲ \times ۰٫۹ \times ۱۰^{-۲۷}) \cong ۲٫۵ \times ۱۰^{-۱۰}\text{ergs}$ و برای نوترون داریم

$$p^۲/۲m_n = (m_e/m_n) \times (\text{انرژی الکترون}) \cong (۱٫۸۴۰) \times ۲٫۵ \times ۱۰^{-۱۰}\text{ergs}$$
$$\cong ۱٫۳ \times ۱۰^{-۱۳}\text{ergs}$$

این انرژیها برحسب واحد مناسبتر الکترون ولت به‌ترتیب تقریباً برابر با ۱۶۰eV و $۰٫۰۸\text{eV}$ هستند.

در یک مقیاس ماکروسکوپیک، جنبه‌های موجی ذره‌ها را نمی‌توان مشاهده کرد. طول‌موج دوبروی برای قطره‌ای به اندازهٔ $۰٫۱\text{mm}$ که با سرعت ۱۰cm/s حرکت می‌کند برابر است با $\lambda \cong ۶٫۶ \times ۱۰^{-۲۷}/۴ \times ۱۰^{-۵} \cong ۱٫۶ \times ۱۰^{-۲۲}\text{cm}$ چون "اندازهٔ" پروتون حدود $۱۰^{-۱۳}\text{cm}$

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۹ نقش پراش دوشکافی با طول‌موج ۱۸٫۵Å ≈ ۸. [۱۳]

است، بدیهی است که هیچ راهی برای مشاهدهٔ خواص موجی جسمی که اندازهٔ آن بسیار بیشتر از 10^{-4}cm است وجود ندارد. در مورد خواص ذره‌ای تابش، این کوچکی h است که ویژگیهای کلاسیک را تعیین می‌کند، به این معنی که جنبه‌های دوگانه تنها وقتی ظاهر می‌شوند که حاصلضرب تکانه و اندازه از مرتبهٔ h باشد. خواهیم دید که صورتبندی مکانیک کوانتومی این وضعیت را به‌خوبی توصیف می‌کند.

اتم بور

الگوی سیاره‌ای رادرفورد

کشف پرتوزایی توسط هانری بکرل در سال ۱۸۹۶ ابزار لازم برای پرداختن به ساختار اتم را، که مکمل مطالعهٔ گسیل تابش از اتمها بود، فراهم کرد. ارنست رادرفورد فیزیکدان پیشرو در مطالعهٔ ساختار اتمی بود، و نخستین کسی بود که از ذراتی که در واپاشی پرتوزا گسیل می‌شوند به‌عنوان پرتابه استفاده کرد. آزمایشهایی که هانس گایگر و مارسدن در سال ۱۹۰۸ به راهنمایی او انجام دادند، و در آنها ذرات α به ورقه‌های نازک برخورد می‌کردند، نشان دادند که کسری از ذره‌های α

۱۳. اقتباس مجاز از مقالهٔ

A Zeilinger, R. Gähler, C. G. Shull, W. Treimer, and W. Mampe, *Rev. Mod. Phys.* 60 1067 (1988).

www.arsanjan.blogfa.com

که به‌طور شگفت‌انگیزی بزرگ بود در زاویه‌های بزرگ پراکنده می‌شوند، و این نتیجه با پیش‌بینیهای مبتنی بر الگوی اتمی تامسون کاملاً ناسازگار بود. در الگوی تامسون فرض شده است که الکترونها در توزیعی از بار مثبت که حجم تمام اتم را تشکیل می‌دهد غوطه‌ور هستند. الکترونها ذرات α را منحرف نمی‌کنند زیرا جرم آنها 10^{4} بار کوچکتر است. بنابراین، بار مثبت باید باعث انحراف ذرات α باشد، و انحراف بزرگ‌ـزاویه ایجاب می‌کند که پتانسیل در سطح توزیع بار بزرگ باشد. این به‌نوبهٔ خود ایجاب می‌کند که بار مثبت به ناحیه‌ای بسیار کوچکتر از حجم اتم محدود باشد. رادرفورد الگوی جدیدی را پیشنهاد کرد که این داده‌ها را توجیه می‌کرد. در این الگو، تمام بار مثبت (و تقریباً تمام جرم) اتم در ناحیهٔ کوچکی در وسط اتم متمرکز شده است. این هستهٔ باردار مثبت الکترونهای باردار منفی را جذب می‌کند و چون قانون نیرو به‌صورت $1/r^2$ است الکترونها در مدارهای دایره‌ای یا بیضوی حول هسته حرکت می‌کنند.

این الگو اگرچه توجیه کمّی مناسبی برای داده‌های پراکندگی ذرات α به‌دست می‌داد اما با دو مشکل حل‌نشدنی مواجه بود. از آنجا که این الگو مستلزم حرکتی دوره‌ای برای الکترونها بود نمی‌توانست طیفهای تابش ناشی از اتمها را توضیح دهد، که ساختار هماهنگ منتظره‌ای (در قیاس با ریسمان مرتعش) ندارند و ساختار آنها به‌صورت زیر است

$$\frac{1}{\lambda} = \text{const.} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \qquad (۲۹\text{ـ}۱)$$

که در آن n_1 و n_2 اعداد درست هستند. این الگو همچنین سازوکاری برای پایداری اتمها نداشت: یک الکترون در مدار دایره‌ای یا بیضوی دائماً شتاب دارد و بنابه نظریهٔ الکترومغناطیس باید تابش کند. اتلاف مداوم انرژی با سقوط الکترونها به درون هسته در مدت زمان بسیار کوتاهی (از مرتبهٔ $10^{-10}\,s$) به رمبش اتم منجر می‌شود.

اصول موضوعهٔ بور

نیلز بور در سال ۱۹۱۳، درست دو سال پس از پیشنهاد الگوی رادرفورد، اصولی را وضع کرد که، با بریدن از نظریهٔ کلاسیک، ساختار طیفی را توضیح می‌دادند و از مسئلهٔ پایداری اجتناب می‌کردند. بور فرض کرد که:

۱. الکترونها در مدارهایی حرکت می‌کنند که مقید به این شرط هستند که تکانهٔ زاویه‌ای آنها مضربی درستی از $h/2\pi$ باشد، یعنی، برای مدارهای دایره‌ای به شعاع r، سرعت vی الکترونها محدود به رابطهٔ زیر است

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} \qquad (۳۰\text{ـ}۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com
و علاوه بر این، الکترونها در این مدارها با اینکه شتاب دارند تابش نمی‌کنند. می‌گوییم این الکترونها در حالتهای پایا هستند.

۲. الکترونها می‌توانند گذارهای ناپیوسته‌ای از یک مدار مجاز به مدارهای مجاز پایین‌تر انجام دهند، و تغییر انرژی، $E - E'$، به‌صورت تابش با بسامد زیر ظاهر می‌شود

$$\nu = \frac{E - E'}{h} \qquad (۳۱_۱)$$

اتم می‌تواند با جذب تابش الکترونهای خود را وادار به گذار به مداری با انرژی بیشتر کند.

اگر مدارهای دایره‌ای را در نظر بگیریم،[۱۴] پیامدهای این اصول برای اتمهای تک‌الکترونی مانند هیدروژن، هلیم یک بار یونیده، و غیره را می‌توان به‌آسانی به‌دست آورد. اگر بار هسته Ze، بار الکترون $e-$، و شعاع مدار r باشد، و اگر جرم هسته را بینهایت بگیریم، از موازنهٔ نیروی کولن با نیروی مرکزگریز داریم

$$\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad (۳۲_۱)$$

از ترکیب این رابطه با ۱ـ۳۰ به رابطه‌های زیر می‌رسیم

$$v = \frac{2\pi e^2 Z}{hn} \qquad (۳۳_۱)$$

و

$$r = \frac{1}{4\pi^2}\,\frac{n^2h^2}{Ze^2m} \qquad (۳۴_۱)$$

انرژی برابر است با

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Ze^2}{r} = -\frac{2\pi^2e^4Z^2m}{h^2n^2} \qquad (۳۵_۱)$$

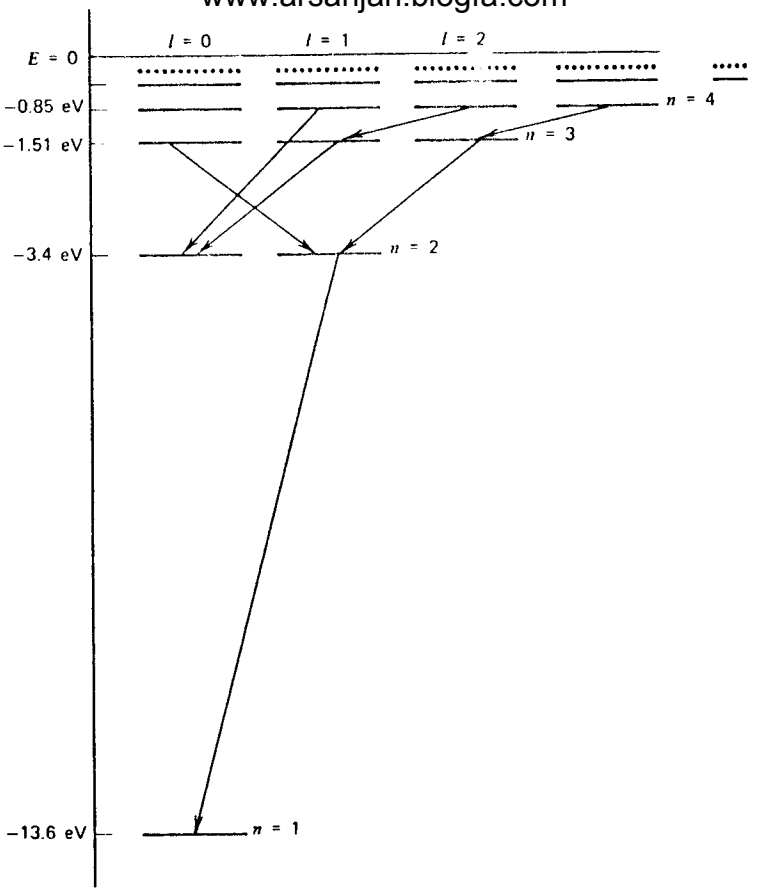
که از آن با توجه به‌اصل موضوعهٔ ۲ بلافاصله رابطهٔ کلی ۱ـ۲۹ به‌دست می‌آید (شکل ۱ـ۱۰).

پیش از محاسبهٔ این کمیتها برای به‌دست آوردن تصوری از اندازهٔ آنها، بعضی نمادهای بسیار مفید را معرفی می‌کنیم. اولاً، در اکثر فرمولهای مکانیک کوانتومی $h/2\pi$ بیشتر از h ظاهر می‌شود،

---

۱۴. اگر مدارهای مجاز بیضوی باشند، ساختار بسیار غنی‌تری پدیدار می‌شود. این موضوع را در فصل ۱۲ بررسی می‌کنیم.

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۱۰ طیف اتم هیدروژن براساس الگوی اتمی بور. وجود اعداد کوانتومی l از بحث مدارهای بیضوی نتیجه می‌شود. خطهای واصل ترازهای انرژی بعضی از گذارهای اتمی غالب را نشان می‌دهند.

و از این‌رو آن‌را با یک نماد خاص نشان می‌دهیم:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = ۱٫۰۵۴۵ \times ۱۰^{-۲۷} \mathrm{erg\ s} \qquad (۳۶_۱)$$

ثانیاً، برای اینکه رابطه‌های مربوط به انرژی ساده بمانند، به‌جای ν از بسامد زاویه‌ای ω استفاده می‌کنیم:

$$\omega = 2\pi\nu \qquad (۳۷_۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

بنابراین، ۱ـ۱۳ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\omega = \frac{E - E'}{h} \qquad (۳۸_۱)$$

همچنین، کوانتوم تابش حامل انرژی زیر است

$$E = h\omega \qquad (۳۹_۱)$$

ثالثاً، گاهی مناسبتر است از "طول‌موج کاهیده" استفاده کنیم:

$$\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega} \qquad (۴۰_۱)$$

بنابراین، رابطهٔ دوبروی به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (۴۱_۱)$$

شرط کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای بور به‌صورت زیر درمی‌آید

$$mvr = nh (n = ۱, ۲, ۳, \ldots) \qquad (۴۲_۱)$$

و سرانجام، بهتر است "ثابت ساختار ریز" بدون بعد را به‌کار ببریم:

$$\alpha = \frac{e^2}{hc} = \frac{۱}{۱۳۷٫۰۳۸۸} \qquad (۴۳_۱)$$

که تقریباً ۱/۱۳۷ است. برحسب این کمیتهای جدید، رابطه‌های ساده‌تر زیر را به‌دست می‌آوریم

$$\frac{v}{c} = \frac{Z\alpha}{n} \qquad r = \frac{n^2}{Z\alpha}\,\frac{h}{mc} \qquad (۴۴_۱)$$

و

$$E = -\frac{۱}{۲} mc^2 \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \qquad (۴۵_۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

توجه کنید که شعاع، که بعد طول دارد، برحسب h/mc یعنی طول‌موج کاهیدهٔ کامپتون الکترون، و انرژی برحسب mc^2 نوشته شده است. در تمام محاسبه‌های اتمی، نتیجه‌های مربوط به انرژی، طول، زمان، و تکانه را به‌ترتیب برحسب mc^2، h/mc، h/mc^2، و mc خواهیم نوشت. تکانهٔ زاویه‌ای همیشه به‌صورت مضربهای h ظاهر می‌شود.

اکنون بعضی از کمیتهای حاصل از نظریهٔ بور را محاسبه می‌کنیم. با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} mc^2 &\cong ۰٫۵۱ \times ۱۰^6 \text{eV} \\ &\cong ۰٫۵۱ \text{ MeV} \\ \frac{h}{mc} &\cong ۳٫۹ \times ۱۰^{-11} \text{ cm} \\ \frac{h}{mc^2} &\cong ۱٫۳ \times ۱۰^{-21} \text{s} \end{aligned} \qquad (۴۶_۱)$$

نتیجه می‌گیریم که

(الف) شعاع کوچکترین مدار بور (با $n = ۱$) برابر است با

$$a_0 = \frac{۱۳۷}{Z}\frac{h}{mc} = \frac{۰٫۵۳}{Z}\text{Å} \qquad (۴۷_۱)$$

(ب) انرژی بستگی الکترون در کوچکترین مدار بور، یعنی انرژی لازم برای بردن الکترون به حالت $E = ۰$ (متناظر با $n = \infty$) برابر است با

$$E = \frac{۱}{۲}mc^2(Z\alpha)^2 = ۱۳٫۶Z^2\text{eV} \qquad (۴۸_۱)$$

بنابراین، به‌عنوان مثال، گذار از حالت $n = ۱$ به حالت $n = ۲$ برای هیدروژن ($z = ۱$) متناظر است با تغییر انرژی $۱۰٫۲\text{eV} = ۱۳٫۶(۱ - ۱/۴)\text{eV}$. بسامد تابش گسیل‌شده را می‌توان از تبدیل این مقدار به ارگ محاسبه کرد، اما بهتر است این محاسبه را به‌صورت زیر انجام دهیم

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{mc^2\alpha^2\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right)}{۲h} = \frac{۳\alpha^2}{۸}\frac{۱}{۱٫۳ \times ۱۰^{-21}}\text{rad/s} \\ &\cong ۱٫۵ \times ۱۰^{16}\text{rad/s} \end{aligned}$$

www.arsanjan.blogfa.com

طول‌موج متناظر با آن برابر است با

$$\lambda = ۲\pi\frac{c}{\omega} = \frac{۱۶\pi}{۳\alpha^۲}\frac{h}{mc}$$
$$\cong ۱۲۰۰ \text{ Å}$$

که در ناحیهٔ فرابنفش قرار دارد.

موفقیت نظریهٔ بور در اتمهای هیدروژنگونه انگیزهٔ مهمی شد برای تحقیق بیشتر روی "اتم بور". اما با وجود دستاوردهای فوق‌العادهٔ بور و دیگران، واضح بود که این نظریه موقتی است. نظریهٔ بور چیزی در این باره که الکترونها کی باید جهشهای خود را انجام دهند نمی‌گوید؛ همچنین، قاعدهٔ کوانتش به دستگاههای دوره‌ای محدود می‌شد. بیان کلی‌تر زومرفلد و ویلسون، یعنی

$$\int_{\text{مسیر بسته}} p\,dq = nh \qquad (۴۹\text{-}۱)$$

که در آن p تکانهٔ مربوط به مختصهٔ q است، در بررسی هیچ مسئله‌ای، بجز آنچه به ترازهای اتمی هیدروژن مربوط بود، مفید واقع نشد.

کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای در وضعیتهای دیگر نیز صادق است. کاربرد آن در مدارهای بیضوی تصویر کاملتری از طیف اتمهای هیدروژنگونه به‌دست داد، و در آزمایشهای اشترن و گرلاخ در سال ۱۹۲۲ مستقیماً مشاهده شد.

اصل تطابق

نیلز بور از این فکر که نظریهٔ کوانتومی او باید هر جا نظریهٔ کلاسیک کارایی دارد در آن ادغام شود بهرهٔ فراوان گرفت. این فکر به‌صورت اصل تطابق فرمولبندی شد. به زبان فنی، این اصل می‌گوید وقتی "اعداد کوانتومی" بزرگ باشند، مثلاً به‌ازای n بزرگ در اتم بور، حد کلاسیک باید احراز شود. البته همینکه یک نظریهٔ سازگار برای پدیده‌های کوانتومی ساخته شد خود به‌خود فیزیک کلاسیک را به‌عنوان یک حد در بر دارد، اما این اصل در راهنمایی به حدسهای نظری بسیار مفید بوده است، و همین اصل بود که هایزنبرگ را به‌مرحله‌ای رهنمون شد که توانست پرش غول‌آسای خود را به سمت مکانیک کوانتومی انجام دهد. برای اینکه نشان دهیم چگونه اصل تطابق برای الگوی اتمی بور صادق است، بسامد تابش گسیل‌شده را وقتی الکترون از مداری با عدد کوانتومی $n+۱$، که در آن n بسیار بزرگ است، به مداری با عدد کوانتومی n "جهش" می‌کند در نظر می‌گیریم. این زمینهٔ مناسبی برای جستجوی حد کلاسیک است، زیرا تکانهٔ زاویه‌ای nh واقعاً بسیار بزرگتر از h است. از لحاظ کلاسیک، الکترونی که با سرعت v در مدار دایره‌ای حرکت می‌کند باید با بسامد

www.arsanjan.blogfa.com

حرکتش تابش کند، یعنی با بسامد

$$\nu_{\rm cl} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{Z\alpha c}{n}\,\frac{Z\alpha mc}{2\pi n^2\hbar} = \frac{(Z\alpha)^2 mc^2}{2\pi\hbar}\,\frac{1}{n^3} \qquad (۵۰\text{ـ}۱)$$

از طرف دیگر، بسامد تابش وابسته به این گذار، بنابه ۱ـ۳۱، برابر است با

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\hbar}\,\frac{mc^2}{2}(Z\alpha)^2\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] \qquad (۵۱\text{ـ}۱)$$

که به‌ازای $n \gg 1$ به $\nu_{\rm cl}$ میل می‌کند. توجه کنید که این نتیجه بسیار مهم است، زیرا تنها بسامد وابسته به گذار $n+1 \to n$ است که با بسامد اصلی کلاسیک متناظر است. تابش وابسته به جهش $n+2 \to n$، حتی در حد n بزرگ، همتای کلاسیک ندارد. در فصل ۲۱ خواهیم دید که در مکانیک کوانتومی برای "مدارهای دایره‌ای" گذارهای $n+1 \to n$ وجود ندارند.

مسئلهٔ ذره‌ـموج

چنانکه از ملاحظات زیر می‌توان دید، این واقعیت که تابش هم خواص موجی و هم خواص ذره‌ای از خود نشان می‌دهد مشکل مفهومی عمیقی را به‌وجود می‌آورد.

۱. از بحث اثر فوتوالکتریک، به‌خصوص همبستگی تعداد الکترونهای گسیل‌شده با شدت تابش، استنباط می‌شود که شدت تابش الکترومغناطیسی با تعداد فوتونهای گسیل‌شده از چشمه متناسب است. اکنون یک آزمایش ذهنی[۱۵] را در نظر می‌گیریم که در آن تابش توسط یک دستگاه دوشکافی پراشیده می‌شود. فرض کنید شدت چشمه را آن‌قدر کم می‌کنیم که، به‌طور متوسط، در هر ساعت تنها یک فوتون به پرده برسد. توجه کنید که باید با فوتونهای کامل سروکار داشته باشیم: اثر کامپتون و اثر فوتوالکتریک نشان می‌دهند که نمی‌توان یک فوتون را به‌دو قسمت با بسامد ω اما انرژی کمتر از $\hbar\omega$ تقسیم کرد. کاهش شدت تابش فرودی نمی‌تواند تأثیری بر نقش پراش کلاسیک داشته باشد، زیرا این کاهش در واقع تنها مدت زمان انتقال تعداد زیادی فوتون از چشمه به پرده را افزایش می‌دهد. فوتونهایی که با فاصله یک ساعت به پرده می‌رسند مسلماً نمی‌توانند همبسته باشند، و بنابراین می‌توان این فرایند را از نوع یک فوتون در هر نوبت در نظر گرفت. واضح است که یک فوتون، به‌عنوان ذره، مسلماً از یکی از دو شکاف می‌گذرد. اگر به دستگاه آزمایش ذهنی خود یک دیدبان کوچک اضافه کنیم که اعلام کند فوتون از شکاف "۱" عبور کرده است یا از شکاف

---

۱۵. آزمایش ذهنی آزمایشی است که می‌توان آن‌را به‌تصور درآورد، یعنی آزمایشی که با قوانین شناختهٔ فیزیک سازگار است اما از لحاظ فنی نمی‌توان آن‌را انجام داد. به‌عنوان مثال، اندازه‌گیری شتاب ناشی از گرانی در سطح خورشید یک آزمایش ذهنی است، در حالی‌که اندازه‌گیری انتقال دوپلری برای نور خورشید در سفینه‌ای که با دو برابر سرعت نور حرکت می‌کند بی‌معنی است.

www.arsanjan.blogfa.com

"۲"، می‌توانیم فوتونها را به‌دو دسته، وابسته به دو شکاف، تقسیم کنیم. برای دستهٔ اول، می‌توانستیم شکاف ۲ را ببندیم، زیرا فوتون از آن نمی‌گذشت؛ برای دستهٔ دوم، می‌توانستیم شکاف ۱ را ببندیم. بنابراین، اگر آزمایش را با یک شکاف بسته در نیمی از زمان، و شکاف بستهٔ دیگر در نیمهٔ دیگر زمان، تکرار کنیم انتظار داریم نقش روی پرده، مثلاً یک صفحهٔ عکاسی، همانی باشد که قبلاً به‌دست آوردیم. اما چنین نیست، زیرا در آزمایش دوم نقش تداخل به‌دست نمی‌آید. در نتیجه، یک ناسازگاری وجود دارد که منشأ آن در این فرض است که حضور دیدبان، که نشان می‌دهد فوتون از کدام شکاف گذشته است، تأثیری بر آزمایش ندارد. در بحث اصل عدم قطعیت هایزنبرگ خواهیم دید که عمل دیدبان نقش تداخل را از میان می‌برد، و در نتیجه ناسازگاری نداریم. در این مرحله، کافی است متذکر شویم که اگر دیدبان وجود نداشته باشد هر فوتون مانند یک موج عمل می‌کند، و این پرسش که فوتون از کدام شکاف گذشته است بی‌معنی است. البته هنوز می‌توان برای شدت تابش در هر شکاف یک مقدار میانگین تعریف کرد: این تعریف الزاماً به‌معنای آن است که برای فوتونهای منفرد تنها می‌توان از احتمال عبور از این یا آن شکاف صحبت کرد.

۲. برای درک عبور تابش قطبیده از یک تحلیلگر، باز هم باید از مفهوم احتمال استفاده کنیم. می‌دانیم اگر یک باریکهٔ تابش پس از عبور از یک قطبشگر دارای شدت I_0 باشد این شدت پس از عبور باریکه از تحلیلگری که محور آن با محور قطبشگر زاویهٔ α می‌سازد به $I_0 \cos^2 \alpha$ کاهش می‌یابد. این تضعیف را برحسب فوتونهای منفردی که تقسیم‌ناپذیر هستند تنها به این‌صورت می‌توان توضیح داد که بگوییم فوتون با احتمال عبوری که از ساختمان دستگاه یعنی از زاویهٔ α پیروی می‌کند از دستگاه می‌گذرد یا نمی‌گذرد.

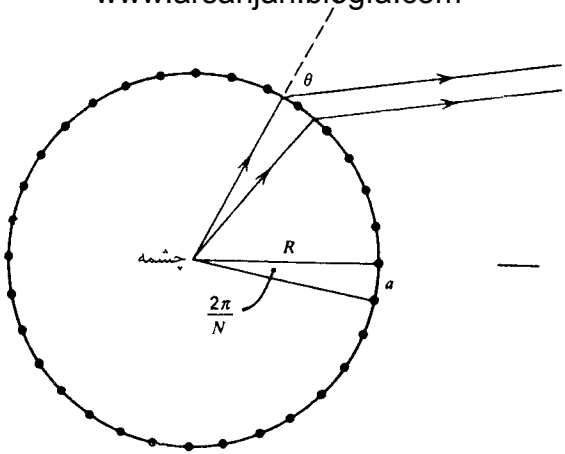
۳. به‌همین ترتیب، تابش از یک ستارهٔ دور را در نظر بگیرید. این ستاره چشمهٔ امواج کروی ناشی از برانگیختگی میدان الکترومغناطیسی است که با سرعت c منتشر می‌شوند. اما برحسب فوتونهای منفرد، بی‌معنی است که فرض کنیم یک فوتون معین از این چشمه روی کره‌ای به شعاع ct (که در آن t از لحظه‌ای حساب می‌شود که فوتون گسیل شده است) گسترده شده است، زیرا جمع شدن این فوتون در یک نقطه از صفحهٔ عکاسی یا شبکیهٔ چشم، اگر "واقعاً" اتفاق می‌افتاد، خلاف عقل سلیم بود. اما می‌توان این توزیع کروی را به‌عنوان تعیین‌کنندهٔ احتمال یافتن یک فوتون در یک زاویهٔ فضایی معین تعبیر کرد.

۴. گاهی ممکن است یک آزمایش معین را هم به زبان ذره‌ای و هم به زبان موجی تعبیر کرد، اما ارتباط میان این دو توصیفِ مکمل یک جنبهٔ غیرکلاسیک در جای دیگری وارد می‌کند. دیکی و ویتکه[16] آزمایش ذهنی زیر را ابداع کرده‌اند (شکل ۱ـ۱۱). یک قفس استوانه‌ای در نظر بگیرید که میله‌های آن به‌طور منظم و با فاصلهٔ زیر از یکدیگر قرار گرفته‌اند

$$a = 2\pi \frac{R}{N}$$

16. R H Dicke and J P Wittke, *Introduction to Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading Mass (1960).

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۱ـ۱۱ مقطع عرضی "قفس" دیکی‌ـویتکه، که میله‌های هم‌فاصله و کمیتهای هندسی مربوط به آن‌را نشان می‌دهد.

که در آن R شعاع استوانه و N تعداد میله‌ها است. تابش گسیل‌شده از چشمه‌ای روی محور استوانه را در نظر بگیرید. میله‌ها به‌صورت توری پراش عمل می‌کنند. اگر باریکه در زاویهٔ θ نسبت به راستای اولیه‌اش خارج شود، شدت به‌شرطی بیشینه است که زاویه و طول‌موج در رابطهٔ زیر صدق کنند

$$a \sin \theta = n\lambda \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \dots)$$

یعنی

$$\lambda = \frac{۲\pi R \sin \theta}{Nn} \qquad (۵۲\text{ـ}۱)$$

همچنین می‌توان قلهٔ شدت را با این فرض تعبیر کرد که ذرات در زاویهٔ θ از میله‌های قفس پراکنده می‌شوند. تکانهٔ منتقل‌شده به قفس $p \sin \theta$ است و در نتیجه تکانهٔ زاویه‌ای منتقل شده به قفس برابر است با

$$L = pR \sin \theta \qquad (۵۳\text{ـ}۱)$$

اما اگر از رابطهٔ دوبروی، $p = ۲\pi h/\lambda$، استفاده کنیم به‌دست می‌آوریم

$$L = \frac{۲\pi hNn}{۲\pi R \sin \theta} \cdot R \sin \theta = Nnh \qquad (۵۴\text{ـ}۱)$$

www.arsanjan.blogfa.com

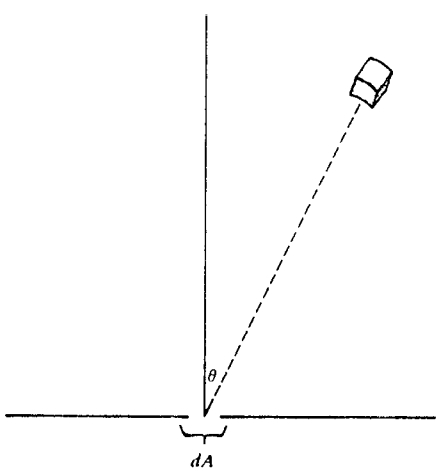
یعنی، تکانهٔ زاویه‌ای کوانتیده است! عامل N، چنانکه بعداً روشن خواهد شد، به‌این واقعیت مربوط می‌شود که اگر قفس را به‌اندازهٔ زاویهٔ $2\pi/N$ بچرخانیم تغییری در وضعیت آن داده نمی‌شود.

در سال ۱۹۲۵ نظریهٔ جدید مکانیک کوانتومی با کارهای ورنر هایزنبرگ، ماکس بورن، پاسکال یوردان، اروین شرودینگر، و پل دیراک آغاز شد. این نظریه راهی بود برای آشتی مفاهیم متعارض به‌بهای کنار گذاشتن مقداری از تفکرات کلاسیک. یکی از لذتهای دانشجوی فیزیک بودن همین توانایی پی بردن به این نظریهٔ زیبا و پیشرفتهای عظیمی است که این نظریه در درک ما از خواص ماده به‌وجود آورده است.

مسائل

۱ـ۱ رابطهٔ ۱ـ۱ میان چگالی انرژی در کاواک و توان گسیل را ثابت کنید.

[راهنمایی: برای این کار، از شکل زیر استفاده کنید. بزرگی جزء حجم dV برابر است با $r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ که در آن r فاصله از مبدأ (واقع در روزنه‌ای به‌مساحت dA)، θ زاویه با محور قائم، و ϕ زاویهٔ سمتی حول محور عمود بر روزنه است. انرژی موجود در این جزء حجم برابر است با dV ضرب‌در چگالی انرژی. تابش همسانگرد است، بنابراین آنچه خارج می‌شود حاصلضرب زاویهٔ فضایی $dA\cos\theta/4\pi r^2$ در انرژی است. از این رابطه باید روی زاویه‌های ϕ و θ، و اگر شارش انرژی در زمان Δt مورد نظر باشد، روی r از ۰ تا $c\Delta t$ ــ فاصله‌ای که تابش در این بازه می‌پیماید ــ انتگرال گرفت.]



۱ـ۲ با استفاده از ۱ـ۱ و ۱ـ۱۲، فرمولی برای آهنگ کل تابش در واحد سطح جسم سیاه به‌دست آورید. فرض کنید خورشید مانند جسم سیاه تابش می‌کند. شعاع خورشید $R_\odot = ۷ \times ۱۰^{۱۰}\,\mathrm{cm}$، فاصلهٔ متوسط خورشید از زمین $d_\odot = ۱{,}۵ \times ۱۰^{۱۳}\,\mathrm{cm}$، و ثابت خورشیدی، یعنی مقدار انرژی

www.arsanjan.blogfa.com

که از خورشید وقتی بالای سر است به زمین می‌رسد، برابر است با $۱٫۴ \times ۱۰^{۶} \mathrm{erg/cm^{۲}s}$. با توجه به این اطلاعات، دمای سطح خورشید را براورد کنید.

۱ـ۳ با استفاده از ۱ـ۸، چگالی انرژی در بازهٔ طول‌موج $\Delta\lambda$ را به‌دست آورید. با استفاده از این جواب، مقدار $\lambda = \lambda_{(\max)}$ را، که به‌ازای آن این چگالی بیشینه است، محاسبه کنید. نشان دهید $\lambda_{(\max)}$ به‌صورت b/T است، و b را به‌دست آورید. با استفاده از براورد دمای سطح خورشید، $\lambda_{(\max)}$ را برای تابش خورشیدی تعیین کنید.

[راهنمایی: در محاسبهٔ b به‌جواب معادلهٔ $۵e^{-x} = (۵ - x)$ نیاز دارید. این معادله را به روش نموداری یا روش تقریبهای متوالی، که در آن ابتدا قرار می‌دهید $x = ۵ - \epsilon$ (با $\epsilon \ll ۱$)، حل کنید.]

۱ـ۴ نور فرابنفش با طول‌موج ۳۵۰۰Å به‌سطح پتاسیم می‌تابد. بیشینهٔ انرژی فوتوالکترونها $۱٫۶\mathrm{eV}$ است. مقدار تابع کار پتاسیم را محاسبه کنید؟

۱ـ۵ بیشینهٔ انرژی فوتوالکترونهای ناشی از آلومینیم برای تابش ۲۰۰۰Å برابر با $۲٫۳\mathrm{eV}$ و برای تابش ۲۵۸۰Å برابر با $۰٫۹\mathrm{eV}$ است. با استفاده از این داده‌ها، ثابت پلانک و تابع کار آلومینیم را به‌دست آورید.

۱ـ۶ یک فوتون $۱۰۰\mathrm{MeV}$ به یک پروتون ساکن برخورد می‌کند. بیشترین اتلاف انرژی ممکن برای این فوتون چقدر است؟

۱ـ۷ یک فوتون $۱۰۰\mathrm{keV}$ با یک الکترون ساکن برخورد می‌کند و در زاویهٔ ۹۰° پراکنده می‌شود. انرژی فوتون بعد از پراکندگی چقدر است؟ راستای پس‌زدن الکترون و انرژی جنبشی آن‌را برحسب الکترون ولت به‌دست آورید.

۱ـ۸ الکترونی با انرژی $۱۰۰\mathrm{MeV}$ با فوتونی به طول‌موج $۳ \times ۱۰^{۷} \text{Å}$ (مربوط به زمینهٔ جهانی تابش جسم سیاه) برخورد می‌کند. بیشترین انرژیی که این الکترون از دست می‌دهد چقدر است؟

۱ـ۹ باریکه‌ای از پرتوهای x توسط الکترونهای ساکن پراکنده می‌شود. اگر طول‌موج پرتوهای x که در زاویهٔ ۶۰° نسبت به محور باریکه پراکنده شده‌اند $۰٫۰۳۵ \text{Å}$ باشد، انرژی پرتوهای x باریکه را به‌دست آورید.

۱ـ۱۰ یک هستهٔ نیتروژن (با جرم تقریبی ۱۴× جرم پروتون) فوتونی با انرژی $۶٫۲\mathrm{MeV}$ گسیل می‌کند. اگر این هسته در ابتدا ساکن باشد، انرژی پس‌زنی هسته (برحسب الکترون ولت) چقدر است؟

۱ـ۱۱ بلوری با فاصلهٔ صفحات $۳٫۲ \text{Å}$ را در نظر بگیرید. مقدار انرژی (الف) الکترونها و (ب) هسته‌های هلیم (با جرم تقریبی ۴× جرم پروتون) چقدر باید باشد تا حداکثر سه بیشینهٔ تداخل را مشاهده کنیم؟

۱ـ۱۲ کوچکترین فاصلهٔ تفکیک‌پذیر برای میکروسکوپ از مرتبهٔ بزرگی طول‌موج به‌کار رفته است. در یک میکروسکوپ الکترونی، مقدار انرژی الکترونها چقدر باید باشد تا فاصله‌های (الف) ۱۵۰Å و (ب) ۵Å را تفکیک کند؟

www.arsanjan.blogfa.com

۱ـ۱۳ اگر فرض کنیم که در یک حالت مانای اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای قرار می‌گیرد که محیط آن مضرب درستی از طول‌موج الکترون است، می‌توان نتایج نظریهٔ بور را به‌دست آورد. این کار را انجام دهید.

۱ـ۱۴ می‌خواهیم فاصلهٔ میان صفحه‌های مجاور در یک بلور را اندازه بگیریم. اگر پرتوهای x با طول‌موج ۰٫۵Å در زاویهٔ ۵° آشکارسازی شوند، این فاصله چقدر است؟ بیشنیهٔ دوم در چه زاویه‌ای مشاهده می‌شود؟

۱ـ۱۵ با استفاده از قاعده‌های کوانتش بور، ترازهای انرژی یک نوسانگر هماهنگ را، که برای آن انرژی $p^2/2m + m\omega^2 r^2/2$ یعنی نیرو $m\omega^2 r$ است، به‌دست آورید. تنها مدارهای دایره‌ای را در نظر بگیرید. مانستهٔ فرمول ریدبرگ را تعیین کنید. نشان دهید که اصل تطابق برای تمام مقادیر عدد کوانتومی n که در کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای به‌کار می‌رود صادق است.

۱ـ۱۶ با استفاده از قاعده‌های کوانتش بور، حالتهای انرژی را به‌ازای پتانسیل زیر محاسبه کنید

$$V(r) = V_0 \left(\frac{r}{a}\right)^k$$

که در آن k بسیار بزرگ است. نمودار این پتانسیل را ترسیم کنید و نشان دهید مقادیر انرژی به $E_n \simeq Cn^2$ میل می‌کنند.

۱ـ۱۷ در نظریهٔ کلاسیک، توان، تابش‌شده توسط بار شتابدار e با فرمول کلاسیک زیر داده می‌شود

$$P = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}a^2 \text{erg/s}$$

که در آن a شتاب است. در مدار دایره‌ای $a = v^2/r$. توان تابش شده توسط یک الکترون در مدار بور مربوط به عدد کوانتومی n را محاسبه کنید. وقتی n بسیار بزرگ است، این توان باید بنابه اصل تطابق با نتیجهٔ درست مکانیک کوانتومی سازگار باشد.

۱ـ۱۸ آهنگ واپاشی برای الکترون در یک مدار را می‌توان به‌صورت توان تابیدهٔ P تقسیم بر انرژی گسیل شده در واپاشی تعریف کرد. با استفاده از رابطهٔ انرژی تابیده در نظریهٔ بور و رابطهٔ P از مسئلهٔ ۱۷، مقدار "تطابقی" آهنگ واپاشی را وقتی الکترون یک گذار از مدار n به مدار $n-1$ انجام می‌دهد به‌دست آورید. مقدار این آهنگ واپاشی را برای $n = 2$ محاسبه کنید. (این مقدار با نتیجهٔ واقعی نظریهٔ کوانتومی دقیقاً توافق ندارد، زیرا اصل تطابق برای مقادیر کوچک عدد کوانتومی صادق نیست.) آهنگ واپاشی را برای گذار از مدار n به مدار $n-m$ به‌دست آورید. طول عمر را، که مساوی با معکوس آهنگ واپاشی است، تعیین کنید.

۱ـ۱۹ انرژی کلاسیک برای یک چرخندهٔ تخت برابر است با

$$E = L^2/2I$$

www.arsanjan.blogfa.com

که در آن L تکانهٔ زاویه‌ای و I گشتاور لختی است. با استفاده از قاعده‌های کوانتش بور، ترازهای انرژی این چرخنده را به‌دست آورید. اگر شرط بسامد بور برای تابش در گذارهای بین حالتهای n_1 و n_2 برقرار باشد، نشان دهید (الف) اصل تطابق صادق است، و (ب) این اصل ایجاب می‌کند که تنها گذارهای $\Delta = \pm 1$ روی دهند.

۱ـ۲۰ مولکولها گاهی مانند چرخنده‌ها رفتار می‌کنند. اگر طیفهای دورانی با تابشی مشخص شوند که طول‌موج آن از مرتبهٔ 10^7 Å است و این مشخصه برای براورد فاصله‌های بین اتمی در مولکول مانند H_2 به‌کار رود، چه نوع فاصله‌هایی را (برحسب Å) به‌دست می‌آوریم.

مراجع

مباحث این فصل را می‌توان در اکثر کتابهای درسی فیزیک جدید ملاحظه کرد. برای بحثهای بدیعتر مراجعه کنید به

Eyvind H Wichmann, *Quantum Physics*, McGraw-Hill, New York, 1969.

Richard P Feynman, Robert B Leighton, and Matthew Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, Mass, (1963).

برای آشنایی با کارهای بور در تکوین و تکامل نظریهٔ کوانتومی مراجعه کنید به

Abraham Pais, *Niels Bohr's Times in Physics, Philosophy and Polity*, Oxford University Press, New York, 1991.

www.arsanjan.blogfa.com

۲

بسته‌های موج و رابطه‌های عدم قطعیت

مکانیک کوانتومی امکان درک تمام پدیده‌های مورد بحث در فصل ۱ را فراهم می‌آورد، و برای بررسی خواص اتمها، مولکولها، هسته‌های اتمی، و توده‌های آنها ضروری است. ما از طریق معادلهٔ شرودینگر و تعبیر مناسب جوابهای آن به مطالعهٔ مکانیک کوانتومی می‌پردازیم.[۱] برای به‌دست آوردن معادلهٔ شرودینگر از فیزیک کلاسیک راهی وجود ندارد، زیرا این معادله خارج از قلمرو فیزیک کلاسیک قرار دارد. در واقع، اروین شرودینگر معادلهٔ خود را با یک حدس عالی، مبتنی بر نظرات دوبروی، به‌دست آورد. ما این حدس را به‌صورت نسبتاً متفاوتی، با سازش خواص موجی و ذره‌ای الکترونها، توجیه می‌کنیم. پس از ارائهٔ معادلهٔ شرودینگر برای ذرهٔ آزاد، رابطهٔ عدم قطعیت بین مکان و تکانه را با استفاده از بعضی از خواص امواج به‌دست می‌آوریم، و مضامین آن‌را مورد بحث قرار می‌دهیم.

بسته‌های موج جایگزیده

تصور پیکربندی ذراتی که به‌نحوی رفتار موجی از خود نشان می‌دهند مشکل است. به همین دلیل بود که آزمایشهای کلاسیک پراش فرنل و یانگ باعث پذیرش همگانی نظریهٔ موجی نور شدند. از

---

۱. رهیافت دیگری را می‌توان در کتاب زیر یافت

R. P. Feynman R B Leighton and M Sands. *The Feynman Lectures on Physics*, Vol III, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1964.

www.arsanjan.blogfa.com

طرف دیگر، می‌توان برای امواجی که بسیار جایگزیده هستند پیکربندیهایی را تصور کرد. (غرش رعد مثالی از برهم‌نهش امواج است که در یک مکان معین نسبت به زمان جایگزیده است.) این "بسته‌های موج" جایگزیده را می‌توان از برهم‌نهش امواج با بسامدهای مختلف به طریقی به‌دست آورد که خارج از یک منطقهٔ فضایی معین یکدیگر را به‌طور تقریباً کامل از بین ببرند. ابزارهای فنی این کار شامل انتگرالهای فوریه‌اند که در پیوست الف خلاصه‌ای از آنها برای خواننده‌ای که با رشتهٔ فوریه آشنایی دارد و بر دقت ریاضی تأکید نمی‌کند بیان شده است.

به‌عنوان مثال، تابعی را در نظر بگیرید که با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\; g(k) e^{ikx} \qquad (۱\text{ـ}۲)$$

قسمت حقیقی $f(x)$ با $\int_{-\infty}^{\infty} dk\; g(k) \cos\; kx$ داده می‌شود که برهم‌نهش خطی امواجی با طول‌موج $\lambda = ۲\pi/k$ است، زیرا به‌ازای یک kی معین وقتی x به $x + ۲\pi/k$ تغییر می‌کند هر موج مجدداً تکرار می‌شود. برای روشن شدن مطلب، $g(k)$ را به‌صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$g(k) = e^{-\alpha(k-k_{\circ})^{۲}} \qquad (۲\text{ـ}۲)$$

انتگرال ۲ـ۱ را می‌توان محاسبه کرد. با $k' = k - k_{\circ}$ داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk\; g(k) e^{i(k-k_{\circ})x} e^{ik_{\circ}x} \\ &= e^{ik_{\circ}x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'\; e^{ik'x} e^{-\alpha k'^{۲}} \\ &= e^{ik_{\circ}x} \int_{-\infty}^{\infty} dk'\; e^{-\alpha[k'-(ix/۲\alpha)]^{۲}} e^{-(x^{۲}/۴\alpha)} \end{aligned}$$

در گام آخر عمل کامل کردن مجذور را انجام داده‌ایم. می‌توان نوشت $q = k' - (ix/۲\alpha)$ و باز هم انتگرال را روی محور حقیقی نگه داشت.[۲] با استفاده از

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk\; e^{-\alpha k^{۲}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad (۳\text{ـ}۲)$$

به‌دست می‌آوریم

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{ik_{\circ}x} e^{-(x^{۲}/۴\alpha)} \qquad (۴\text{ـ}۲)$$

۲. برای خواننده‌ای که با نظریهٔ متغیرهای مختلط آشنا باشد توجیه این کار چندان مشکل نیست.

www.arsanjan.blogfa.com

$e^{ik_0 x}$ را "عامل فاز" می‌نامیم، زیرا $|e^{ik_0 x}|^2 = 1$. بنابراین، مجذور قدرمطلق $f(x)$ برابر است با

$$|f(x)|^2 = \frac{\pi}{\alpha} e^{-x^2/2\alpha} \qquad (۵_۲)$$

این تابع در $x = 0$ به‌اوج می‌رسد، و برحسب اندازهٔ α بستهٔ موجی را نشان می‌دهد که پهن (α بزرگ) یا بسیار باریک (α کوچک) است. بنابراین، می‌توانیم $|f(x)|^2$ را نمایش یک ذره در نظر بگیریم.

پهنای این بستهٔ موج را می‌توان $2\sqrt{2\alpha}$ گرفت، زیرا تابع به $1/e$ مقدار قلهٔ خودکاهش می‌یابد پهناهای $|f(x)|^2$ و $|g(k)|^2$ همبسته‌اند. در مثال بالا، مجذور $g(x)$ تابعی است که حول k_0 به‌اوج می‌رسد و پهنای آن $2/\sqrt{2\alpha}$ است. در اینجا یک دوجانبگی وجود دارد: تابعی که برحسب x شدیداً جایگزیده است برحسب k گسترده است، و برعکس. حاصلضرب این دو "پهنا" برابر است با

$$\Delta k\, \Delta x \sim \frac{2}{\sqrt{2\alpha}} \cdot 2\sqrt{2\alpha} = 4 \qquad (۶_۲)$$

مقدار دقیق ثابت عددی اهمیت ندارد؛ آنچه اهمیت دارد این است که این مقدار به α بستگی ندارد و از مرتبهٔ واحد است. این یک ویژگی کلی توابعی است که تبدیلهای فوریهٔ یکدیگرند (شکل ۲ـ۱). این نتیجه را با فرمول زیر نشان می‌دهیم

$$\Delta x\, \Delta k \gtrsim O(1) \qquad (۷_۲)$$

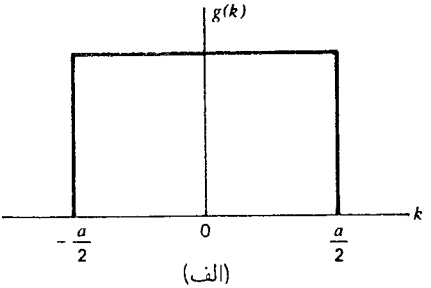
که در آن Δx و Δk "پهنا"های دو توزیع هستند، و منظور از $O(1)$ عددی است که می‌تواند به توابعی بستگی داشته باشد که با آنها سروکار داریم اما اختلاف چندانی با ۱ ندارد. کوچک کردن Δx و Δk با هم غیرممکن است. این یک ویژگی کلی بسته‌های موج است، و به‌زودی خواهیم دید که پیامدهای بسیار عمیقی برای مکانیک کوانتومی دارد.

انتشار بسته‌های موج

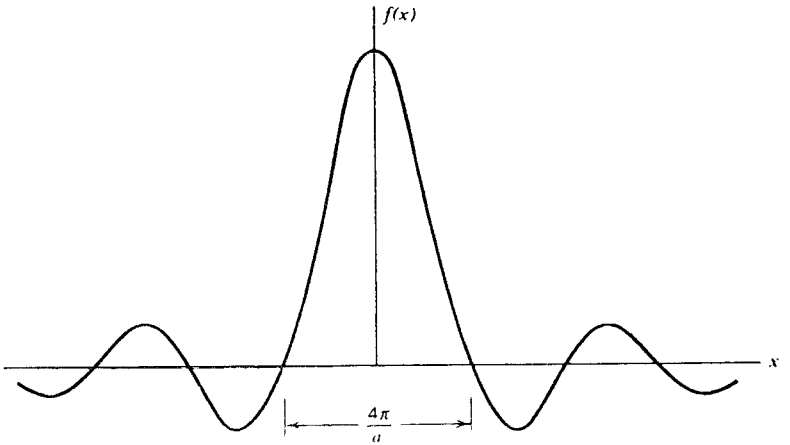
در رابطهٔ ۲ـ۱ تابع $f(x)$ از برهم‌نهش پیوسته‌ای از امواج سادهٔ e^{ikx} ساخته شده است. این بستهٔ موج چگونه در زمان منتشر می‌شود؟ پاسخ این سؤال به چگونگی انتشار تک‌تک امواج بستگی دارد. موج تخت ساده را عموماً به‌صورت زیر خواهیم نوشت (این نامگذاری به این دلیل است که تغییر فضایی موج تنها در راستای x است و به دو مختصهٔ دیگر y و z بستگی ندارد)

$$e^{ikx - i\omega t} \qquad (۸_۲)$$

www.arsanjan.blogfa.com



(الف)



(ب)

شکل۲ـ۱ رابطهٔ میان بستهٔ موج و تبدیل فوریهٔ آن برای یک بستهٔ موج مربعی شکل.

در اینجا $\omega = 2\pi\nu$ بسامد زاویه‌ای است. رابطهٔ کمیت k با طول‌موج عبارت است از $k = 2\pi/\lambda$. بنابراین، می‌توان موج سادهٔ بالا را به‌صورت

$$e^{2\pi i[(x/\lambda)-\nu t]} \qquad (۹_۲)$$

نیز نوشت. برای یک موج نور که در خلأ منتشر می‌شود، بین ν و λ رابطهٔ سادهٔ $\nu = c/\lambda$ برقرار است، و در نتیجه موج ساده در این مورد به‌صورت زیر در می‌آید

$$e^{2\pi i(x-ct)/\lambda} = e^{ik(x-ct)}$$

www.arsanjan.blogfa.com

اکنون اگر برهم‌نهش این امواج ساده با دامنهٔ $g(k)$ را در نظر بگیریم در زمان t داریم

$$f(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} dk\; g(k)e^{ik(x-ct)}=f(x-ct) \qquad (۱۰_۲)$$

این بستهٔ موج همان شکلی را دارد که در $t=0$ داشت، بجز اینکه اکنون به‌جای جایگزیدگی در $x=0$ در $x-ct=0$ جایگزیده است. بنابراین، بستهٔ موج نور با سرعت نور c در خلأ بدون واپیچش منتشر می‌شود.

اما ما با امواجی کار داریم که باید توصیف‌کنندهٔ ذرات باشند، و معلوم نیست رابطهٔ $\omega=kc$ در این مورد صادق باشد. به‌طور کلی، ω تابعی از k است، و از این‌رو می‌نویسیم

$$f(x,t)=\int dk\; g(k)e^{ikx-i\omega(k)t} \qquad (۱۱_۲)$$

فعلاً نمی‌دانیم تابع $\omega(k)$ چه صورتی دارد، اما می‌کوشیم آن‌را با این شرط تعیین کنیم که $f(x,t)$ شبیه یک ذرهٔ کلاسیک باشد که آزادانه حرکت می‌کند.

بستهٔ موجی را در نظر می‌گیریم که در فضای k، حول مقدار k_0، شدیداً جایگزیده است. این بستهٔ موج متناظر با انتخاب تابعی مانند ۲ـ۲ با σی بزرگ است. البته این بستهٔ موج در فضای x دقیقاً جایگزیده نیست، اما محاسبهٔ ما آسانتر می‌شود، و علاوه بر این می‌خواهیم حدسهای هوشمندانه‌ای بزنیم. چون سهم عمدهٔ انتگرال ۲ـ۱۱ بیشتر در اطراف $k=k_0$ است، $\omega(k)$ را حول k_0 بسط می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\omega(k)$ برحسب k به‌سرعت تغییر نمی‌کند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$\omega(k)\approx\omega(k_0)+(k-k_0)\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0} \qquad (۱۲_۲)$$

جملهٔ اول مقدار ثابتی، (مستقل از k) دارد. در جملهٔ دوم، کمیت $(d\omega/dk)|_{k_0}$ سرعت گروه[۳] است که انتشار بستهٔ موج را توصیف می‌کند. با نمادنگاری

$$\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}=v_g \qquad (۱۳_۲)$$

---

۳. سرعت گروه مفهومی است که در هر کتابی که با انتشار موج سروکار دارد مورد بحث قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال، مراجعه کنید به

H Georgi, *The Physics of Waves*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N J, 1993.

www.arsanjan.blogfa.com

و

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0} = \beta \qquad (۱۴_۲)$$

و با $k' = k - k_0$، وابستگی زمانی این بستهٔ موج به‌صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} f(x,t) &= e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-\alpha k'^2} e^{ik'(x-v_g t)} e^{-ik'^2\beta t} \\ &= e^{ik_0 x - i\omega(k_0)t}\int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{ik'(x-v_g t)} e^{-(\alpha+i\beta t)k'^2} \end{aligned} \qquad (۱۵_۲)$$

این درست همان انتگرالی است که به ۲ـ۴ منجر شد و در آن $x - v_g t$ به‌جای x و $\alpha + i\beta t$ به‌جای α نشسته است. بنابراین، داریم

$$f(x,t) = e^{i[k_0 x - \omega(k_0)t]}\left(\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}\right)^{1/2} e^{-[(x-v_g t)^2/4(\alpha+i\beta t)]} \qquad (۱۶_۲)$$

مجذور قدرمطلق این تابع به‌صورت زیر است

$$|f(x,t)|^2 = \left(\frac{\pi^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2}\right)^{1/2} e^{-[\alpha(x-v_g t)^2/2(\alpha^2+\beta^2 t^2)]} \qquad (۱۷_۲)$$

که بستهٔ موجی را نشان می‌دهد که قلهٔ آن با سرعت v_g حرکت می‌کند، اما پهنای ثابتی ندارد: کمیتی که در $t = 0$ برابر با α بود اکنون $\alpha + (\beta^2 t^2/\alpha)$ شده است، یعنی بستهٔ موج پهن می‌شود. چون پهنا متناسب است با

$$\left(\alpha + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha}\right)^{1/2} = \sqrt{\alpha}\left(1 + \frac{\beta^2 t^2}{\alpha^2}\right)^{1/2}$$

اگر α بزرگ باشد، یعنی اگر بستهٔ موج در زمان اولیه از لحاظ فضایی بزرگ باشد، آهنگ پهن شدن کوچک خواهد بود.

www.arsanjan.blogfa.com

از بستهٔ موج تا معادلهٔ شرودینگر

مهمترین نتیجهٔ بحث بالا این است که اگر بخواهیم ۲ـ۱۱ ذره‌ای با تکانهٔ p و انرژی جنبشی $p^2/2m$ را نشان دهد باید داشته باشیم

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{p}{m} \qquad (۱۸_۲)$$

علاوه بر این، اگر انرژی ذره را برابر با حاصلضرب بسامد زاویه‌ای وابسته به آن و h بگیریم:

$$E = h\omega \qquad (۱۹_۲)$$

که از رابطهٔ کوانتومی برای تابش استنباط شده است و در نتیجه

$$\omega = \frac{p^2}{2mh} \qquad (۲۰_۲)$$

آنگاه سازگاری ایجاب می‌کند رابطهٔ زیر برقرار باشد

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{h} \qquad (۲۱_۲)$$

که دوبروی اولین بار آن‌را به روش کم و بیش مشابهی به‌دست آورد.
رابطهٔ ۲ـ۱۱ را می‌توان برحسب p به‌صورت زیر نوشت[۴]

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int dp\ \phi(p) e^{i(px-Et)/h} \qquad (۲۲_۲)$$

بستهٔ موج $\psi(x,t)$ یک جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل جزئی زیر است

$$\begin{aligned} ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int dp\ \phi(p) E\ e^{i(px-Et)/h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int dp\ \phi(p) \frac{p^2}{2m} e^{i(px-Et)/h} \\ &= \frac{h^2}{2m}\ \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \qquad (۲۳_۲)$$

۴. عامل عددی جلو انتگرال را وقتی معنایی فیزیکی به $\phi(p)$ نسبت می‌دهیم توجیه خواهیم کرد.

www.arsanjan.blogfa.com
و این به‌شرطی است که، مانند قبل، حرکت "ذره" را در یک ناحیهٔ بدون پتانسیل، که در آن $E = p^2/2m$، توصیف کنیم. این معادله، و تعمیم آن به مورد ذرهٔ متحرک در یک پتانسیل، چکیدهٔ مهم بحثهایی است که قبلاً مطرح کردیم. باید تأکید کنیم که این معادله حاکی از یک حدس است: هیچ توجیهی بر اساس فیزیک کلاسیک برای تعویض ω با $E/\hbar$ و تعویض عدد موج k با $p/\hbar$ وجود ندارد.

هنوز هم با مشکل پهن‌شدن بسته‌های موج روبه‌رو هستیم. اگر بستهٔ گاؤسی ۲ـ۱۷ را در نظر بگیریم، می‌بینیم که هر قدر هم α بزرگ باشد زمانی خواهد رسید که این پهن‌شدگی قابل توجه می‌شود. اما این نتیجه مغایر تجربه است، که به روشنی نشان می‌دهد که، به عنوان مثال، هسته‌ها که بسیار ریز هستند طی مدت ۳×۱۰^۹ سال ($۱۰^{۱۷}$ ثانیه) تغییری نکرده‌اند. در فصل ۳ خواهیم دید که مفهوم احتمال، که در فصل ۱ به آن اشاره شد، در اینجا دخالت می‌کند، و پهن‌شدگی واقعاً به این احتمال فزاینده مربوط می‌شود که ذره دور از جایی باشد که در $t = ۰$ جایگزیده بود.

رابطه‌های عدم قطعیت

یکی از مهمترین مشاهده‌های کیفی که در بحث بستهٔ موج داشتیم رابطهٔ دوجانبگی میان پهناها در فضاهای x و p است:

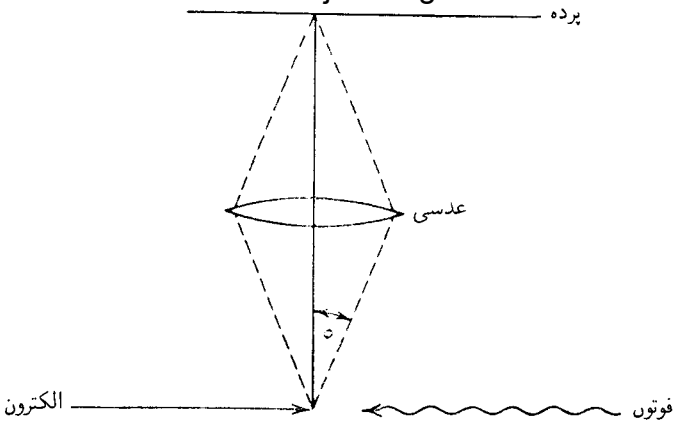
$$\Delta k\, \Delta x \gtrsim ۱ \qquad (۲۴ـ۲)$$

با ضرب این رابطه در $\hbar$ و استفاده از $\hbar k = p$، رابطهٔ عدم قطعیت هایزنبرگ را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta p\, \Delta x \gtrsim \hbar \qquad (۲۵ـ۲)$$

چون پهنا معرف ناحیه‌ای در فضای x یا فضای تکانه است که محتمل است ذره در آن باشد، رابطهٔ ۲ـ۲۵ نشان می‌دهد اگر سعی کنیم بستهٔ موج بسیار جایگزیده‌ای در فضای x بسازیم آنگاه، برخلاف آنچه در فیزیک کلاسیک مسلم فرض می‌شود، نسبت دادن یک تکانه کاملاً معین به‌آن غیرممکن می‌شود. به‌همین نحو، بستهٔ موجی که با تکانه‌ای مشخص می‌شود که در یک محدودهٔ باریک تعریف شده است باید از لحاظ فضایی بسیار پهن باشد. این محدودیتی است که مکانیک کوانتومی بر استفاده از مفاهیم کلاسیک برای توصیف یک دستگاه فیزیکی تحمیل می‌کند. مفاهیم کلاسیک مکان و تکانه مستقل از یکدیگر هستند: آنها به درجه‌های آزادی متفاوتی مربوط می‌شوند. در مکانیک کوانتومی، چنانکه در فصل ۶ با تفصیل بیشتری خواهیم دید، مکان و تکانهٔ یک دستگاه ویژگیهای مکمل یکدیگر هستند و نظریه هیچ آزمایشی را ممکن نمی‌داند که در آن بتوان هر دو را همزمان تعیین کرد. کوچکی $\hbar$ باعث می‌شود که مفاهیم متداول فیزیک کلاسیک

www.arsanjan.blogfa.com



شکل۲ـ۲ طرح کلی میکروسکوپ هایزنبرگ برای اندازه‌گیری مکان الکترون.

تنها برای دستگاههای میکروسکوپیک کارایی نداشته باشند. به‌عنوان مثال، برای ذرهٔ غباری به جرم 10^{-4} و سرعت $10^{4}\mathrm{cm/s}$، عدم قطعیت یک قسمت در میلیون در حاصلضرب آنها ایجاب می‌کند که $\Delta p \sim 10^{-6}\mathrm{gcm/s}$ و در نتیجه $\Delta x \sim 10^{-21}\mathrm{cm}$، که 10^{8} بار کوچکتر از شعاع پروتون است! این وضعیت برای الکترونی که در یک مدار بور حرکت می‌کند صادق نیست. اگر بگیریم $\Delta p \sim p \sim mc\alpha$، آنگاه $\Delta x \sim \hbar/mc\alpha$ که از مرتبهٔ بزرگی شعاع مدارهای بور است.

اکنون چند آزمایش ذهنی را بررسی می‌کنیم که در آنها به‌تفصیل نشان خواهیم داد چگونه دوگانگی موج‌ـذره نمی‌گذارد رابطهٔ ۲ـ۲۵ نقض شود.

(الف) اندازه‌گیری مکان الکترون (میکروسکوپ هایزنبرگ). ترتیب آزمایش شکل ۲ـ۲ را در نظر بگیرید که مقصود از آن اندازه‌گیری مکان الکترون است. الکترونها در باریکه‌ای با تکانهٔ کاملاً معین p_x در جهت مثبت محور x حرکت می‌کنند. میکروسکوپ (عدسی+پرده) برای این است که با مشاهدهٔ نوری که الکترون آن‌را پراکنده می‌کند ببینیم الکترون کجا قرار دارد. نور را در جهت منفی x می‌تابانیم. یک الکترون خاص یک فوتون خاص را پراکنده می‌کند و این فوتون وارد میکروسکوپ می‌شود. توان تفکیک میکروسکوپ، یعنی دقتی که با آن می‌توان موقعیت الکترون را تعیین کرد، بنابه اپتیک موجی با رابطهٔ زیر داده می‌شود

$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin\ \phi} \qquad (۲۶_۲)$$

که در آن λ طول‌موج نور است. به‌نظر می‌رسد که با کوچک کردن λ و یا بزرگ کردن $\sin\phi$، می‌توانیم Δx را هر اندازه بخواهیم کوچک کنیم. اما اکنون نشان می‌دهیم که این کار تنها به‌بهای از دست دادن اطلاع دربارهٔ مؤلفهٔ x تکانهٔ الکترون امکانپذیر است. نظریهٔ کوانتومی به ما می‌گوید که آنچه روی پردهٔ پشت عدسی ثبت می‌شود در واقع فوتونهای منفردی هستند که به این علت به آنجا

www.arsanjan.blogfa.com

می‌رسند که توسط الکترونها پراکنده شده‌اند. راستای حرکت فوتون پس از پراکندگی در محدودهٔ زاویه‌ای که روی گشودگی تشکیل می‌شود نامعین است. در نتیجه، بزرگی تکانهٔ الکترون پس‌زده عدم‌قطعیتی دارد که عبارت است از

$$\Delta p_x \sim ۲\frac{h\nu}{c}\sin\ \phi \qquad (۲۷_۲)$$

بنابراین،

$$\Delta p_x \Delta x \sim ۲\frac{h\nu}{c}\sin\ \phi\frac{\lambda}{\sin\ \phi} \sim ۴\pi\hbar \qquad (۲۸_۲)$$

آیا می‌توان این مشکل را حل کرد؟ هر چه باشد، راستای فوتون با تکانهٔ آن همبسته است، و اگر بتوان به‌نحوی پس‌زنی پرده را اندازه گرفت می‌توان تکانهٔ فوتون (و در نتیجه تکانهٔ الکترون) را بهتر مشخص کرد. این درست، اما همینکه میکروسکوپ را به‌عنوان قسمتی از دستگاه "مشهود" در نظر گرفتیم باید نگران موقعیت آن باشیم زیرا تکانهٔ آن باید مشخص شود. اما میکروسکوپ هم باید از اصل عدم قطعیت تبعیت کند، و اگر بخواهیم تکانهٔ آن‌را مشخص کنیم مکان آن نامعین‌تر خواهد شد. وسیلهٔ مشاهدهٔ "کلاسیک" نهایی همیشه با این نامعینی روبه‌رو خواهد بود.

(ب) آزمایش دوشکافی. در فصل ۱ دیدیم که نقش تداخلی که در عبور الکترونها[۵] از دو شکاف مشاهده می‌شود منطقاً با توانایی ما برای دانستن اینکه الکترون ازکدام شکاف عبور می‌کند ناسازگار است، زیرا این آگاهی ایجاب می‌کند که این نقش نتیجهٔ برهم‌نهش الکترونهایی باشد که از این یا آن شکاف آمده‌اند. اما این برهم‌نهش نمی‌تواند نقش تداخل به‌وجود آورد. می‌توان با استفاده از اصل عدم قطعیت نشان داد که "دیدبانی" که شکاف گذر را شناسایی می‌کند نقش تداخل را خراب خواهد کرد. فرض کنید فاصلهٔ شکافها از یکدیگر a و فاصلهٔ شکافها تا پرده d باشد. شرط تداخل سازنده عبارت است از

$$\sin\ \theta = n\frac{\lambda}{a} \qquad (۲۹_۲)$$

و درنتیجه فاصلهٔ بین بیشینه‌های مجاور روی پرده برابر است با $d\sin\ \theta_{n+۱} - d\sin\ \theta_n = d\lambda/a$. دیدبانی را در نظر بگیرید که مکان یک الکترون را درست پشت شکاف با دقت $\Delta y < a/۲$ تعیین می‌کند، یعنی نشان می‌دهد الکترون ازکدام شکاف گذشته است (شکل ۲ـ۳). در این کار، دیدبان باید تکانه‌ای در راستای y (موازی با پردهٔ شکافها) به الکترون بدهد که مقدار آن به‌اندازهٔ

$$\Delta p_y > \frac{۲h}{a} \qquad (۳۰_۲)$$

۵. البته ما دربارهٔ فوتونها بحث کردیم، اما همین مشکل برای الکترونها، که آنها نیز پراشیده می‌شوند، وجود دارد.