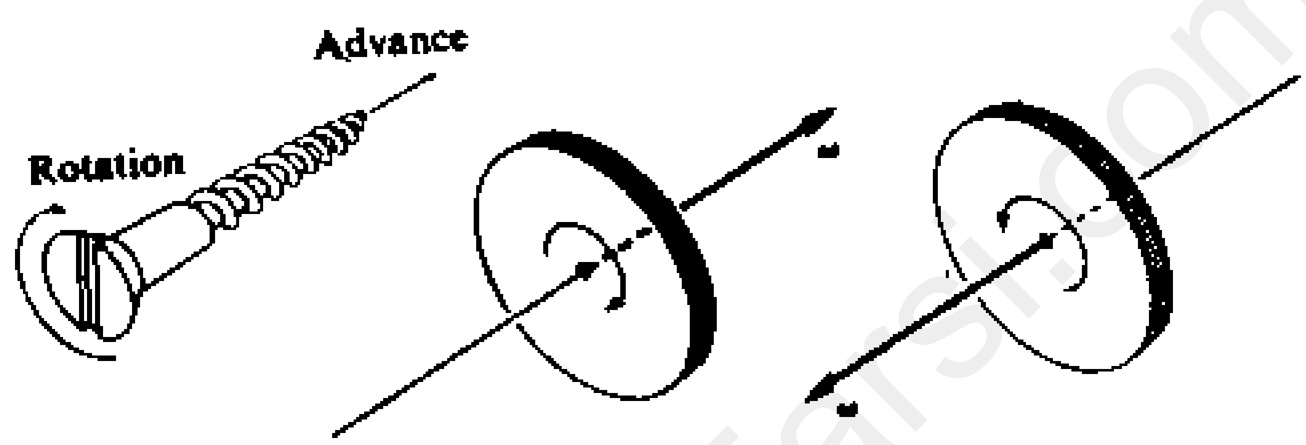
چنانکه می بینیم شتاب و سرعت زاویه ای بترتیب با شتاب و سرعت خطی مشابهت کامل دارند .

میتوان بسیاری ازفرمولهائی‌راکه درباره دوران اجسام نوشته میشود بصورت ساده‌تر و کاملتری نوشت بشرط آنکه ω سرعت زاویه‌ای یك‌کمیت برداری درنظرگرفته شود . یعنی ω بردار سرعت‌زاویه‌ای و α بردار شتاب زاویه‌ای نامیده‌شوند. بردار سرعت‌زاویه‌ای برداری است‌که اندازه آن برابر اندازه سرعت زاویه ای ، امتداد آن منطبق برمحور چرخش‌است وجهت‌آن‌را بااستفاده قانون چرخش پیچ راستگرد میتوان تعیین نمود درشکل ۹ـ۴ بردار ω یك جسم دوار نشانداده شده است .



شکل ۹ـ۴ بردار سرعت زاویه‌ای جسم دوار

همچنین بردار شتاب‌زاویه‌ای برداری است‌که اندازه‌آن برابراندازه شتاب زاویه‌ای امتداد آن منطبق برمحور (یا موازی محور) وجهت‌آن درهرلحظه باجهت بردار تغییر سرعت زاویه‌ای ($\Delta\omega$) منطبق است .

۹ـ۴ ، دوران باشتاب زاویه‌ای متغیر

وقتی جسم صلبی بدور محور ثابتی میچرخد جهت بردار سرعت زاویه ثابت میماند ولی ممکن است اندازه آن تغییر کند . این تغییر را ممکن است به یکی از سه طریقه زیر بیان نمود .

(۱) α تابعی از t است :

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha \quad و \quad d\omega=\alpha dt$$

$$\omega_2-\omega_1=\int^{t_2}\alpha dt$$

(۲) α تابعی از ω است :

$$\frac{d\omega}{dt}=\alpha \qquad \frac{d\omega}{\alpha}=dt$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{d\omega}{\alpha}=t_2-t_1$$

(۲) α تابعی از θ است :

$$\frac{d\omega}{dt}=\omega\frac{d\omega}{d\theta}=\alpha \quad و \quad \omega d\omega=\alpha d\theta$$

$$\frac{\omega_2^2}{2}-\frac{\omega_1^2}{2}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\alpha d\theta$$

۹ـ۵ ، دوران باشتاب زاویه‌ای ثابت

ساده‌ترین صورت حرکت دورانی متغیر حرکتی است که شتاب زاویه ای آن ثابت باشد. دراینصورت میتوان شتاب زاویه‌ای وزاویه طی‌شده رابکمك انتگراسیون بدست‌آورد.

$$d\omega/dt=\alpha=ct.$$

$$\int d\omega=\int\alpha dt$$

$$\omega=\alpha t+C_1$$

هرگاه درلحظه $t=0$ سرعت زاویه‌ای جسم ω_0 باشد $C_1=\omega_0$ است داریم :

$$\boxed{\omega=\omega_0+\alpha t} \qquad (۹ـ۵)$$

وچون $\omega=d\theta/dt$ است داریم:

$$\int d\theta=\int\omega_0 dt+\int\alpha t dt$$

$$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2+C_2$$

بطور کلی مقدار ثابت $C_۲$ برابر اندازه θ بازاء $t=۰$ یعنی $\theta_۰$ است . هرگاه $\theta_۰=۰$ فرض شود داریم :

$$\boxed{\theta=\omega_۰ t+\frac{۱}{۲}\alpha t^۲} \qquad (۷-۹)$$

هرگاه شتاب زاویه‌ای را بصورت زیر بنویسیم داریم :

$$\alpha=\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

وسپس :

$$\int \alpha d\theta=\int \omega d\omega+c_۳$$

$$\alpha\theta=\frac{۱}{۲}\omega^۲+C_۳$$

بازاء $t=۰$ داریم $\theta=۰$ و هرگاه سرعت زاویه‌ای اولیه برابر $\omega_۰$ باشد خواهیم داشت : $C_۳=-\frac{۱}{۲}\omega_۰{}^۲$ و

$$\boxed{\omega^۲=\omega_۰+۲\alpha\theta} \qquad (۷-۹)$$

فرمولهای ۹-۵ و ۹-۶ و ۹-۷ عیناً شبیه فرمولهائی هستند که درحرکت مستقیم‌الخط متشابه‌التغیر که ذیلا نوشته میشود بدست آمد :

$$v=v_۰+at \qquad x=v_۰ t+\frac{۱}{۲}at^۲ \qquad v^۲=v_۰{}^۲+۲ax$$

مثال ـ درزمان $t=۰$ سرعت زاویه‌ای جسمی $۴ rad/sec$ وشتاب زاویه‌آن ثابت وبرابر $۲ rad/sec^۲$ است. خط OP درلحظه $t=۰$ افقی است. (a) درلحظه $t=۳ sec$ زاویه OP را باخطافقی بدست‌آورید. (b) سرعت زاویه‌ای را دراین لحظه بدست‌آورید:

$$(a) \quad \theta=\omega_۰ t+\frac{۱}{۲}\alpha t^۲=۴ rad/sec\times ۳ sec+\frac{۱}{۲}\times ۲ rad/sec\times(۳ sec)^۲=$$

$$=۲۱ rad=۳/۳۴ \text{ دور}$$

$$(b) \quad \omega=\omega_۰+\alpha t=۴ rad/sec+۲ rad/sec^۲\times ۳ sec=۱۰ rad/sec$$

واز فرمول ۹ـ۷ نتیجه میشود :

$$=(4\,\mathrm{rad}/sec)^{2}+2\times 2\,\mathrm{rad}/sec^{2}\times 21\,\mathrm{rad}=100\,\mathrm{rad}^{2}/sec^{2}$$

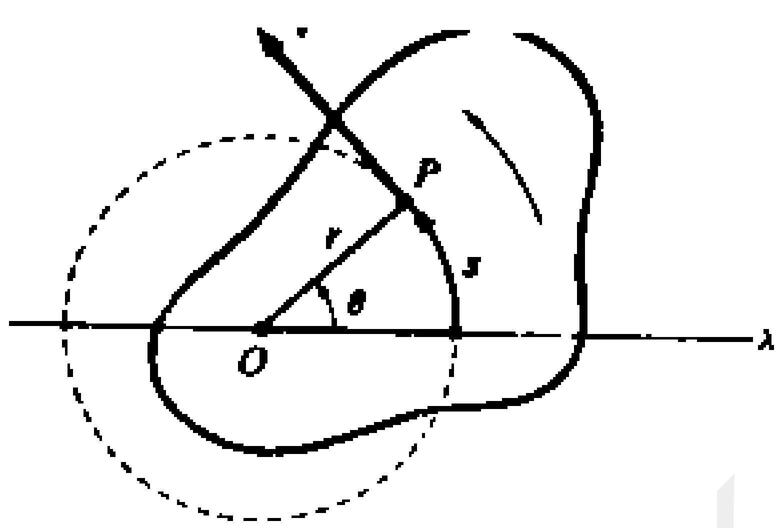
$$\omega^{2}=\omega_{0}^{2}+2\alpha\theta$$

$$\omega=10\,\mathrm{rad}/sec$$

۹ـ۶ ، رابطه بین شتاب وسرعت زاویه‌ای وخطی

درقسمت ۶ـ۲ درباره سرعت خطی وشتاب خطی یك نقطه مادی‌که برمسیر دایره‌ای میچرخد بحث‌کردیم . وقتی جسم صلبی بدور محوری میچرخد هر نقطه از آن بر محور دایره‌ای حرکت میکندکه مرکز آن برمحور چرخش واقع است و دایره مسیر بر محور چرخش عمود است . روابط سودمندی بین سرعت وشتاب زاویه ای باسرعت و شتاب خطی وجود دارد .

فرض‌کنیم r فاصله نقطه P از محور باشد و P برمحیط دایره‌ای بشعاع r حرکت میکند. (شکل ۹ـ۵) هرگاه شعاع حامل P با محور زاویه θ بسازد s فاصله نقطه P از مبدء برابر است با :



شکل ۹ـ۵ فاصله s که نقطه P آنرا طی می‌کند برابر $r\theta$ است .

$$\boxed{s=r\theta\,.}\qquad(۹\text{ـ}۸)$$

که درآن θ برحسب رادیان است.

هرگاه ازطرفین رابطه فوق برحسب t مشتق بگیریم با در نظرگرفتن اینکه r ثابت است داریم :

$$\frac{ds}{dt}=r\frac{d\theta}{dt}$$

اما $\frac{ds}{dt}$ سرعت خطی v نقطه P و $\frac{d\theta}{bt}$ سرعت زاویه ای ω جسم متحرك است لذا داریم :

$$\boxed{v=r\omega}\qquad(۹\text{ـ}۹)$$

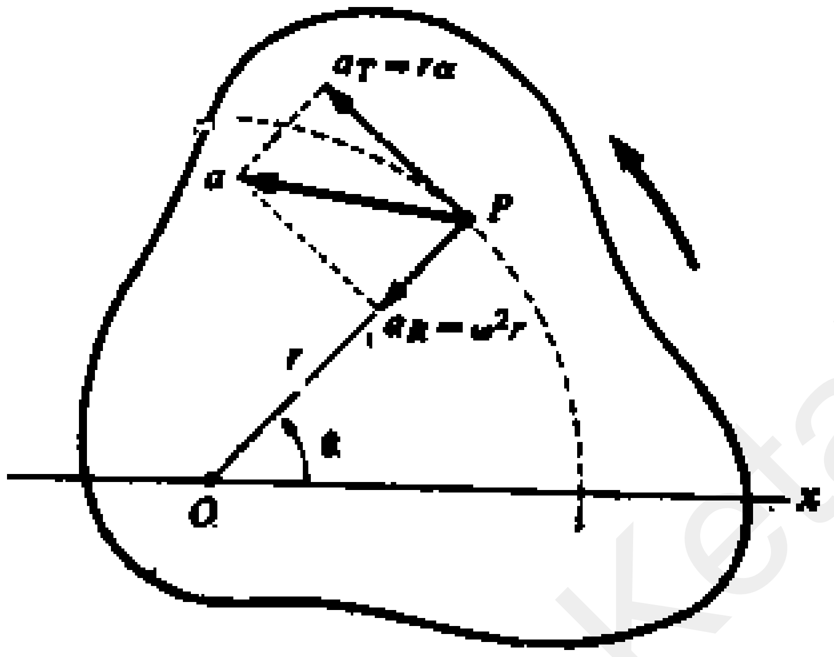
یعنی v سرعت خطی برابر حاصلضرب سرعت زاویه‌ای ω در r فاصله نقطه متحرک از محور است .

هرگاه ازطرفین رابطه فوق نسبت به t مشتق بگیریم داریم :

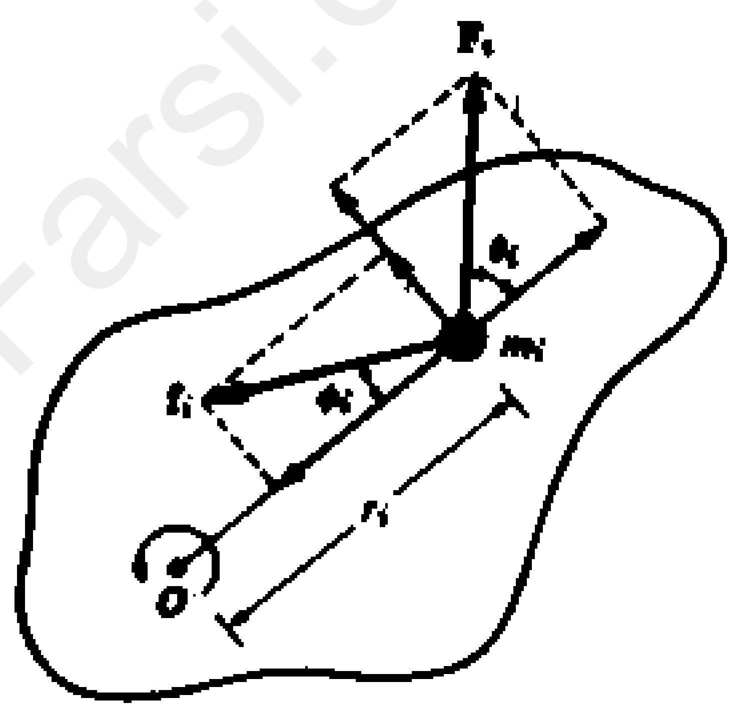
$$\frac{dv}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt}$$

ولی $\frac{dv}{dt}$ اندازه مؤلفه شتاب نقطه P درامتداد مماس برمسیر است که به a_T نمایش داده میشود و $\frac{d\omega}{dt}$ شتاب زاویه‌ای جسم دوار است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\boxed{a_T = r\cdot\alpha} \qquad (۹-۱۵)$$



شکل ۹-۶ دوران غیر متشابه حول محور ثابت O مؤلفه مماسی شتاب نقطه P برابر $r\alpha$ ومؤلفه شعاعی آن برابر $\omega^2 r$ است.



شکل ۹-۷ نیروی خارجی F_1 ونیروی داخلی f_1 برنقطه مادی m_1 جسم صلبی که حول محور ثابتی دوران می‌کند اثرمینمایند .

پس مؤلفه مماسی شتاب برابر حاصلضرب شتاب زاویه‌ای درفاصله متحرک از محور دوران است .

میتوان شتاب شعاعی $\frac{v^2}{r}$ نقطه P را نیز برحسب سرعت زاویه‌ای بدست آورد :

$$\boxed{a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v} \qquad (۹-۱۱)$$

مؤلفه های مماس وشعاعی شتاب نقطه P درشکل ۹-۶ نشانداده شده است.

۹ـ۷ ، گشتاور وشتاب زاویه‌ای . ممان اینرسی

اینك میتوانیم بحث خود را درباره دینامیك دوران یعنی رابطه بین نیروهای مؤثر بریك جسم وشتاب زاویه‌ای‌آن آغاز کنیم . •

شکل ۹ـ۷ جسم صلبی‌را نشان میدهدکه حول محور ثابتی‌که از O میگذرد میتواند بچرخد . این محور برصفحه تصویر عمود است.

دایره سیاه‌رنگ، یکی‌ازنقاط‌مادی بجرم m_1 را دراین جسم مشخص میکند. براین نقطه مادی نیروی خارجی F_1 ونیروی داخلی f_1 اثرمیکند. f_1 درحقیقت برآیند نیروهای وارده ازبقیه ذرات جسم براین نقطه‌است. کافی است فقط درباره حالتی بحث‌کنیم‌که F_1 و f_1 درصفحه عمود برمحور (صفحه تصویر) واقعند. ازقانون دوم نیوتون نتیجه میشود:

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{f}_1=m_1\mathbf{a}_1$$

هرگاه نیروها را بمؤلفه های آنها تجزیه‌کنیم میتوانیم روابط زیررا بنویسیم :

$$F_1\cos\theta_1+f_1\cos\varphi_1=m_1a_{1R}=m_1r_1\omega^2$$

$$F_1\sin\theta_1+f_1\sin\varphi_1=m_1a_{1T}=m_1r_1\alpha$$

دراینجادرباره فرمول اول بحثی‌نمی‌کنیم.هرگاه طرفین فرمول دوم‌را در r_1 ضرب کنیم نتیجه میشود :

$$F_1r_1\sin\theta_1+f_1r_1\sin\varphi_1=m_1r_1^2\omega^2 \qquad (۹ـ۱۲)$$

اما میدانیم جمله اول بسمت چپ‌گشتاور نیروی F_1 نسبت به‌محور چرخش است‌که آنرا به Γ_1 نشان میدهیم . جمله دوم نیز گشتاور نیروهای داخلی است.

فرمول ۹ـ۱۲ را برای جمیع نقاط جسم میتوان نوشت. هرگاه معادله مذکور را برای جمیع نقاط نوشته طرفین تساوی هارا باهم جمع‌کنیم‌گشتاور نیروهای داخلی حذف میشود، زیراگشتاورهای‌جفت های عمل وعکس‌العمل، یکدیگررا خنثی میکنند . لذا جمع جملات سمت چپ برآیند Γ های نیروهای خارجی نسبت بمحورچرخش‌است. پس‌داریم:

$$\Gamma=\Sigma\Gamma_i=\Sigma F_ir_i\sin\theta_i$$

چون جسم صلب است همه نقاط مادی درون آن شتاب زاویه‌ای α واحدی دارند . لذا میتوان نوشت :

$$\Gamma=(m_1r_1^2+m_2r_2^2+\dots)\alpha=\Sigma(m_ir_i^2)\alpha \qquad (۹ـ۱۳)$$

$\Sigma m_i r_i^2$ را ممان دینرسی جسم نسبت به محور چرخش O نامیده آنرا به I نمایش میدهیم خواهیم داشت :

$$\boxed{I = \Sigma m_i r_i^2} \qquad (۹-۱۴)$$

ومعادله ۹-۱۳ بصورت زیر درمیآید :

$$\boxed{\Gamma = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt}} \qquad (۹-۱۵)$$

یعنی وقتی برجسمی که حول محور ثابتی میتواند بچرخد گشتاوری اثر کند ؛ اندازه گشتاور برابر حاصلضرب ممان دینرسی‌جسم نسبت به محور در شتاب زاویه‌ای جسم میباشد .

بنابراین شتاب زاویه‌ای جسم صلبی که حول محور ثابتی‌میچرخد با فرمولی‌که عیناً شبیه فرمول محاسبه شتاب خطی است بدست میآید . قبلا دیدیم‌که :

$$F = ma = m\frac{dv}{dt}$$

می‌بینیم که برآیند گشتاور مؤثر برجسم نظیر نیرو (درحرکت انتقالی) شتاب‌زاویه‌ای نظیرشتاب خطی وممان دینرسی نظیر جرم میباشد .

مفهوم ممان دینرسی‌را می‌توان مجموع حاصلضرب‌های جرم نقاط مادی یك‌جسم‌در مجذور فاصله ازمحور چرخش تصور نمود یا آنرا نسبت‌گشتاور مؤثر بریك جسم به شتاب زاویه‌ای‌آن دانست یعنی :

$$I = \frac{\Gamma}{\alpha} \quad \text{و یا} \quad I = \Sigma m_i r_i^2$$

گشتاور برداری Γ یك نیرو نسبت بیك محور برداری است موازی آن محور که اندازه آن برابر اندازه‌گشتاور وجهت‌آن از قاعده پیچش پیچ راست‌گرد بدست میآید . همچنین بردارهای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسمی که حول محوری میچرخد نیز موازی محور چرخش‌اند . میتوان فرمول۹-۱۵را بصورت یك‌تساوی برداری بصورت زیر نوشت :

$$\Gamma = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} \qquad (۹ـ۱۶)$$

این فرمول درعین حال که شامل تساوی‌سکالر رابطه ۹ـ۱۵ است یك رابطه برداری نیز هست که در آن Γ و $\alpha = d\omega/dt$ بردارهای هم‌جهت هستند درشکل ۹ـ۷ بردارهای Γ و α بطرف خارج از صفحه‌کتاب امتداد دارند .

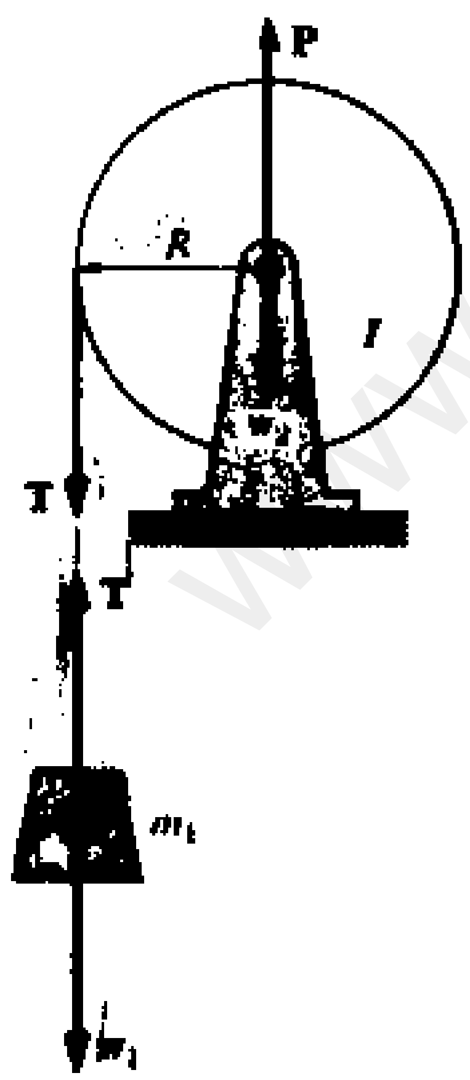
تساوی ۹ـ۱۶ عیناً نظیر تساوی برداری موجود بین‌نیرو وشتاب‌حرکت مستقیم‌الخط میباشد .

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

درجدول ۹ـ۱ تشابه موجود بین‌حرکت دورانی وانتقالی نشان داده شده است .

مثال ــ چرخی بشعاع R بجرم m_2 و به ممان‌دینرسی I مطابق شکل ۹ـ۸ برمحوری سوار است . طناب بیوزن وقابل انعطافی‌بدورچرخ پیچیده شده و بانتهای‌آن وزنه‌ای‌بجرم m_1 آویزان است . از اصطکاکها صرف‌نظر کرده درباره حرکت دستگاه بحث‌کنید .

باید برآیند نیروهای مؤثر بروزنه m_1 و برآیند گشتاورهای مؤثر بر m_2 رامشخص کنیم . فرض‌کنیم T کشش‌مؤثر برطناب و $\mathbf{P}$ نیروی وارده ازمحورهابرچرخ باشد .



شکل ۹ـ۸

اندازه برآیند نیروهای وارد برجسم آویزان $w_1 - T$ است و برطبق قانون دوم نیوتون میتوان نوشت :

$$w_1 - T = m_1 a$$

[جهت‌مثبت نیروها را روبپائین فرض‌کرده‌ایم تا نیروی‌مثبت گشتاورمثبت داشته باشد (گشتاورمثبت خلاف جهت حرکت عقربه ساعت‌حرکت است)].

نیروهای $\mathbf{P}$ و $\mathbf{w}_2$ گشتاوری نسبت به محور چرخ ندارند. بنابراین اندازهٔ گشتاورمؤثر بر چرخ نسبت به‌محور برابر TR است وبنابرقانون نیوتون میتوان نوشت :

$$TR = I\alpha$$

چون شتاب خطی جسم آویزان، برابر شتاب مماسی‌محیط چرخ است داریم :

جدول ۹ـ۱ ، شباهت در حرکت انتقالی و دورانی

مفهوم	انتقال	دوران	رابطه
تغییر مکان	s	θ	$s = r\theta$
سرعت	$v = ds/dt$	$\omega = d\theta/dt$	$v = r\omega$
شتاب	$a = dv/dt$	$\alpha = d\omega/dt$	$a_T = r \cdot \alpha$
نیرو و گشتاور	F	Γ	$\Gamma = F \cdot r$
تعادل	$F = 0$	$\Gamma = 0$	
شتاب ثابت	$\begin{cases} v = v_0 + at \\ s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2as \end{cases}$	$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \end{cases}$	
جرم و ممان دینرسی	m	I	$I = \Sigma m_i r_i^2$
قانون دوم نیوتون	$F = ma$	$I = \Gamma \cdot \alpha$	
کار	$w = \int F ds$	$w = \int \Gamma \cdot d\theta$	
توان	$P = F \cdot v$	$P = \Gamma \cdot \omega$	
انرژی پتانسیل	$E_p = mgy$		
« جنبشی	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$	
ضربه	$\int F dt$	$\int \Gamma dt$	
اندازه حرکت	mv	$L = I\omega$	

$$a=R\cdot\alpha$$

وازحل این‌دومعادله بایکدیگر نتیجه میشود :

$$a=g\frac{1}{1+\left(\frac{I}{m_1R^2}\right)}$$

هرگاه جسم ازحال سکون شروع بحرکت کند سرعت خطی جسم آویـزان پس از سقوط از ارتفاع y از رابطه زیربدست بدست میاید .

$$v^2=2ay=2\left[\ g\frac{1}{1+\left(\frac{I}{m_1R^2}\right)}\ \right]\times y$$

۹ـ۸ ، محاسبه ممان دینرسی

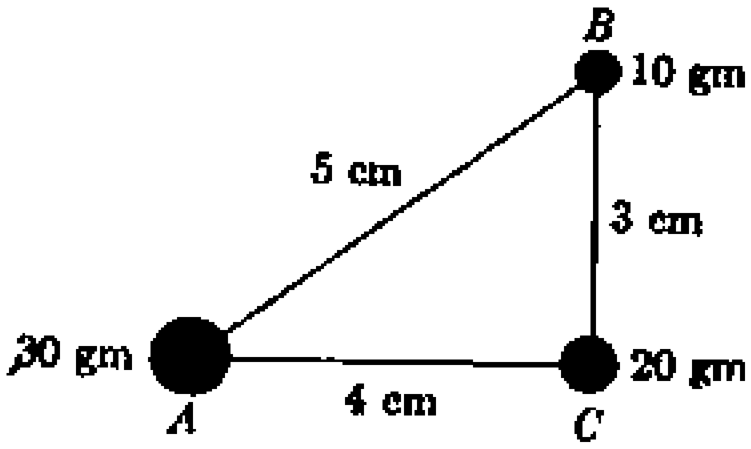
درعمل ممان دینرسی هرجسم را میتوانیم چنین بدست آوریم که‌آنرا حول‌محور مورد نظر بچرخش‌درمی‌آوریم، گشتاور معلوم Γ را برآن‌اثرداده شتاب α جسم را اندازه‌میگیریم وممان دینرسی را از رابطه زیر حساب می‌کنیم .

$$I=\frac{\Gamma}{\alpha}$$

درقسمت ۱۱ـ۷ روش دیگری را که بیشترمعمول است مورد بحث قرار خواهیم داد :

میتوان بامحاسبه مجموعه $\Sigma m_1r_1^2$ ممان اینرسی هر دستگاه را محاسبه نمود بشرط آنکه مجموعه قابل محاسبه باشد .

مثال ــ سه نقطه مادی مطابق شکل ۹ـ۹ با سه میله بیوزن بهم متصل ومجموعاً تشکیل جسم واحدی را میدهند . ممان دینرسی جسم را (a) نسبت به‌محوری‌که از A میگذرد وبرصفحه‌تصویر عمود است و (b) نسبت به محوریکه B و C را بهم وصل‌میکند بدست‌آورید .



شکل ۹ـ۹

(a) نقطه مادی واقع درنقطه A برمحور بنابراین فاصله آن ازمحور صفراست وسهمی در ممان دینرسی‌کل ندارد . بنابراین داریم:

$$I=\Sigma m_i r_i^2 = 10\,gm \times (5cm)^2 + 20\,gm \times (4cm)^2 = 570\,gmcm^2$$

(b) نقاط واقع در B و C برمحور واقع وسهم آنها درممان دینرسی کل‌صفراست پس داریم :

$$I=\Sigma m_i r_i^2 = 30\,gm \times (4cm)^2 = 480\,gmcm^2$$

حل‌این مرحله نشان میدهدکه ممان دینرسی برخلاف جرم (که اصولا مقدار ثابتی است) نسبت به محورهای مختلف متفاوت است .

وقتی جسمی از نقاط مادی مجزا ومحدود تشکیل نشده بلکه توزیع جرم درآن به صورت اتصالی باشد بایدممان دینرسی‌آنرا بااستفاده از انتگرال‌محاسبه نمود. دراینصورت باید جسم‌را به اجزاء بیشماری که‌جرم هریك Δm است تجزیه نمود . فرض‌کنیم r فاصله یکی ازاین اجزاء ازمحور چرخش باشد . هر Δm را درمجذور r نظیرآن ضرب‌ومجموعه $\Delta m r^2$هارا‌حساب میکنیم .

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \Sigma r^2 \Delta m = \int r^2 dm \qquad (9-17)$$

هرگاه dm و dv بترتیب ، جرم و حجم یك‌جزء و ρ توده ویژه این جزء باشد خواهیم داشت :

$$dm = \rho dV$$

و فرمول ۹ـ۱۷ را میتوان چنین نوشت :

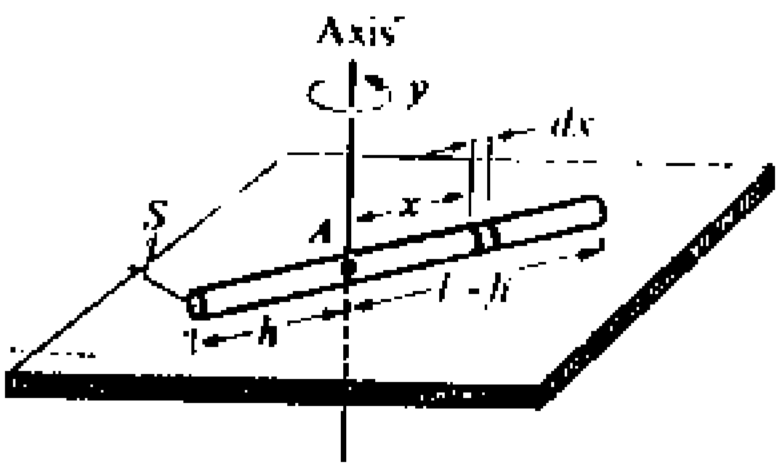
$$I = \int r^2 \rho dV$$

وهرگاه توده ویژه تمام نقاط جسم ثابت باشد جسم را همگن یا هموژن مینامند و در این حالت داریم :

$$I = \rho \int r^2 dV$$

اجزاء را بهر شکل دلخواه میتوان انتخاب نمود بشرط آنکه **فاصله‌کلیه نقاط یك‌جزء از محور مقدار ثابتی باشد** .

حل انتگرال برای هرجسم باهر شکل دلخواه مشکل است ولی برای اجسامی‌که شکل منظم هندسی دارند انتگرال مذکور باسانی حل میشود : ذیلا چند مثال نمونه حل شده است .



شکل ۹—۱۰

مثال۱ـ ممان دینرسی میله نازك نسبت به محور عمود برآن . درشکل ۹ـ۱۰ میله نازکی نشان داده شده‌که جرم آن m وطول‌آن l فرض شده است . میخواهیم ممان دینرسی این میلــه را نسبت به محور A که بفاصله دلخواه h ازیکطرف آن واقع است حساب‌کنیم. جزئی‌ازمیله را بطول dx وبفاصله x از A درنظر گرفته سطح مقطع میله را S فرض‌کنیم خواهیم داشت :

$$dm=\rho dV=\rho Sdx=\rho\frac{Sl}{l}dx=\frac{m}{l}dx$$

واکنون داریم :

$$I_A=\int x^2dm=\frac{m}{l}\int_{-h}^{l-h}x^2dx=\frac{m}{l}\left.\frac{x^3}{3}\right]_{-h}^{l-h}=\frac{1}{3}m(l^2-3h+3h^2)$$

بادر دست داشتن فرمول فوق میتوانیم ممان دینرسی میله را نسبت بهرمحور عمــود برآن که ازهر نقطه دلخواه عبور کند بدست‌آوریم مثلا وقتی بخواهیم ممان‌دینرسی‌را نسبت به محوریکه از انتهای چپ‌آن عبور میکند بدست آوریم مینویسیم $h=0$ وخواهیم داشت:

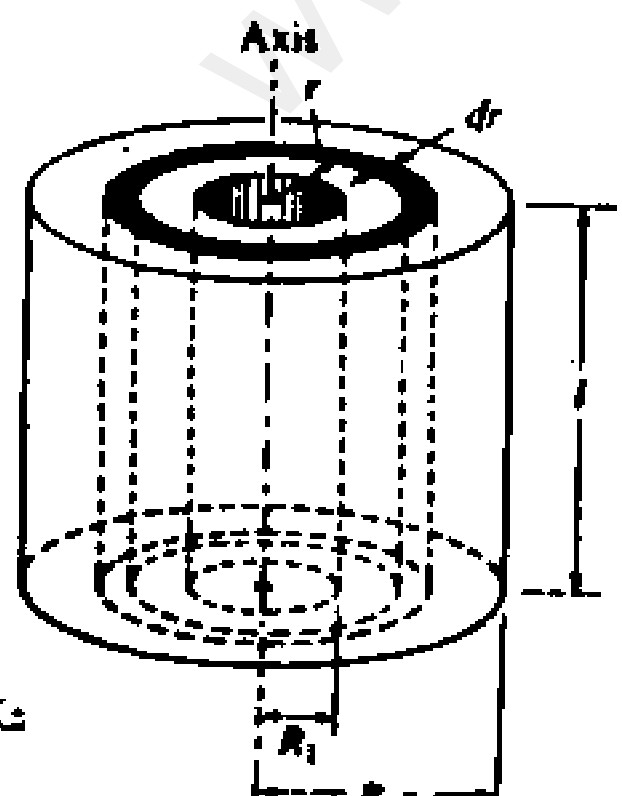
$$I=\frac{1}{3}ml^2$$

وقتی محور ازانتهای راست‌آن عبور کند داریم :

$$I=\frac{1}{3}ml^2 \quad و \quad h=l$$

ومعمولا هم‌منتظر بودیم که‌هر دوجواب‌یکسان باشد. هر گاه ممان دینرسی نسبت به محوریکه از وسط آن بگذرد مورد نیاز باشد داریم :

$$I=\frac{1}{12}ml^2 \quad و \quad h=\frac{l}{2}$$



شکل۹—۱۱

مثال۲ـ لوله یا میله استوانه‌ای درشکل ۹ـ۱۱ لوله‌ای بطول l نشان داده شده که اشعه

داخلی وخارجی‌آن بترتیب R_1 و R_2 است . جزئی را که درنظرمیگیریم لوله نازکی بشعاع r وبضخامت dr وبطول l است . هرگاه ρ توده ویژه جسم باشد داریم :

$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r dr) \times l$$

وممان دینرسی چنین محاسبه میشود :

$$I = \int r^2 dm = 2\pi l \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3 dr$$

هرگاه جسم غیر همگن باشد میبایست ρ را بصورت تابعی از r داشته باشیم تا انتگراسیون ممکن باشد. برای یك‌لوله همگن داریم :

$$I = 2\pi l\rho \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{\pi l \rho}{2}(R_2^4 - R_1^4)$$

جرم لوله برابر حاصل‌ضرب حجم درتوده ویژه است وحجم آن عبارتست از :

$$\pi l(R_2^2 - R_1^2)$$

وممان دینرسی آن برابرخواهد بود با :

$$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2) \qquad (۹-۱۸)$$

هرگاه بجای لوله میلهٔ تو پر باشد میتوان فرض کرد که میله لوله ایست‌که شعاع داخلی‌آن صفر است‌یعنی $R_1 = 0$ و $R_2 = R$ وداریم :

$$I = \frac{1}{2} m R^2 \qquad (۹-۱۹)$$

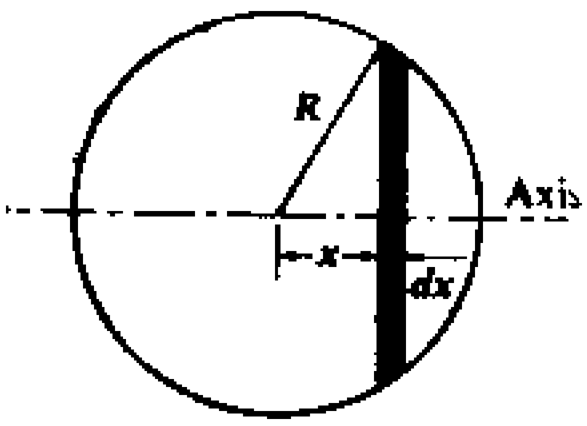
هرگاه لوله بسیار نازك باشد (لوله بخاری) میتوان تقریباً نوشت $R = R_1 = R_2$ دراینصورت داریم :

$$I = m R^2$$

دیده میشودکه ممان دینرسی لوله و میله نسبت به محور تقارن آن تابع طول لوله نیست . مثلا دولوله‌که اقطارداخلی وخارجی آنها وجرم آنها مساوی است (یکی از برنج

باطول کوتاهتر ودیگری ازآهن باطول بیشتر) دارای ممان دینرسی مساوی (نسبت‌بمحور) هستند. اندازه ممان دینرسی‌نسبت به محور فقط تابع‌نحوه توزیع جرم درامتداد شعاع‌است وتابع توزیع جرم درامتداد محور نیست . لذا فرمول ۹ـ۱۹ برای یك میله باطول‌دلخواه وبرای یك قرص باضخامت بسیارکم صحیح است . همچنین فرمول ۸ـ۱۸ رامیتوان برای یك‌لوله یا یك واشر بضخامت‌کم مورد استفاده قرار داد .

مثال ۳ـ ممان دینرسی‌کره همگن نسبت به محور . کره را به قرص های بسیار نازکی تقسیم میکنیم . (شکل ۹ـ۱۲) شعاع یکی از این قرصها برابر :



شکل ۹ـ۱۲

$$r=\sqrt{R^2-x^2}$$

وحجم‌آن برابراست با :

$$dV=\pi r^2 dx=\pi(R^2-x^2)dx$$

وجرم آن چنین است :

$$dm=\rho dV$$

وازفرمول ۹ـ۱۹ ممان دینرسی‌آن چنین محاسبه میشود :

$$dI=\frac{\pi\rho}{2}(R^2-x^2)^2dx$$

وممان دینرسی کل‌کره برابراست با :

$$I=2\times\frac{\pi\rho}{2}\int_0^R(R^2-x^2)^2dx$$

بعلت تقارن ، ممان دینرسی نیمه چپ‌ونیمه‌راست‌کره باهم‌مساوی است. پس‌ازمحاسبه انتگرال فوق برای نیمکره و مضاعف‌کردن جواب خواهیم داشت :

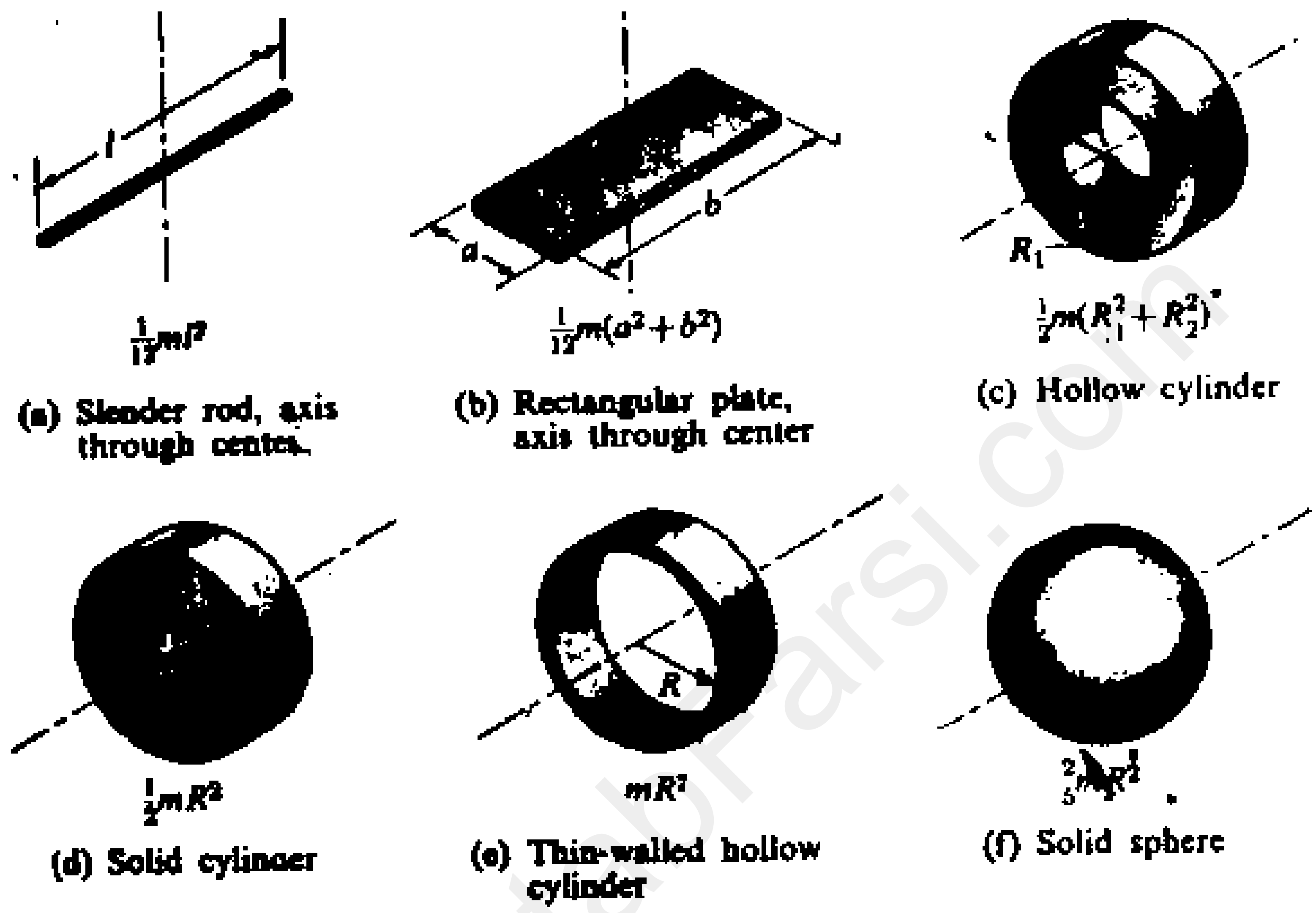
$$I=\frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

جرم‌کره برابراست با :

$$m=\rho V=\frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

لذا خواهیم داشت :

$$I=\frac{۲}{۵}mR^{۲}$$



شکل ۹ـ۱۳ ممان دینرسی چند جسم با شکل هندسی منظم

درشکل ۹ـ۱۳ ممان دینرسی چند جسم که ضمن سادگی دارای اهمیت هستندنوشته شده است .

برای هرجسم باهرشکل دلخواه همیشه میتوان فاصله‌ای از محور را چنان پیداکرد که اگر تمام جرم جسم درآن فاصله فرض شود ممان دینرسی جسم تغییر نکند . این‌فاصله را **شعاع ژیراسیون** مینامند وآنرا با k نشان‌میدهند، شعاع‌ژیراسیون نیز نسبت بمحورهای مختلف متفاوت است .

هرگاه اندازه شعاع ژیراسیون معلوم باشد وتمام جرم‌را دراین فاصله ازمحورفرض کنیم‌ممان دینرسی‌جسم برابر $mk^{۲}$ است چون داریم $I=mk^{۲}$ پس خواهیم داشت:

$$k=\sqrt{I/m} \qquad (۹-۲۰)$$

مثال ـ شعاع ژیراسیون میله نازکی بطول l وبجرم m را نسبت به محوری که از وسط میله بر آن عمود است بدست آورید .

$$k_o = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}ml^2}{m}} = \frac{l}{2\sqrt{3}} = 0/289l$$

توجه دقیق باین نکته لازم است که درمحاسبه ممان دینرسی نمیتوان تمام جرم جسم رادرمرکز ثقل آن فرض نمود. مثلاً فاصله مرکز ثقل میله‌ای، که بتواند حول محوریکه ازوسط آن میگذرد بچرخد، ازمحورصفراست، در حالیکه شعاع ژیراسیون آن $\frac{l}{\sqrt{3}}$ است و ممان دینرسی آن $\frac{ml^2}{12}$ خواهد بود .

۹ـ۹، انرژی جنبشی کار، توان

وقتی جسم صلبی حول محور ثابتی بچرخد v_i سرعت خطی یك نقطه مادی از این میله که بفاصله r_i از محور قرار دارد $r_i\omega$ است که در آن ω سرعت زاویه‌ای چرخش است. انرژی جنبشی این نقطه مادی برابراست با :

$$\frac{1}{2}m_iv_i^2 = \frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2$$

انرژی جنبشی کل برابرمجموع انرژی جنبشی ذرات مختلف است یعنی :

$$E_k = \Sigma\frac{1}{2}m_ir_i^2\omega^2 = \frac{1}{2}(\Sigma m_ir_i^2)\omega^2$$

اما $\Sigma m_ir_i^2$ برابر I ممان دینرسی جسم نسبت به محور است پس خواهیم داشت :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}I\omega^2} \qquad (۹ـ۲۱)$$

یعنی ممان دینرسی جسمی که حول محور ثابتی میچرخد با فرمولی شبیه فرمول محاسبه انرژی جنبشی انتقالی بدست میاید . دراین فرمول I ممان دینرسی شبیه m جرم و ω سرعت زاویه‌ای شبیه v سرعت خطی است (به جدول ۹ـ۱ مراجعه کنید).

مثال ـ در دستگاه نشان داده شده درشکل ۹ـ۸ مسئله را براساس‌قضیه‌کارـانرژی مورد بحث قرار دهید . نیروهای وارده بر دستگاه **P** و w_2 هستندکه اصولا کاری انجام نمیدهند و w_1 است که نیروی ذخیره‌کننده انرژی است . بنابرقضیه کار ـ انرژی، کاهش انرژی پتانسیل دستگاه وقتی وزنه w_1 باندازه y سقوط کند برابر جمع انرژی جنبشی انتقالی وزنه آویزان وانرژی جنبشی دورانی چرخ است .

$$m_1 g y = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

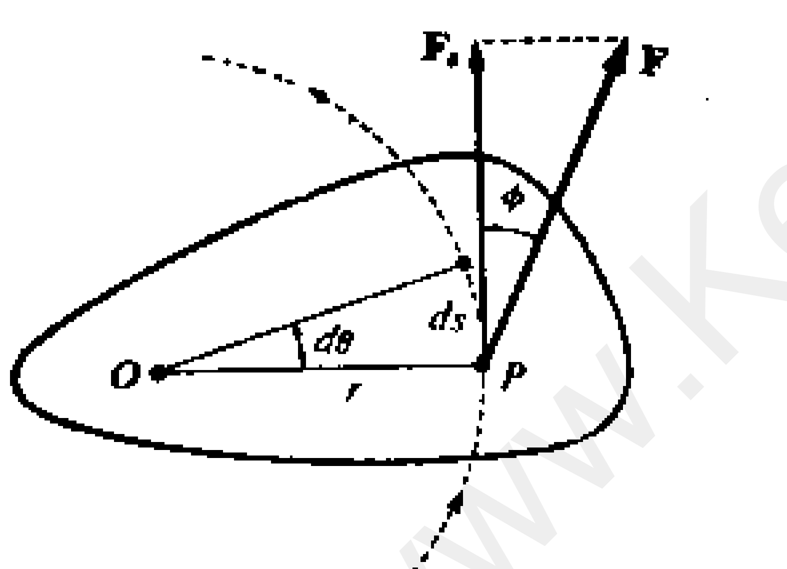
اما:

$$v = R\omega$$

پس میتوان نوشت :

$$v^2 = 2\left[\frac{1}{1+(I/m_1R^2)}\right]$$

درشکل ۹ـ۱۴ نیروی خارجی **F** برنقطه p ازجسمی‌که‌حول‌محوری عمود برصفحه تصویر که از O میگذرد وارد میشود . وقتی‌جسم باندازه $d\theta$ بچرخد نقطه p فاصله $ds = r d\theta$ را طی‌میکند وکارنیروی **F** برابراست با :



شکل ۹ـ۱۴ کارانجام شده توسط نیروی **F** در چرخش $d\theta$

$$W = \int F_s ds = \int F_s r d\theta$$

اما $F_s r$ گشتاورنیروی **F** نسبت به محورچرخش است . هر گاه آنرا Γ بنامیم داریم :

$$w = \int_{\theta_1}^{\theta_1} \Gamma d\theta \qquad (۲۲ـ۹)$$

هر گاه بیش از یك نیرو به جسم وارد شود کارکل برابر کار گشتاورکل‌مؤثر بر جسم است .

از فرمول ۹ـ۱۵ نتیجه میشود :

$$\Gamma = I\alpha = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

لذا داریم:

$$\Gamma d\theta = I\omega d\omega$$

وازآنجا :

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

یعنی کاربرآیند گشتاورهای مؤثر برجسم برابر افزایش انـرژی جنبشی جسم است . این قضیه کاملا شبیه قضیه کار ـ انرژی در حرکت است انتقالی است .

توان ایجاد شده توسط نیروی **F** وقتی سرعت نقطه اثر نیرو **v** باشد (شکل ۴ـ۱۹) عبارتست از :

$$P = F_s \cdot v = F_s \cdot r\omega$$

وچون $F_s \cdot r = \Gamma$ است پس خواهیم داشت :

$$\boxed{P = \Gamma \cdot \omega} \qquad (۹ـ۲۴)$$

که عیناً شبیه فرمول $P = F_s \cdot v$ در حـرکت انتقالی است . تـوان مفید یك موتور برابر حاصلضرب گشتاور مؤثر برمحور درسرعت زاویه‌ای جسم است . در اتومبیل معمولا باعوض کردن دنده میتوان اندازه گشتـــــاور را تغییر داد، بهمین‌جهت جعبه‌دنده را یك **torque converter** میتوان پنداشت . (یعنی تغییر دهنده گشتاور) معمولا موتور اتومبیل وقتی در دور معین کارکند توان‌آن ماکزیموم است . وقتی‌اتومبیل درجاده شیبدار بالا میرود وبا عوض کـردن دنده ترتیبی میدهنـدکه دور موتور زیاد باشد (توان‌موتور ماکزیموم) ولی‌سرعت اتومبیل‌کم باشد (تا نیروی‌زیادتری برای جابجاکردن اتومبیل بر آن وارد شود) درحالیکه درجاده افقی دورکمتر وتوان‌موتورکمتر است اما چون نیروی مقاوم‌کم است ، سرعت خطی اتومبیل زیاد تر خواهد بود .

مثال ـ بنا بادعای کارخانه‌ای اتومبیل‌های ساخت این‌کارخانه‌دارای موتوری بتوان ۳۴۵hp هستند وگشتاورمؤثر برمحور آن ۴۷۵lb/ft است . سرعت زاویـه‌ای حرکت

موتور را پیدا کنید .

$$\omega=\frac{P}{\Gamma}=\frac{۳۴۵\times ۵۵۰\,\mathrm{ftlb/sec}}{۴۷۵\,\mathrm{lb/ft}}=۴۰۰\,\mathrm{rad/sec}\simeq ۳۸۰۰$$ دور در دقیقه

۹ـ۱۰ ، اندازه حرکت زاویه‌ای (یا ممان سینتیك)

رابطه زیر را

$$\Gamma=I\alpha$$

میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\Gamma=I\frac{d\omega}{dt}=\frac{d}{dt}(I\omega) \qquad (۹\text{-}۲۵)$$

حاصلضرب I و ω درحرکت دورانی مشابه حاصلضرب m و v درحرکت انتقالی است . چون $m.v$ را اندازه حرکت خطی نامیدیم با استفاده از تشابه ، $I\omega$ را **اندازه حرکت زاویه‌ای یا ممان سینتیك** مینامیم و آنرا به L نمایش میدهیم .

$$\boxed{L=I\omega} \qquad (۹\text{-}۲۶)$$

(با وجود آنکه در اجسام صلب،ممان سینتیك جسم برابر $I\omega$ است ؛ **تعریف کلی ممان سینتیك این نیست**)

اکنون فرمول ۹ـ۲۵ را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$\Gamma=\frac{dL}{dt} \qquad (۹\text{-}۲۷)$$

یعنی برآیند گشتاورهای خارجی مؤثر برجسمی برابراست با تغییر ممـان سینتیك آن‌جسم واین نظیر بیان « تغییر اندازه حرکت برابر ضربه مؤثر برجسم » درانتقال‌است. طرفین رابطه (۹ـ۲۷) را در dt ضرب کرده انتگرال طرفین را محاسبه میکنیم :

$$\int_{0}^{t}\Gamma dt=L-L_0 \qquad (۹\text{-}۲۸)$$

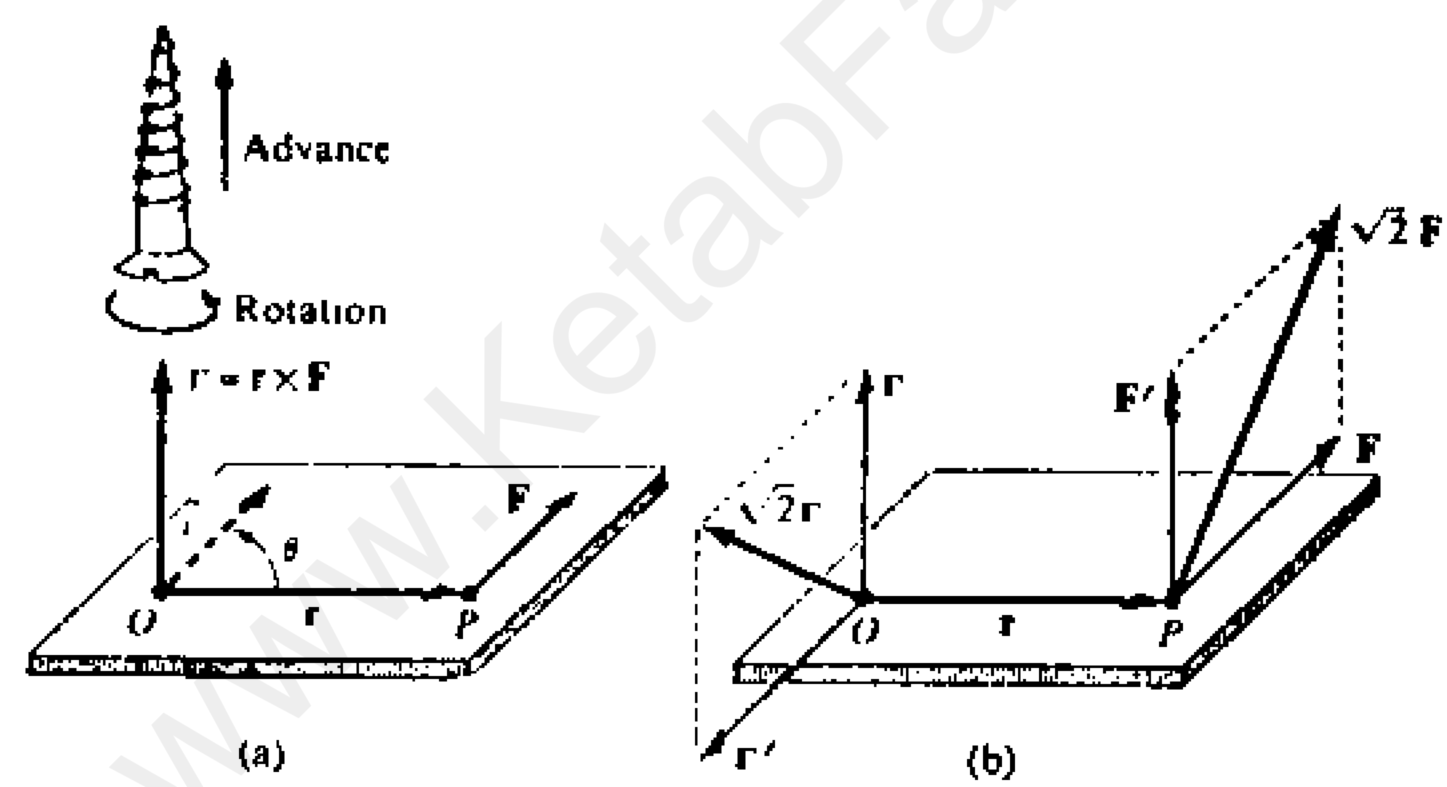
انتگرال Γdt را ضربه زاویه‌ای مینامند که مشابه یا $\int Fdt$ درحرکت انتقالی

است . بنابراین فرمول فوق ، قضیه اندازه حرکت ــ ضربه را درحرکت‌دورانی بیان‌میکند ومیگوید : **برآیند ضربه زاویه‌ای حاصل ازگشتاورهای مؤثر برجسم ، برابر تغییرممان سینتیك جسم است .**

تاکنون فقط درباره دوران‌جسم حول محور ثابتی‌که بر صفحه شامل نیروها عمود باشد صحبت‌کرده‌ایم . وقتی محور دوران جسم ثابت‌نباشد باید **گشتاور برداری** جسم‌نسبت بیك نقطه را مورد استفاده قرار دهیم‌که قبلا در باره آن در قسمت‌های ۳ـ۲ و ۳ـ۵ بحث کردیم ومجدداً برای یادآوری ، آنرا مورد بحث قرار میدهیم :

درشکل ۹ـ۱۵(a) نیروی **F** که درصفحه افقی‌قرار دارد بنقطه P اثرمیکند . نقطه O درفاصله عمودی r ازنقطه P واقع‌است **r** را برداری فرض‌میکنیم‌که O و P بترتیب مبدء و انتهای آن باشند . ممکن است از O محوری عبور کند یا نکند . هرگاه محوری درنظر گیریم‌که از O برصفحه **r** و **F** عمود باشدگشتاور نیروی **F** نسبت بدین محور عبارتست از :

$$\Gamma = \mathrm{rF}$$



شکل ۹ـ۱۵ (a) بردار Γ گشتاور برداری F نسبت بنقطه O برابر است با $\Gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$
(b) منتجه‌گشتاورهای برداری دو نیرو برابر جمع برداری این‌دوگشتاور است .

بنابرتعریف گشتاور برداری نیروی **F** نسبت بنقطه O برداری است که اندازه آن rF ، امتدادآن عمود برصفحه شامل **r** و **F** است‌وجهت‌آن ازقاعده حرکت پیچ‌راستگرد بدست میآید . بدین ترتیب : بردار اول (**r**) را طوری بچرخانید تا با طی کمترین زاویه θ بربردار دوم (**F**) منطبق شود . درشکل به بردار دوم با نقطه چین از مبدأ بردار اول رسم شده است . جهت Γ جهت پیش‌رفتن‌یك پیچ راستگرد . وقتی پیچ را در جهت θ بچرخانند میباشد .

گشتاور برداری بردار F نسبت بنقطه O اعم از اینکه محوری از O عبور کند یا نکند مقدار ثابت و مشخصی دارد . همانطور که در قسمت ۳ـ۲ بیان شد هرگاه از O محوری برصفحه نیروها عمود شود گشتاور برداری بردار r نسبت به این محور برابر حاصلضرب برداری دوبردار r و F است یعنی :

$$\Gamma = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

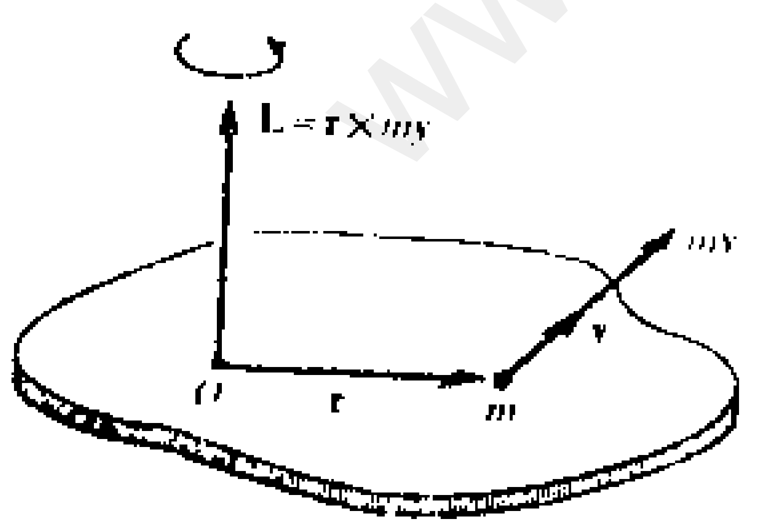
و یا :

$$\Gamma = rF\sin\theta$$

شکل ۹ـ۱۵ برای حالت خاصی رسم شده است که $\theta = 90^\circ$ و $\sin\theta = 1$ است.

لزوم بیان برداری گشتاور موقعی احساس میشود که بخواهیم گشتاور دوبردار را باهم جمع کنیم. فوراً این سئوال پیش میاید که آیا باید گشتاورهارا مثل اعداد جمع کرد یامثل بردار ؛ فرض کنیم مطابق شکل ۹ـ۱۵(b) علاوه برنیروی F واقع در صفحه افقی نیروی F′ واقع‌درصفحه قائم نیز بر P واردشود. برای سهولت اندازه F و F′ را مساوی فرض می‌کنیم. اندازه گشتاور F′ نیز rF است و بنابرقاعده پیچ ، امتداداین گشتاوربرامتداد گشتاور نیروی F عمود است.

هرگاه گشتاور دونیرو جمع جبری میشدند میبایست اندازه گشتاورکل ۲rF شود. حال اگر دونیروی F′ و F را ابتدا باهم ترکیب‌کرده برآیند آنهارا بدست‌آوریم‌اندازه گشتاوراین برآیند برابر $\sqrt{2}rF$ میشودواین باجمع دوگشتاور F و F′ بطریق برداری تطبیق میکند. (میدانیم که برآیند دونیرو باید به تنهائی اثر دونیرو را داشته باشد . پس باید گشتاور دونیرو که جداگانه محاسبه شده اند جمعاً اثر گشتاور برآیند را داشته باشد. پس بایدگشتاور دوبردار F و F′ بطریق برداری جمع شوند تا باگشتاوربرآیند دونیرو تطبیق نمایند. ـ مترجم) .



شکل ۹ـ۱۶، بردار L گشتاور اندازه حرکت یا اندازه حرکت زاویه ای (ممان سینتیك) یـك جسم بجرم m نسبت بنقطه O برابر $L=r.mv$ است .

درشکل ۹ـ۱۶ صفحه‌ای نازك نشان داده شده‌که حول محور قائمی‌که از O می‌گذرد با سرعت زاویه ω میچرخد جزئی‌ازاین‌صفحه‌بجرم m کـه درفاصله r از محور قرار گرفته دارای سرعت $v = r\omega$ واندازه‌حرکت خطی mv است. ممان سینتیك L جسم برابر حاصلضرب r در اندازه حرکت خطی mv است. یعنی :

$$L = r\cdot mv$$

میتوان گفت ممان سلینتیك برداری است

برابر حاصلضرب برداری دو بردار r و mv یعنی ،

$$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$$

بنا برقاعده پیچ راستگرد جهت **L** برمحور دوران منطبق است (ودر شکل نیز چنین نشان داده شده است .)

بردار ممان سینتیك کـل یك جسم برآیند بردار های ممان سینتیك هریك از نقاط مادی موجود دراین جسم است. هرگـاه همه بردار های ممان سینتیك نقاط مادی یك جسم دریك امتداد وجهت باشند اندازه بردار ممان سینتیك کل از جمع جبری اندازه‌های بردار های ممان سینتیك ذرات بدست میآید . در مثال فوق ، چون جسم صلب است چنین وضعی موجود است. پس خواهیم داشت :

$$L=\Sigma rmv$$

اما $v=r\omega$ است و ω برای تمام ذرات جسم مقداریست ثابت لذا میتوان نوشت :

$$L=(\Sigma mr^{2})\omega=I\omega$$

مشاهده میشودکه تعریف جدید ممان سینتیك باتعریف قبلی کاملا منطبق است.

اکنون‌فرض‌کنیم از خارج، گشتاور Γ برجسم اثرکند. در فاصله زمانی‌کوتاه Δt ممان سینتیك صفحه باندازه $\Delta L=L\Delta t$ تغییر کرده است .

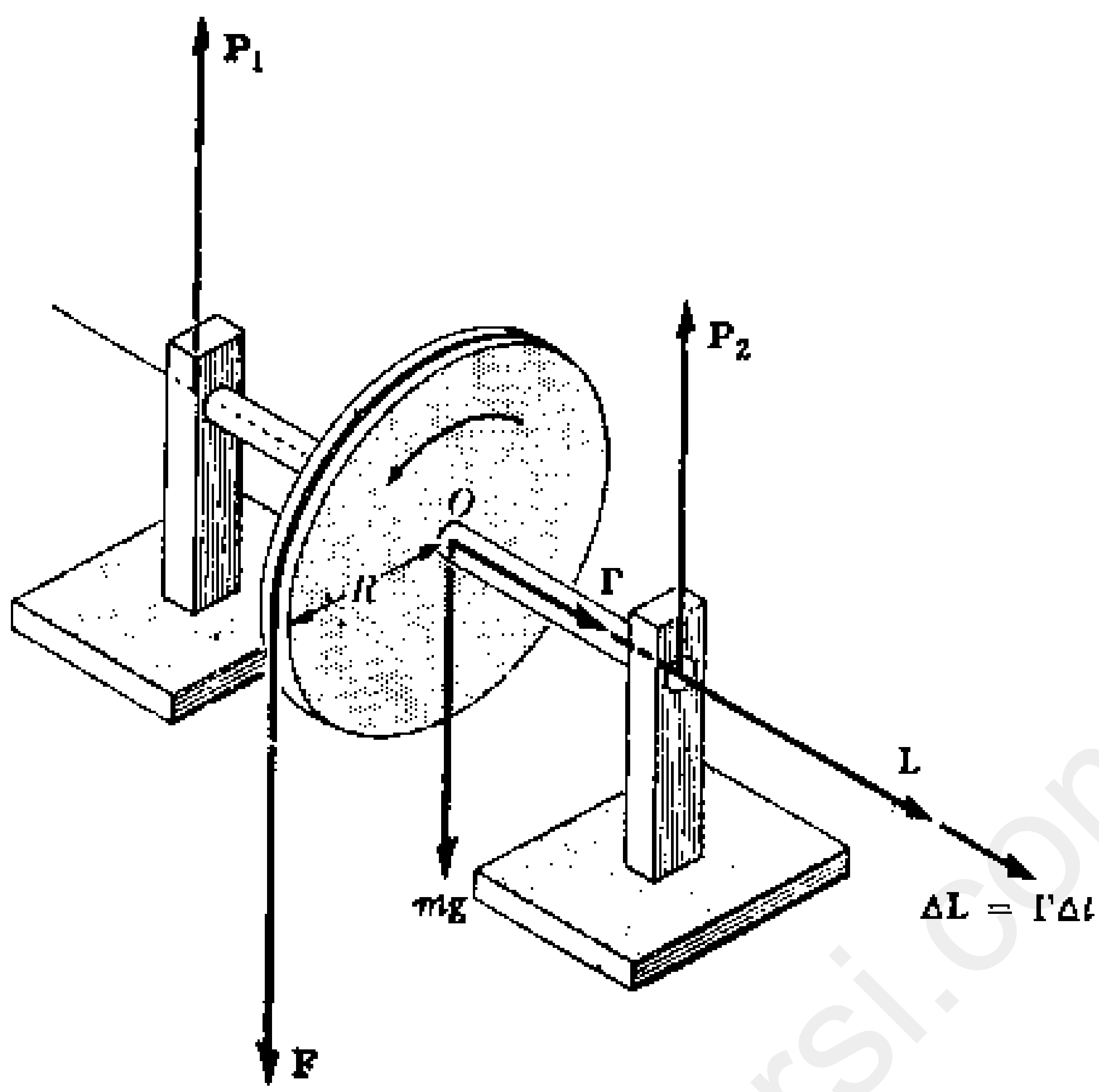
چون بردار Δ**L** وبردار Γ هردو درامتداد محور دوران هستند میتوان تساوی فوق را بصورت یك تساوی برداری نوشت :

$$\Delta\mathbf{L}=\Gamma\Delta t \qquad (۲۹-۹)$$

حتی درمواردیکه **L** و بردار Γ برهم منطبق نیستند تساوی فوق صحیح است. یعنی **تغییر برداری ممان سینتیك ΔL یك جسم برابر $\Gamma\Delta t$ ضربه حاصله ازگشتاور خارجی مؤثر براین جسم میباشد .**

اینك ازتعریف گشتاور برداری وممان سینتیك درحل مسئله خاصی استفاده میکنیم . درشکل ۹-۱۷ قرصی نشانداده شده است‌که روی‌محوری سوار است.دوطرف محور درون دوبستر قرارگرفته. هرگاه قرص در جهت نشانداده شده بچرخد بردار ممـان سینتیك **L** بطرف راست متوجه ودرامتداد محور چرخش است.

فرض کنیم طنـابی بدور چرخ پیچیده شده باشد و آنـرا بانیروی **F** بکشند اندازه گشتاور مؤثر برمحور برابر $\Gamma=F.R$ است وبردار Γ درامتداد محور قراردارد . در

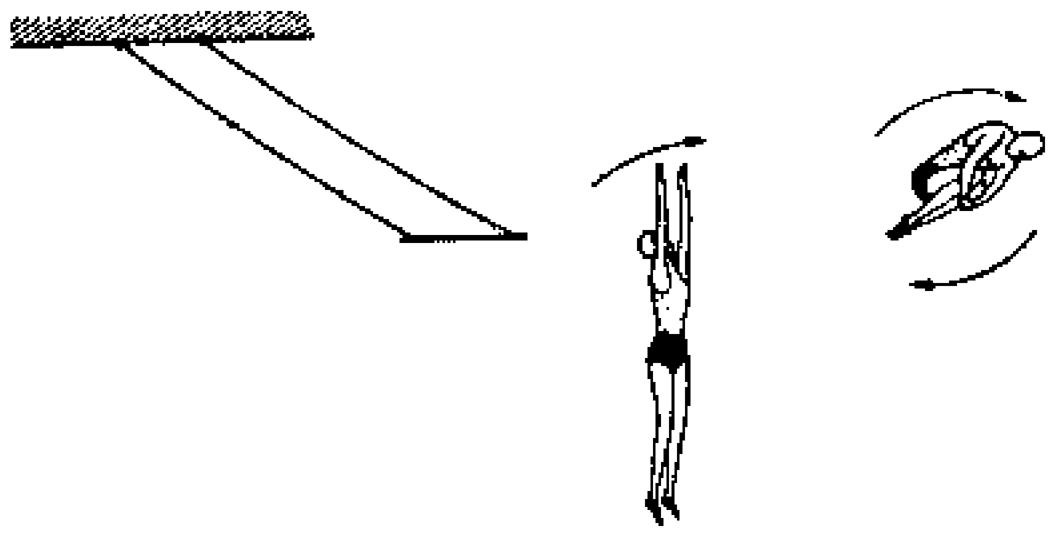


شکل ۹-۱۷ $\Delta \mathbf{L}$ تغییر برداری ممان سینتیك است که درزمان Δt بوسیله Γ بوجود آمده‌است. Γ و $\Delta \mathbf{L}$ در یك جهت Γ هستند.

زمان Δt گشتاور مؤثر برمحور تغییر ممان سینتیکی برابر $\Delta \mathbf{L}$ بوجود میاوردکه برابر است با $\Gamma \Delta t$. امتداد وجهت این ضربه زاویه‌ای با امتداد جهت $\mathbf{L}$ یکی است . وقتی $\Delta \mathbf{L}$ رابطریق‌برداری با $\mathbf{L}$ جمع‌کنیم یا $\mathbf{L}+\Delta \mathbf{L}$ که هم جهت با $\mathbf{L}$ است بدست میآید . بعبارت دیگر اندازه ممان سینتیك افزایش یافته ولی جهت آن ثابت مانده است . افزایش ممان سینتیك باین شکل فقط بدین معنی است‌که سرعت دوران جسم افزایش یافته و جسم تندتر میچرخد .

درنظر اول چنین بنظر میاید‌که بحث مفصل فوق چیزی جزحل مسئله حرکت دورانی یك جسم بدور محور (آنهم ازطریقی مشکل) نیست . در حالیکه درك مفهوم برداری ممان سینتیك ، اساس حل مسئله ژیروسکوپ است‌که درقسمت بعد بیان خواهد شد .

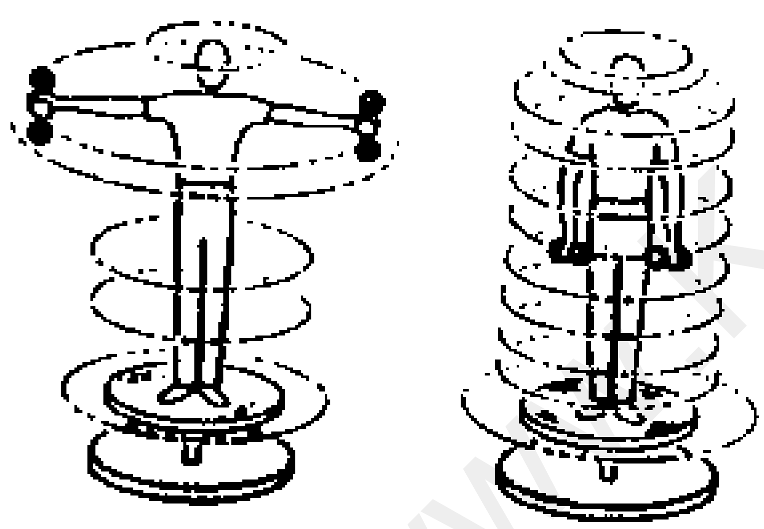
هرگاه گشتاور مؤثر برمحور برابر صفر باشد بنابر فرمول۹-۲۹، $\Delta \mathbf{L}$ نیزصفر است و **اندازه‌وجهت‌وامتدادبردار ممان‌سینتیك ثابت می‌ماند.** (شبیه اصل اول نیوتون‌در حرکت انتقالی) این بیان را اصل بقاء ممان سینتیك می‌نامند و این اصل نیز ، درردیف اصل بقاء اندازه حرکت خطی واصل بقاء انرژی ، یکی ازاصول اساسی مکانیك است. رقاصها ، اکروبات های سیرك وسکیت بازان همگی از این اصل ، درحرکات خود استفاده



شکل ۹ـ۱۸ بقاء ممان سینتیك

می کنند. فرض کنیم اکروباتی مطابق شکل ۹ـ۱۸ پس از آنکه خود را آزادانه درفضا رها کرد، در جهت نشانداده شده با سرعت زاویه‌کمی دوران داشته باشد. وقتی اودست و پای خود را جمع میکند I ممان دینرسی او نسبت به‌محور چرخش کم شده بادرنظر گرفتن اینکه $I\omega$ ثابت است سرعت زاویه‌ای یعنی سرعت دوران او زیادتر می‌شود.

مثـال ــ فرض کنید شخصی درحالیکه بازوان خود را باز نگهداشته و دو وزنه ۱۰ پوندی دردودست دارد، برروی صفحه دواری ایستاده و درهر دو ثانیه یکدور بدور خود می‌چرخد (شکل ۹ـ۱۹). هرگاه این شخص چنانکه در شکل نشانداده شده دست های خودرا بیندازد؛ سرعت زاویه‌ای چرخش او را درحالت دوم بدست آورید. ممان دینرسی شخص‌ثابت وبرابر $۴ slugft^۲$ است فاصله مرکز ثقل هروزنه را ازمحور دوران برابر $۳ft$ فرض کنید. پس از افتادن دست ها این فاصله $۶in$ میشود.



شکل ۹ـ۱۹ بقاء ممان سینتیك در دوران حول محور ثابت

هرگاه از اصطکاك هوا و محور چرخش و اصطکاك های درونی شخص صرفنظر شود میتوان گفت گشتاورخارجی وجود نداشته وممان‌سینتیك شخص ثابت مانده‌است یعنی:

$$I = I_{\text{شخص}} + I_{\text{وزنه‌ها}}$$

$$I = ۴ + ۲\left(\frac{۱۰}{۳۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = ۴/۱۶ slugft^۲$$

$$I_\circ = ۴ + ۲\left(\frac{۱۰}{۳۲}\right)(۳)^۲ = ۹/۶۳ slugft^۲$$

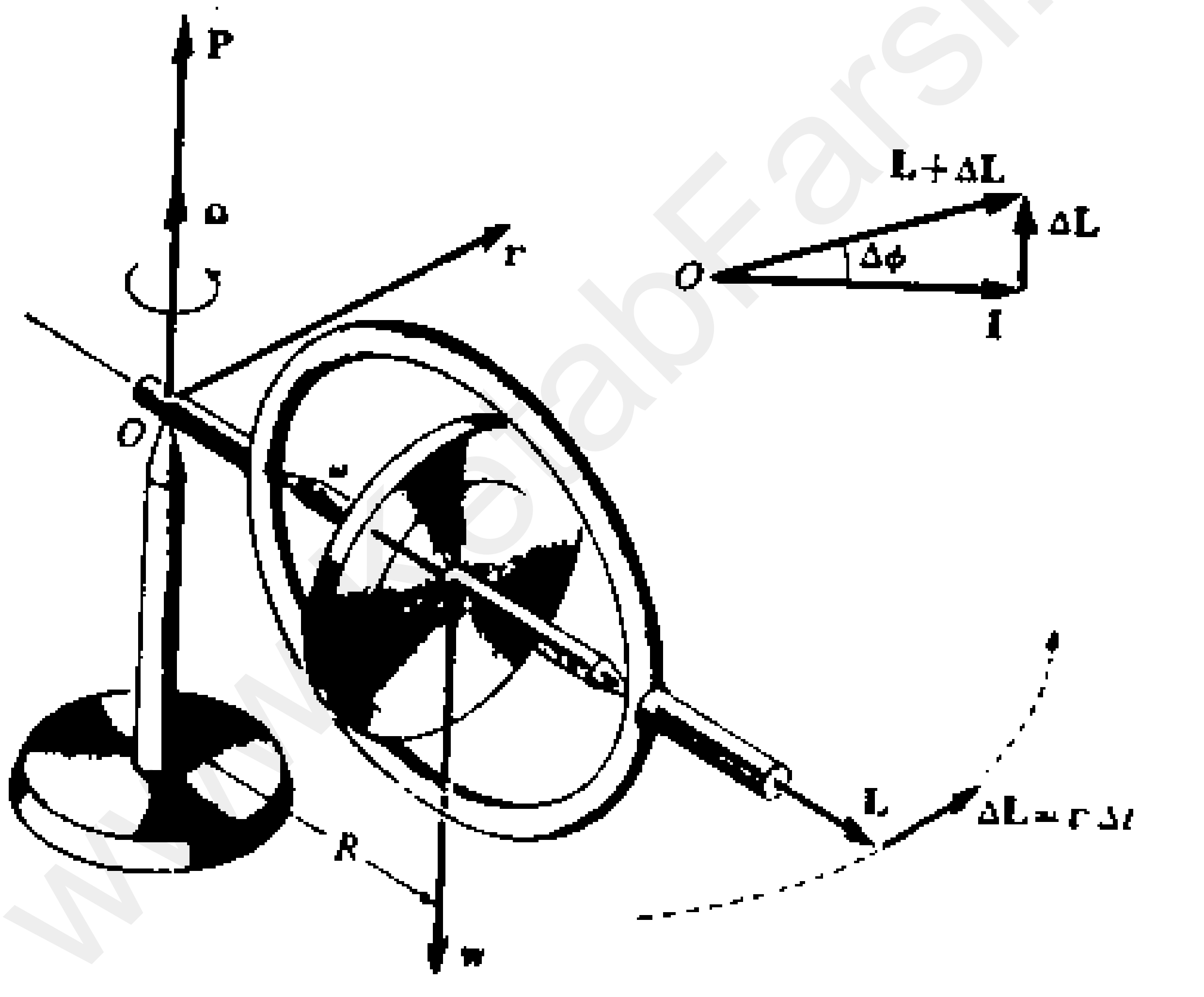
$$\omega_\circ = \pi\, rad/sec$$

$$\omega = \omega_\circ \frac{I_\circ}{I} = ۲/۳۱\pi \, \text{rad}/sec$$

یعنی سرعت زاویه‌ای بیش از دو برابر شده است .

۹-۱۱ ، دوران حول محور متحرك ، فرفره و ژیروسکوپ .

درشکل ۹-۲۰۰ اسبابی نشانداده شده که بهتر است فرفره نامیده شود. زیرادراین دستگاه، مرکز ثقل بر نقطه O منطبق نیست. معذالك آنرا بغلط ژیروسکوپ مینامند. هرگاه فرفره را بدور محور تقارن خود بچرخش درآورده محورآنرا درجهتی که درشکل نشان داده شده باسرعت زاویه‌ای مناسب بحرکت درآوریم ، دستگاه حول نقطه اتکاء O حرکت دورانی دیگری پیدا خواهد کرد که ماآنراحرکت انتقالی محورمینامیم، ولی محورحرکت وضعی فرفره (حرکت فرفره بدور محور تقارن) درسطح افقی باقی خواهد ماند.



شکل ۹-۲۰ بردار ΔL تغییر ممان سینتیك درزمان Δt است که دراثر گشتاور Γ نیروی وزن w حاصل شده است بردارهای ΔL و Γ دریك امتداد ویك جهت هستند (باشکل ۹-۱۷ مقایسه کنید .)

هرگاه محور فرفره درفضا ثابت بود ممان سینتیك آن برابر حاصلضرب ممان دینرسی آن نسبت به محور ، درسرعت زاویه‌ای آن حول محور بوده و بردار ممان سینتیك درامتداد محور قرار داشت چون محور حرکت وضعی ، خود در حال دوران است ممان سینتیك برمحورمنطبق نخواهد ماند هرگاه سرعت زاویه‌ای حرکت انتقالی محور ازسرعت

زاویه‌ای حرکت وضعی جسم بمراتب کمتر باشد تغییر ممان سینتیك دراثر حرکت انتقالی محور بسیارکم وقابل اغماض است. ممان سینتیك **L** نسبت به نقطه O را میتوان مطابق شکل درامتداد محور رسم نمود ووقتی محور فرفره می‌چرخد بردار ممان سینتیك که منطبق بر آن است نیز باآن می‌چرخد .

نیروی **P** نسبت به O گشتاوری ندارد . بنا براین گشتاور خارجی مؤثر برجسم منحصر به گشتاور نیروی وزن است که اندازه‌آن برابر است با :

$$\Gamma = \mathrm{wR}$$

جهت L چنانکه درشکل نشانداده شده ، برمحور عمود است.درزمان Δt (بابحثی که روی شکل۹ـ۱۷ شد مقایسه‌کنید) این گشتاور، تغییر ممان سینتیکی‌برابر $\Delta \mathbf{L}$ بوجود میآورد که درامتداد Γ است وازرابطه زیر بدست میآید :

$$\Delta \mathbf{V} = \Gamma \Delta t$$

پس اززمان Δt ممان سینتیك برابر جمع برداری $\mathbf{L}+\Delta\mathbf{L}$ است وچون $\Delta \mathbf{L}$ بر **L** عمود است اندازه بردار ممان سینتیك جدید برابر اندازه ممان سینتیك قبلی است ولی امتداد آنها بایکدیگر متفاوت است. انتهای بردار ممان سینتیك درجهتی که درشکل نشان داده شده می‌چرخد و باگذشت زمان ، این دوران ادامه مییابد . اماچون محور فرفره و بردار ممان سینتیك‌برهم منطبق هستند، پس با گردش بردار مذکور ، محور فرفره نیز باید بچرخد و بدین ترتیب حرکت انتقالی محور بوجود میآید . (حرکت انتقالی در اینجا ترجمه Precessional motion است نه Translation توجه داشته باشید که درنجوم میگویند زمین دو نوع حرکت دارد. وضعی یعنی حرکت بدور خود وانتقالی یعنی دوران بدور خورشید . پس دراین مبحث منظور ما ازحرکت انتقالی جابجا شدن درامتداد خط مستقیم نیست. مترجم .)

زاویه $\Delta\varphi$ که بردار **L** درزمان Δt طی می‌کند (به مثلثی که پهلوی شکل۹ـ۲۰ رسم شده توجه‌کنید) برابر است با :

$$\Delta \Phi = \frac{\Delta \mathrm{L}}{\mathrm{L}}$$

وسرعت زاویه‌ای حرکت انتقالی محور عبارت است از :

$$\Omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt}$$

اماچون داریم :

$$\frac{dL}{dt} = L$$

پس خواهیم داشت :

$$\Omega = \frac{\Gamma}{L} \quad \text{و} \quad \Gamma = \Omega L \tag{۹-۳۰}$$

یعنی سرعت زاویه‌ای حرکت انتقالی محور با ممان سینتیک نسبت عکس دارد. هرچه ممان سینتیک بیشتر شود این سرعت زاویه‌ای، کمتر خواهد شد بردار سرعت زاویه‌ای Ω برطبق قانون دست راست رو بیالا امتداد دارد . می‌توان فرمول ۸-۳۰ رابصورت تساوی برداری زیر نوشت :

$$\Gamma = \Omega \times L$$

تا وقتی که می‌توان با تقریب ، ممان سینتیك را برابر $I\omega$ نوشت : رابطه زیر صادق است :

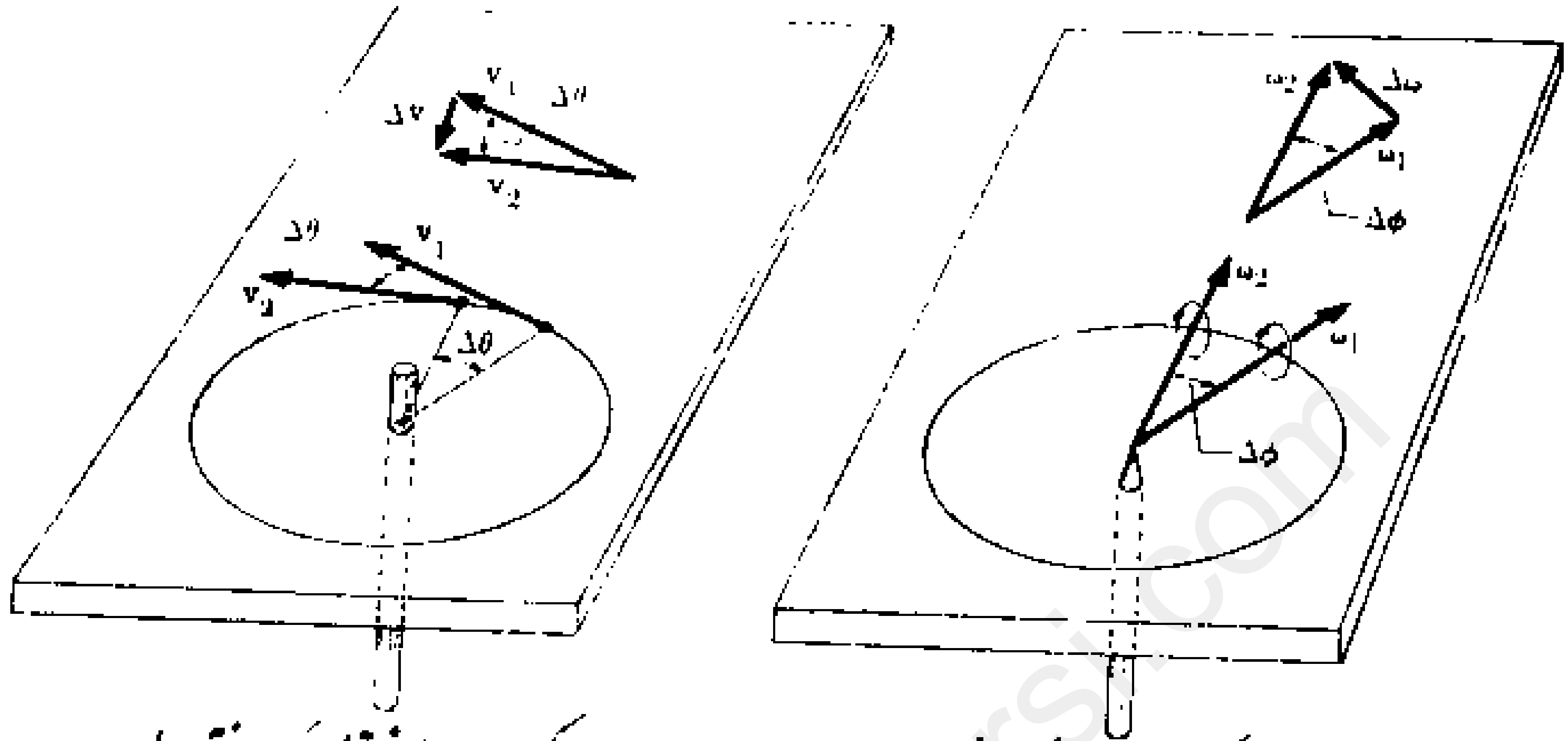
$$\Gamma = I\omega\Omega \tag{۹-۳۱}$$

چنانکه ازشکل ۹-۲۰ پیداست بردار $\mathbf{L}$ درجهتی‌که Γ قرار دارد می‌چرخد و همیشه چنین است. گویند بردار L با Γ مسابقه گذاشته است. ولی هیچگاه در مسئله فوق الذکر $\mathbf{L}$ به Γ نمیرسد زیرا باحرکت انتقالی محور Γ نیز تغییر جهت میدهد . در مواردی‌که L میتواند به Γ برسد حرکت انتقالی محور پس از انطباق دو بردار بر یکدیگر ازبین خواهد رفت .

Benfield درسال ۱۹۵۸ تشابهی بین حرکت دورانی ساده وحرکت فرفره پیدا کرد. این تشابه درشکل ۹-۲۱ نشانداده شده است . درسمت چپ ، دیاگرام و فرمولهای حرکت دورانی و در سمت راست حرکت انتقالی محور و فرمولهای مربوطه نشان داده شده است .

چرا فرفره شکل ۹-۲۰ نمی‌افتد؟ علت این‌است‌که نیروی قائم وروبیالای $\mathbf{p}$ مساوی ومختلف‌الجهت با $\mathbf{w}$ وزن‌جسم‌است. پس برآیندنیروها درامتدادقائم صفر وشتاب‌درامتداد قائم صفر است. میتوان گفت اندازه حرکت جسم درامتداد قائم ثابت میماند زیرا نیروئی برآن

اثر نمی‌کند. اما **P** و **w** یك زوج نیر و تشکیل میدهند که اندازه آن $\Gamma = wR$ و مخالف صفر است و ممان سینتیك جسم را تغییر میدهد.



حرکت دورانی تشابه یک نقطه مادی

$$v_1 = v_2 = v$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v}$$

$$\Delta v \simeq v\,\Delta\theta$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

$$a = v\omega \left(= \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \right)$$

$$F = ma$$

$$F = mv\omega$$

حرکت انتقالی یک فرفره

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \Delta\boldsymbol{\omega}$$

$$\Delta\omega \simeq \omega\,\Delta\phi$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

$$\alpha = \omega\Omega$$

$$\Gamma = I\alpha$$

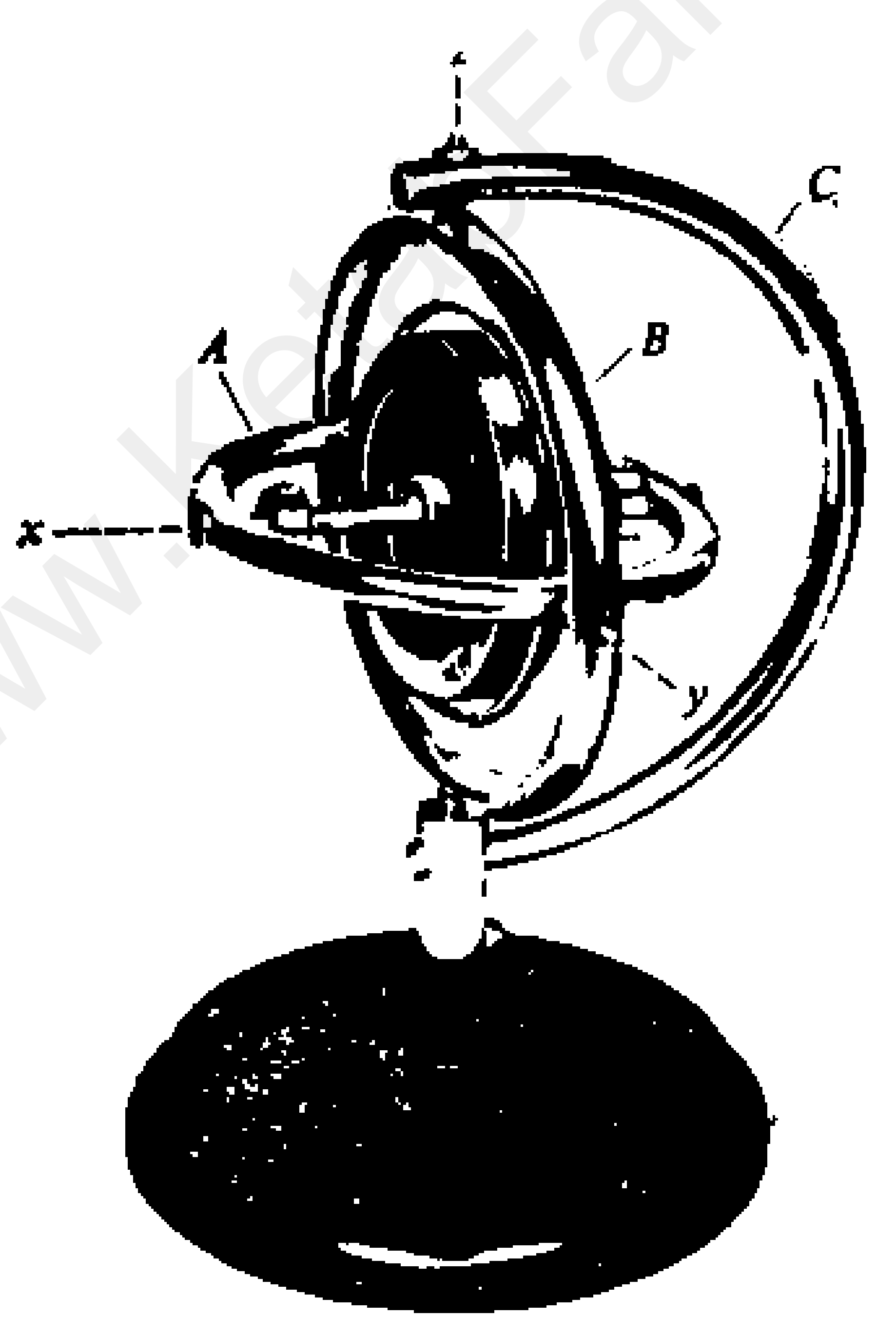
$$\Gamma = I\omega\Omega$$

شکل ۹ــ۲۱ تشابه بین حرکت دورانی و حرکت انتقالی محور یك فرفره

هرگاه فرفره چرخشی نداشت، ممان سینتیك اولیه ای نیز وجود نداشت تا اثر گشتاور وزن آنرا تغییر دهد. باگذشت زمان **Δt** ممان سینتیکی درجهت Γ درجسم بوجود میآمد. یعنی فرفره بروی پهلو بزمین می‌افتاد. (حول محور منطبق بر Γ که از **O** عبور کند میچرخید وبزمین می‌افتاد) اما وقتی فرفره میچرخد **ΔL** که درسطح افقی است و بر **L** عمود است باآن جمع‌برداری شده بردارجدیدی بهمان اندازه ودرهمان سطح افقی بوجود می‌آورد واین چنانکه قبلاگفته شد باعث پیدایش حرکت انتقالی محور خواهد شد.

برای اینکه نشان دهیم چرا **p** مساوی **w** است باید دید چگونه حرکت انتقالی محور شکل ۹ــ۲۰ بوجود میآید. فرض کنیم طرف دیگر قابی را که فرفره درون آن

میچرخد باانگشت خود نگاهداشته‌باشیم. دراینصورت انگشت و تکیه‌گاه O هریك نیمی از وزن یعنی $\frac{W}{2}$ راتحمل میکنند. هرگاه دفعتاً انگشت خودرا عقب برده قاب را آزاد گذاریم درلحظه اول برآیند نیروهای قائم وارد برجسم صفر نیست زیرا فقط یك تکیه‌گاه رو ببالا نیروی $\frac{W}{2}$ برآن وارد میکند . بنابراین مرکز ثقل فرفره درامتداد قائم وروبپائین دارای شتاب خواهد شد درهمین لحظه ، حرکت انتقالی محور (هرچند سرعت زاویه‌ای اولیه آن کمتر ازسرعت زاویه‌ای حدآنست) شروع میشود ودرنتیجه شروع حرکت رو بپائین ، فرفره نیروی بیشتری بـــــر نقطه اتکاء O وارد میکند و نیروی p که عکس العمل این نیروست نیز زیاد شده وحتی بمقدار زیادتر از w میرسد . پس ازآن مرکــز ثقل جسم شروع ببالا آمدن میکند واین وضع تکرار میشود یعنی جسم مرتباً بالا وپائین میرود این حرکت را **رقص محوری یا Nutation** مینامند .



شکل ۹ـ۲۳ ژیروسکوپ

برای اینکه فرفره فقط حرکت انتقالی محور داشته باشد لازم است از اول آن را باسرعت زاویه‌ای معین دارای حرکت انتقالی محور کنیم بطوریکه ازهمان اول درO نیروئی

مساوی وزن برتکیه گاه واردآید ودرامتداد قائم تعادل برقرار باشد .

درشکل ۹ـ۲۲ یك ژیروسکوپ نشان داده شده است. بجزحالتیکه دو حلقه یابیشتر دریك سطح قرار گیرند. میتوان‌قاب‌خارجی را درهرجهتی چرخانید بدون اینکه گشتاوری بر چرخ ژیروسکوپ واردشود (مگر گشتاورهای اصطکاك که بسیار ناچیزهستند.) هرگاه قاب خارجی ثابت بماند امتداد محور ژیروسکوپ هرچه باشد مرکز ثقل‌آن ثابت میماند.

مسائل

۹ـ۱ یك موتورالکتریکی دردقیقه ۱۸۰۰ دورمیزند برمحور این موتور سه چرخ باقطار ۵ و ۱۰ و ۱۵ سانتیمترسوار است، سرعت خطی درمحیط هریك‌از این چرخها چند متربرثانیه است . هریك از چرخهای مذکوربا تسمه چرخ دیگری رابترتیب زیر:یك چرخ ۱۵ سانتیمتری یك چرخ ۵ سانتیمتری، چرخ ده سانتیمتری یك‌چرخ ده سانتیمتری وچرخ ۵ سانتیمتر یك چرخ ۱۵ سانتیمتری را بدوران در میآورد . سرعت زاویه‌ای چرخهای اخیر را بدست آورید.

۹ـ۲ درپنج ثانیه ، دور چرخ طیاری از ۱۰۰۰ دور دردقیقه به ۴۰۰ دوردردقیقه میرسد. شتاب زاویه‌ای وتعداد دوریکه‌چرخ درمدت‌این ۵ ثانیه زده است ونیز تعداددوریکه چرخ میزند تاباهمین شتاب زاویه‌ای، ساکن شود حساب کنید .

۹ـ۳ سه ثانیه وقت لازم است تاچرخی ۲۳۴رادیان بچرخد وسرعت زاویه‌ای‌چرخ درانتهای این سه‌ثانیه برابر $108\,\mathrm{rad/sec}$ میشود. شتاب زاویه‌ای آنرا (که ثابت فرض میشود) بدست‌آورید.

۹ـ۴چرخی‌که شتاب زاویه‌ای‌آن $2\,\mathrm{rad/sec^2}$ است درمدت پنج ثانیه ۱۰۰رادیان می‌چرخد. قبل‌ازشروع پنج ثانیه، چه‌مدت چرخ درحرکت بوده است ؟

۹ـ۵ (a) فرق شتاب مماسی وشعاعی رابیان‌کنید.(b) چرخی باسرعت زاویه‌ای‌ثابت می‌چرخد. نقطه‌ای ازمحیط این چرخ را درنظرگیرید. آیـا شتاب مماسی دارد ؟ شتاب شعاعی دارد ؟ (c) چرخ باشتاب زاویه‌ای ثابت می‌چرخد آیانقطه‌ای واقع بر محیط‌آن‌شتاب مماسی دارد؟ این نقطه شتاب شعاعی دارد ؟ آیـا مقداراین شتابها ثابت است ؟

۹ـ۶ چرخی بقطر $75\mathrm{cm}$ باسرعت زاویه‌ای اولیه دودور برثانیه و شتاب سه دور