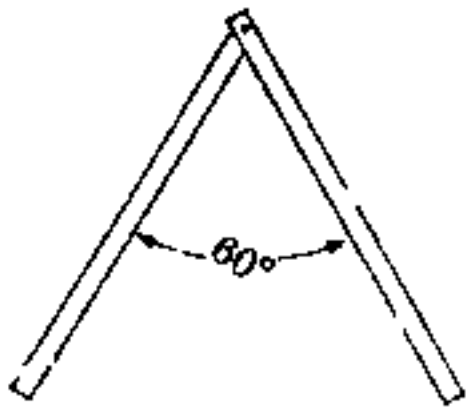
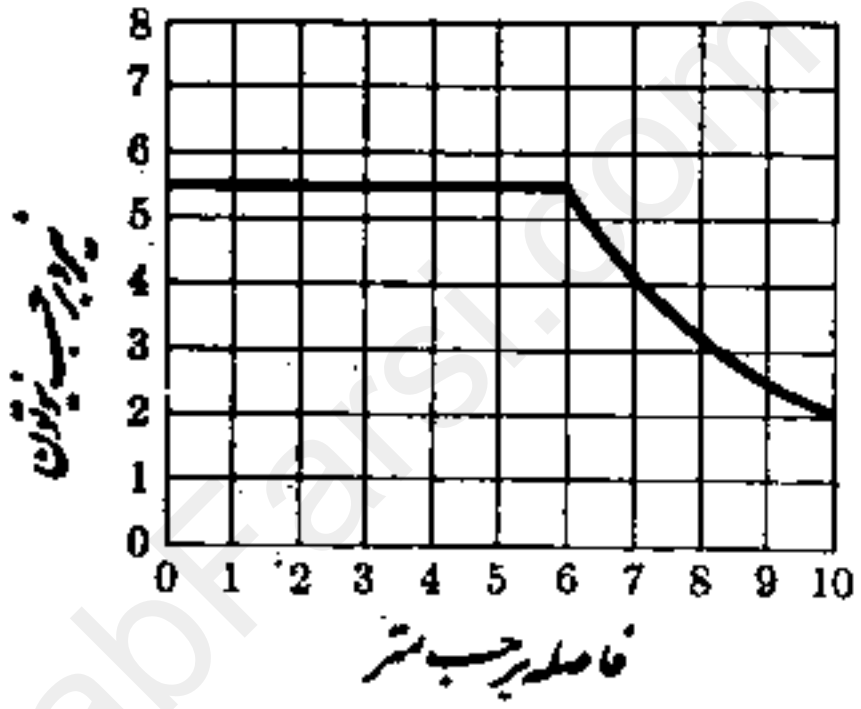
۷ـ۱۲ جرم خط‌کشی که درشکل ۷ـ۱۳ نشان‌داده شده است ۳۰۰gm و طول آن یک‌متر است. هرگاه آنرا ۶۰° منحرف کنیم ازدیاد انرژی پتانسیل آنرا حساب کنید.

۷ـ۱۳ نیروی لازم برای کشیدن فنری از رابطه $F = 150x$ بدست میآید که در آن F برحسب نیوتون و x برحسب‌متر است. (a) چه نیروئی لازم است تافنر را ۱۵cm بکشیم. (b) کارانجام شده را وقتی فنر ۱۵cm ۳۰cm و ۶۰cm کشیده شود حساب کنید

۷ـ۱۴ طول درجات نیرومنجی ۲۰cm وحداکثر باری‌راکه‌اندازه میگیرد ۲۰۰۰n است (a) انرژی پتانسیل فنر را وقتی ۲۰cm و ۱۰cm و 5cm کشیده شود بدست آورید. (b) وقتی وزنه ۲۵kgm بآن آویزان است انرژی پتانسیل چقدراست ؟



شکل ۷ـ۱۳



شکل ۷ـ۱۴

۷ـ۱۵ جسمی تحت اثر نیروی ثابت 5n / ۵ شش‌متر جابجا میشود وسپس اندازه نیرومطابق شکل ۷ـ۱۴ کاهش میابد (a) درشش‌متراول چقدر کارانجام شده‌است. (b) در چهار متر بعدی که نیرو درحال کاهش است کار انجام شده چقدراست ؟

۷ـ۱۶ جسمی‌بوزن ۱۶۰n را روی سطح افقی بدون اصطکاکی ۲۰متر بحلومیرانیم نیروی مؤثر ۸۰ نیوتون است وجسم ازحال سکون شروع بحرکت میکند (a) کار انجام‌شده چقدراست واین‌کار بچه‌صورتی‌ازانرژی درمیآید. (b) ازطریق‌محاسبه، شتاب، سرعت‌انتهائی وسپس انرژی جنبشی‌را بدست آورید نتایج را قیاس کنید .

۷ـ۱۷ درمسئله قبل فرض کنید جسم باسرعت اولیه 5m / sec حرکت میکند. (a) کار انجام شده را حساب کنید (b) شتاب و سرعت انتهائی را محاسبه و صحت محاسبات قسمت (a) را مشخص کند .

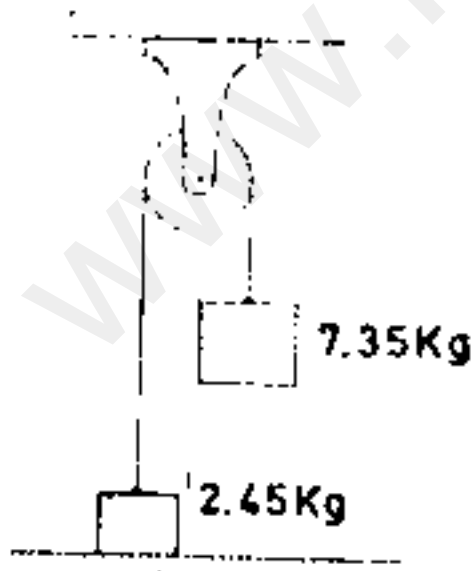
۷ـ۱۸ جسمی بجرم ۵ کیلوم را باسرعت ثابت 4m / sec درامتداد قائم ۸ متربالا میبریم. (a) نیروی مؤثر برجسم. (b) کار انجام شده دراین بالا رفتن را حساب کنید. این کار بچه‌صورتی درمیآید .

۷ـ۱۹ جسمی بجرم ۱۲ کیلوگرم را روی سطح شیب‌داری بشیب 37° بانیروی F برابر ۱۴۴ نیوتون که درامتداد سطح برجسم اثرمیکند، ۳۰متر بالامی‌بریم. ضریب اصطکاك لغزشی ۰/۲۵ است. (a) کارنیروی F چه اندازه است ؟ (b) ازدیاد انرژی جنبشی جسم چه اندازه است. (c) ازدیاد انرژی پتانسیل جسم را حساب کنید. (d) کار نیروی اصطکاك را محاسبه کنید. (e) جمع جوابهای (b) و (c) و (d) چیست ؟

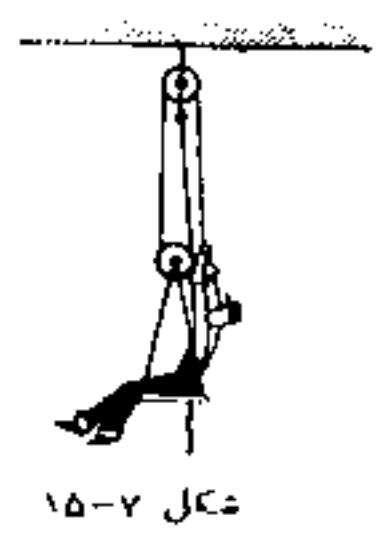
۷ـ۲۰ شخصی بجرم ۷۵kgm درکفه‌ای قراردارد ومطابق شکل ۷ـ۱۵ انتهای طناب حامل کفه ، پس ازعبور از دستگاه قرقره در دست شخص قرارمیگیرد. هرگاه از اصطکاك صرفنظر کنیم حساب کنید. (a) نیروئی راکه شخص باید بر انتهای طناب وارد آورد تاباسرعت ثابت بالارود (b) وقتی کفه یك‌متر بالارفت ازدیاد انرژی پتانسیل چه اندازه است؟ این ازدیاد انرژی را بامحاسبه نیرو وتغییرمکان نیز محاسبه کنید

۷ـ۲۱ بشکه‌ای بجرم ۱۲۰kgm بطنابی بطول ۱۰m آویزان است. (a) چه‌نیروئی درامتداد افق برآن واردشود تا درهمین امتداد ۱/۵متر جابجاشود. (b) دراین جابجائی چقدر کارانجام شد است ؟

۷ـ۲۲ دستگاهی راکه درشکل ۷ـ۱۶ نشانداده شده بحال آزادرهامیکنیم. وزنه ۷/۳۵ کیلوگرمی ۲/۴ متر بالای سطح زمین است با استفاده از اصل بقاء انرژی سرعت وزنه را هنگام برخورد بزمین بدست آورید. اصطکاك قرقره ناچیزاست . $g = 9/8 m/sec^2$



شکل ۷ـ۱۶


شکل ۷ـ۱۵

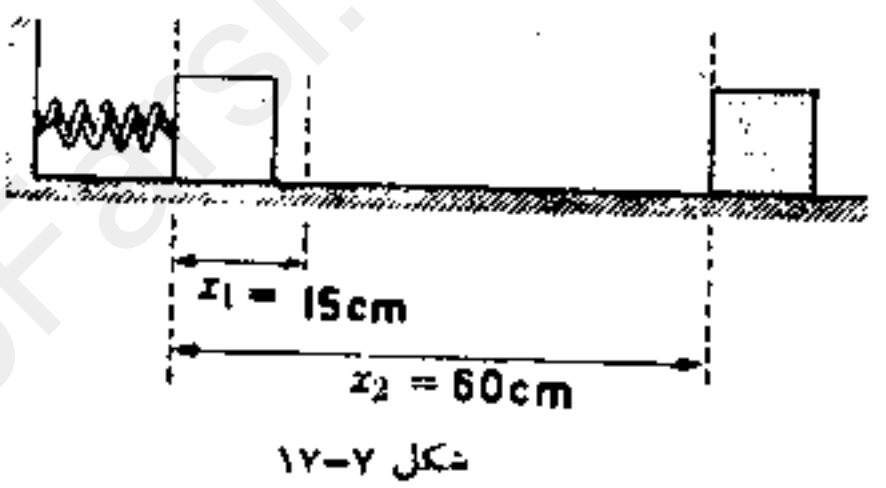
۷ـ۲۳ ضریب ثابت فنریك تفنك فنری ۵۷۶N/m است. هرگاه آنرا ۵ سانتیمتر متراکم کنیم و جرم گلوله‌آن ۴ گرم باشد. (a) سرعت گلوله هنگام خارج شدن از تفنگ چه اندازه است. (b) سرعت گلوله‌را در صورتیکه نیروی اصطکاك ثابتی برابر ۱۰N در مقابل حرکت فنر وجود داشته‌باشد بدست آورید .

۲۴ـ۷ جسمی بجرم یك کیلوگرم مانندشکل ۷ـ۱۷ فنری‌را درامتداد افقی متراکم کرده است.ضریب ثابت‌فنر $۱۲۰۰ n/m$ است. هرگاه فنررا رهاکنیم وزنه پس‌ازطی فاصله $۶۰ cm$ می‌ایستد. هرگاه همانطورکه‌درشکل نشانداده شده است تراکم اولیه‌فنر ۱۵ سانتیمترباشد ضریب اصطکاك سطح را بدست‌آورید .

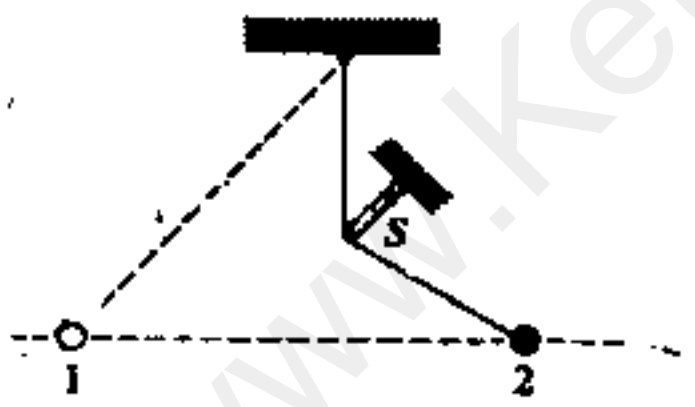
۲۵ـ۷ جسمی بجرم دو کیلوگرم از ارتفاع $۴۰ cm$ روی فنری‌که ضریب ثابت آن $۹۶۰ n/m$است می‌افتد . ماکزیموم تراکم فنررا بدست‌آورید.

۲۶ـ۷ پرتابه‌ای‌بجرم $۸ kgm$ باسرعت‌اولیه $۲۵۰ m/sec$ درامتداد ۴۵° پرتاب میشود پرتابه دیگری باهمین جرم وهمین سرعت درامتدادقائم پرتاب میشود (a) حداکثرارتفاع دوپرتابه را بدست‌آورید(b) نشان‌دهیدکه انرژی دوپرتابه درحالیکه درارتفاع ماکزیموم هستند باهم برابرند. (c) بااستفاده‌ازقضیه کار ـ انرژی ؛ حداکثر ارتفاع همین پرتابه را اگرزاویه پرتاب ۳۰° میبود بدست‌آورید

شکل ۷ـ۱۸



شکل ۷ـ۱۷



شکل ۷ـ۱۹

۲۷ـ۷ جسمی‌بجرم $۱ kgm$ ازحال سکون‌ازنقطه A شکل ۷ـ۱۸ رها میشود. شعاع‌ربع‌دایره ۱/۲ متراست. وقتی جسم بنقطه B میرسدسرعت‌آن $۴ m/sec$ است . جسم از B تا C که چهار متر دورتراست حرکت‌کرده می‌ایستد. (a) ضریب اصطکاك سطح افقی و (b) کارنیروی اصطکاك را درطول مسیرمنحنی بدست‌آورید.

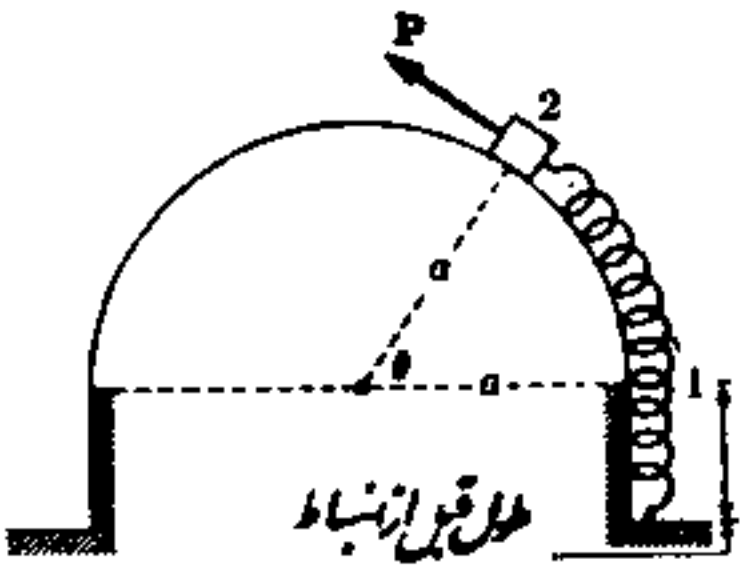
۲۸ـ۷ گلوله‌ای بجرم m به‌نخی بطول یك‌مترآویزان است هرگاه‌آنرا ۶۰° منحرف وسپس‌رهاکنیم.(a) سرعت‌آن وقتی ازوضع قائم عبورمیکند چه‌اندازه‌است؟ (b) وقتی مجدداً بانحراف ماکزیموم میرسدشتاب لحظه‌ای آن‌چه اندازه‌است ؟

۲۹ـ۷ گلوله‌ای به‌نخی بسته شده ودرسطح قائم روی محیط دایره‌ای درحرکت است. ثابت‌کنیدکه اختلاف دوکشش مؤثربرنخ ، درپائین‌ترین وبالاترین‌نقطه مسیر ،۶برابروزن گلوله است (b)هرگاه مطابق شکل‌مانع S راسر راه نخ‌قراردهیم‌ثابت‌کنیدکه ارتفاع گلوله دردووضع (۱) و (۲) مساوی‌است وبه‌جای S مربوط نیست

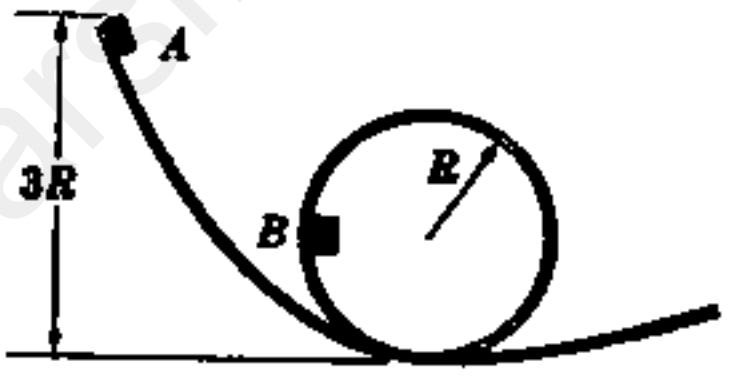
۷ـ۳۰ جسمی روی مسیری که درشکل ۷ـ۲۰ نشانداده شده از حال سکون شروع بحرکت میکند. ارتفاع A نقطه شروع حرکت $3R$ بالاتر ازته حلقه است. وقتی جسم بنقطه B (انتهای قطرافقی) میرسد. (a) شتاب شعاعی. (b) شتاب مماسی. (c) شتاب کل را بدست آورید

۷ـ۳۱ خط کش یکنواختی بطول یک متر حول محورافقی که از آن میگذرد میتواند بچرخد دو وزنه یک کیلوگرم ودو کیلوگرمی بدوانتهای خط کش وصل اند. هرگاه خط کش را ازوضع افقی بدون سرعت اولیه رها کنیم هنگام عبورازوضع قائم، سرعت هروزنه چقدراست ؟

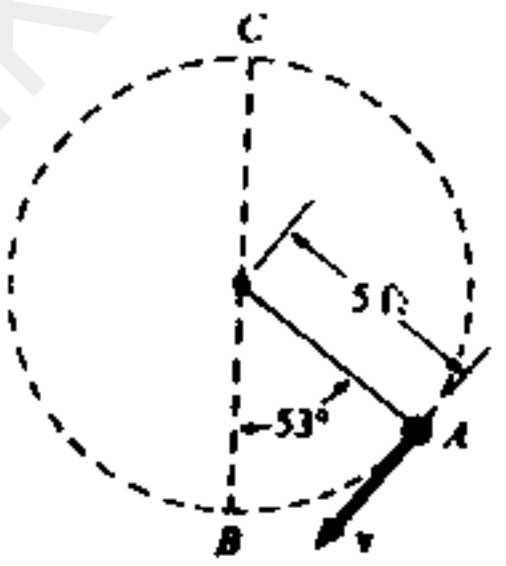
۷ـ۳۲ مطابق شکل ۷ـ۲۱ وزنه w رابانیروی متغیر p روی سطح استوانه‌ای میکشیم طرف دیگر وزنه بفنری وصل است. وقتی وزنه ازوضع (۱) بوضع (۲) برسد کارنیروی p را حساب کنید. (a) ازطریق انتگراسیون (b) براساس استفاده ازقضیه کارانرژی



شکل ۷ـ۲۱



شکل ۷ـ۲۰



شکل ۷ـ۲۲

۷ـ۳۳ وزنه ۴ پوندی بمنحنی بطول 5ft آویزان است و پاندولی رامطابق شکل ۷ـ۲۲ تشکیل میدهد. آنرا ۵۳° ازوضع قائم منحرف میکنیم. (a) باچه سرعت اولیه‌ای آنرا در امتداد مماس پرتاب کنیم تا با سرعت $10 \frac{ft}{sec}$ بنقطه C برسد. (b) پس ازرسیدن به B سرعت آن چه اندازه است؟ (c) وقتی از B عبورمیکند کشش مؤثر برنخ چه اندازه است. (d) هرگاه

برابر j۲۰ است پس‌جسم، انرژی لازم برای رسیدن باین ارتفاع را ندارد .

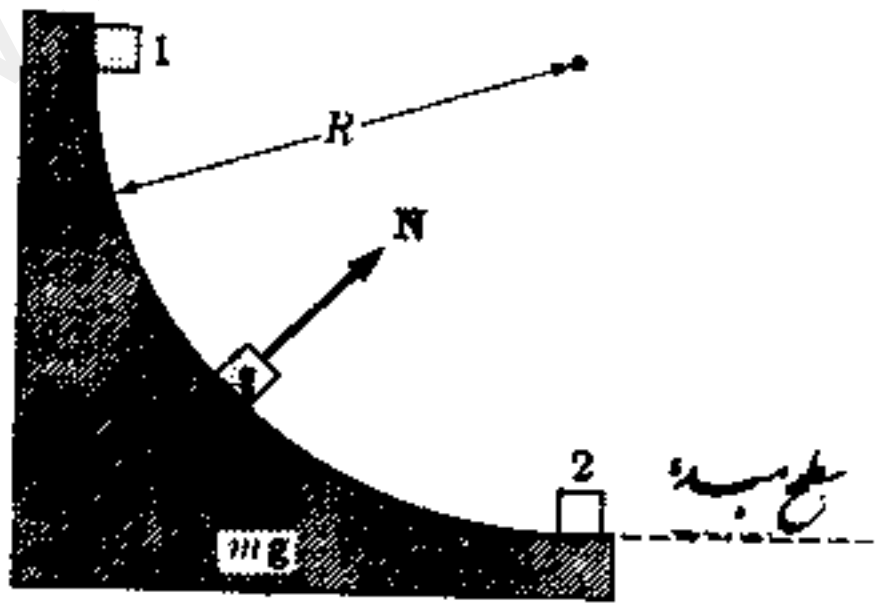
مثال ۴ـ جسمی برمسیر ربع دایره‌ای مطابق شکل ۷ـ۷ لـغزیده پائین می‌آید. هرگاه نیروی اصطکاك وجود نداشته باشد تندی جسم را در انتهـای مسیر بدست آورید. حرکت این جسم عیناً مانند حرکت جسمی است که به طنابی بطول **R** آویزان باشد، آنرا بالا آورده وقتی طناب بحال افقی‌قرار گرفت جسم را رها کنیم (انتهای دیگرطناب مفروض درنقطه O ثابت است) .

دراینجا نمیتوان ازمعـادله حرکت باشتاب ثـابت استفـاده نمود. (زیرا شیب سطح تکیه‌گاه ثابت نیست بلکه تدریجاً کم شده بصفرمیرسد) هرگـاه اصطکاك نباشد نیروی مؤثر برجسم علاوه بروزن ، نیروی **N** است که ازطرف سطح‌تکیه‌گاه برجسم وارد میشود. امتداد این نیرو همواره برسطح عمود است. لذاکار انجام شده توسط‌آن برابر صفراست. هرگاه نقطه بالائی را (۱) ونقطه پائینی‌را (۲) وسطح مبدء را نیز در نقطه (۲) فرض‌کنیم داریم $y_2 = 0$ و $y_1 = R$ لذا میتوان نوشت :

$$E_{k_2} + E_{p_2} = E_{k_1} + E_{p_1}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 + 0 = 0 + mgR$$

$$v_2 = \pm \sqrt{2gR}$$



شکل ۷ـ۶ جسمی که برمسیر منحنی بدون اصطکاکی بپائین میلغزد

یعنی‌مثل‌این است که جسم،ازارتفاع **R** سقوط کرده‌است (اکنون مفهوم $\pm$ چیست؟) هرگاه $R = 1m$ فرض شود خواهیم داشت :

$$v = \pm \sqrt{2 \times 9/8 (m/sec^2) \times 1m} = \pm 4/43 m/sec$$

مثال ۳ـ فرض کنیم جسمی بجرم $0/5kgm$ روی ربع دایره‌ای بشعاع $1m$ نظیر مثال قبل بپائین بلغزد ولی درانتهای‌مسیرسرعت‌آن $3m/sec$ شود کارنیروی اصطکاك مؤثر برجسم را پیدا کنید .

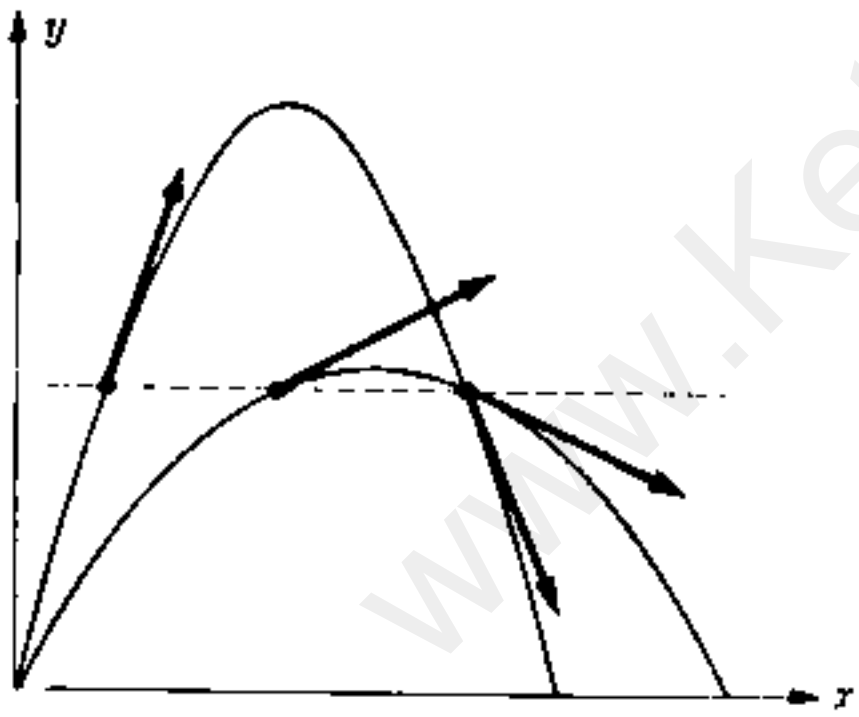
دراینحالت $W'=W_f$ خواهیم داشت :

$$W_f=\left(\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2\right)+(mgy_2-mgy_1)=$$

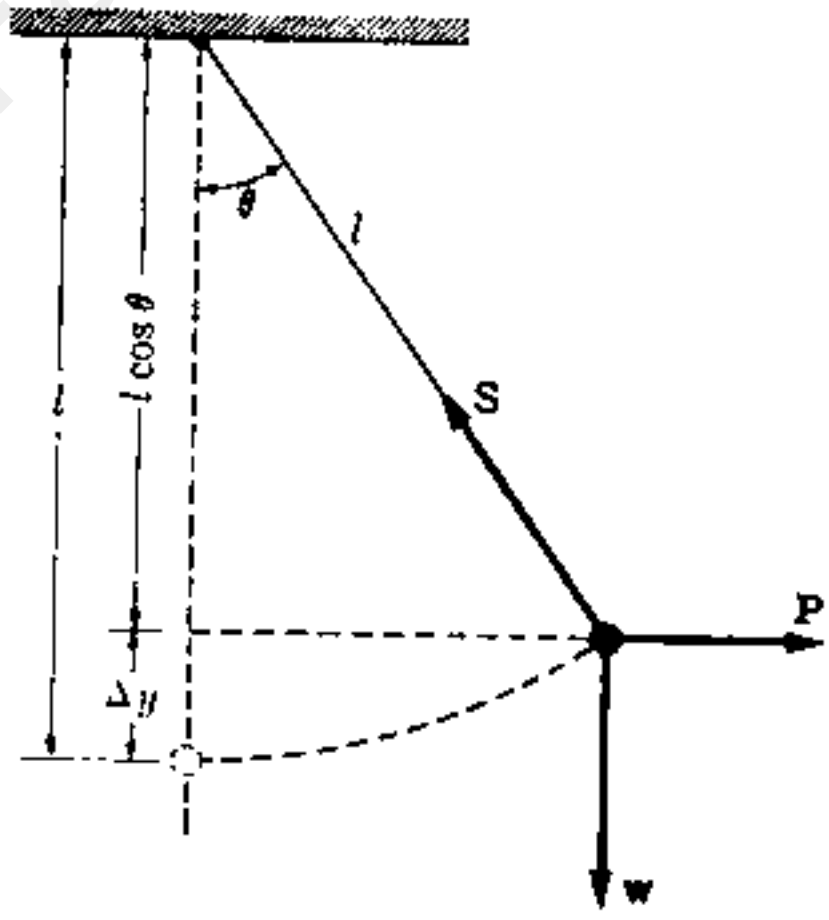
$$=\left(\frac{1}{2}\times 0/5kgm\times 9\frac{m^2}{sec^2}-0\right)+(0-0/5kgm\times 9/8m/sec^2\times 1m)=$$

$$=2/25j-4/9j=-2/65j$$

کار نیروی اصطکاك $-2/65j$ است وانرژی مکانیکی کل باندازه $2/65j$ کاهش یافته‌است. پس‌وقتی نیروی اصطکاك برجسمی اثر کند، انرژی مکانیکی‌آن ثابت نمی‌ماند .



شکل ۷ـ۸ وقتی‌تندی اولیه پرتاب یکی‌باشد درارتفاع معین تندی پرتابه ها روی مسیر های مختلف یکی‌است .



شکل ۷ـ۹ $\Delta y=l(1-cos\theta)$

مثال ۴ـ وقتی مقاومت هوا ناچیز فرض شود تنها نیروی مؤثر برپرتابه، وزن‌آن است وانرژی مکانیکی‌آن ثابت می‌ماند. درشکل ۷ـ۸ مسیر دوپرتابه نشانداده شده است‌که تندی اولیه پرتاب (وبنابراین انرژی مکانیکی) درعردویکسان بوده ولی زوایای پرتاب اولیه آنها باهم متفاوت‌اند. درارتفاع‌معین، انرژی پتانسیل پرتابه‌ها اعم ازاینکه بالارونده یاپائین آیند ونیز برهرمسیری‌که واقع باشند یکی است. پس انرژی جنبشی‌آنهانیزمساوی

وتندی همه‌آنها یکسان است.

مثال ۵ـ جسم کوچکی‌بوزن **w** بنخی بطول **l** آویزان است (شکل۷ـ۹) نیروی افقی ومتغیر **p** که از صفر شروع بافزایش تدریجی میکند جسم را بطرف راست میکشد و آنرا باندازه θ ازوضع تعادل منحرف میکند. کار **p** را حساب‌کنید .

کار W' مجموعه نیروهای خارجی باید برابر مجموع تغییر انرژی جنبشی وتغییر انرژی پتانسیل جسم باشد یعنی :

$$W = W_p + W_T = \Delta E_k + \Delta E_p$$

چون **T** برمسیر تغییر مکان عموداست پس $W_T = 0$ وچون جسم بآرامی وبتدریج براست‌کشیده شده تغییر انرژی جنبشی نیز صفر است پس :

$$W_p = \Delta E_p = w\Delta y$$

Δy ارتفاعی است‌که جسم تاآن ارتفاع بالارفته است . از شکل ۷ـ۹ بآسانی پیداست‌که $\Delta y = l(1 - \cos\theta)$ یعنی :

$$W_p = wl(1 - \cos\theta)$$

بیاد دارید‌که در قسمت۷ـ۲ نیز همین مسئله‌را با استفاده از $W_p = \int p\cos\theta ds$ محاسبه‌کردیم . ازهردو راه بیك نتیجه رسیدیم ولی چنانچه می بینید استفاده ازقضیه کار ـ انرژی راه بسیار آسانتری است .

تا اینجا فرض براین بودکه اختلاف ارتفاع، کم و نیروی جاذبه ثابت‌است . اینك صورت‌کلی‌تر قضیه را مورد بحث قرار میدهیم نیروی **w** درشکل ۷ـ۶ نیروی جاذبه‌ایست که اززمین برجسم وارد میشود و ازفرمول زیر بدست میآید :

$$G\frac{mm_E}{r^2}$$

دراین فرمول m_E جرم زمین و **r** فاصله جسم ازمرکز زمین است. وقتی **r** ازمقدار r_1 تا r_2 تغییرکند کارنیروی جاذبه برابر است با :

$$W_{cruy} = -Gmm_E\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \left(\frac{Gmm_E}{r_2} - \frac{Gmm_E}{r_1}\right)$$

هرگاه کار فوق را برابر تغییر انرژی جنبشی قرارداده آنرا مرتب‌کنیم،فرمول

۷ـ۹ بصورت زیر درمیآید :

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm_E}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{r_1}\right)$$

مقدار $[-G(mm_E/r)]$ معرف اندازه انرژی پتانسیل جسمی بجرم m واقع در میدان جاذبه زمین است یعنی :

$$E_{p\,(\text{ثقلی})} = -G\frac{mm_E}{r} \qquad (۷ـ۱۰)$$

وانرژی مکانیکی کل جسم، مجموع انرژی جنبشی وپتانسیل جسم است یعنی :

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_E}{r}$$

هرگاه نیروی مؤثر برجسم، فقط وزن آن باشد، جمع انرژی جنبشی و پتانسیل آن مقداریست ثابت . یعنی تابع اصل بقاء انرژی است .

مثال ـ بااستفاده ازاصل بقاء انرژی تعیین کنید جسمی را باچه سرعتی درامتدادقائم پرتاب کنند تابفاصله R ازسطح زمین بالا رود. مقاومت هوارا ناچیزفرض کنید .

هرگاه v_1 سرعت اولیه باشد $r_1 = R$ و $r_2 = 2R$ و $v_2 = 0$ خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mm_E}{R} = 0 - \frac{Gmm_E}{R}$$

$$v_1^2 = \frac{Gm_E}{R}$$

که بانتیجه حاصله ازحل مثال ۸ درقسمت ۵ـ۶ کاملا موافق است .

ممکن است درنظر اول منفی، بودن انرژی پتانسیل عجیب بنظرمیآید . دلیل منفی بودن، نحوه انتخاب سطح مبدء است. به بینیم انرژی پتانسیل درروی چه سطحی صفر است. هرگاه درفرمول ۷ـ۱۰ مقدار E_p را برابرصفر قراردهیم $r = \infty$ میشود .

یعنی وقتی جسمی در فاصله بینهایت از زمین قراردارد انرژی پتانسیل آن صفر فرض میشود. هرچه جسم بزمین نزدیکتر شود انرژی پتانسیل آن کاهش مییابد بنابراین مقدارآن درهرفاصله محدود، منفی خواهد شد. تغییرانرژی پتانسیل جسمی وقتی ازنقطه معین

به‌نقطه دیگر میرود نسبت بهر سطح مبدء مقداریست ثابت وهمیشه تغییرانرژی پتانسیل‌دارای اهمیت‌است، نه‌اندازه‌آن دریك ارتفاع معین .

بعلاوه نشاندادیم‌که فرمول عمومی تغییر انرژی پتانسیل، وقتی‌تغییر ارتفاع زیادنباشد بصورت فرمول ۷ـ۶ خلاصه میشود . هرگاه فاصله دونقطه فرضی ازمرکززمین r_1 و r_2 بوده جسمی بجرم m ازنقطه اول به‌نقطه دوم برود داریم :

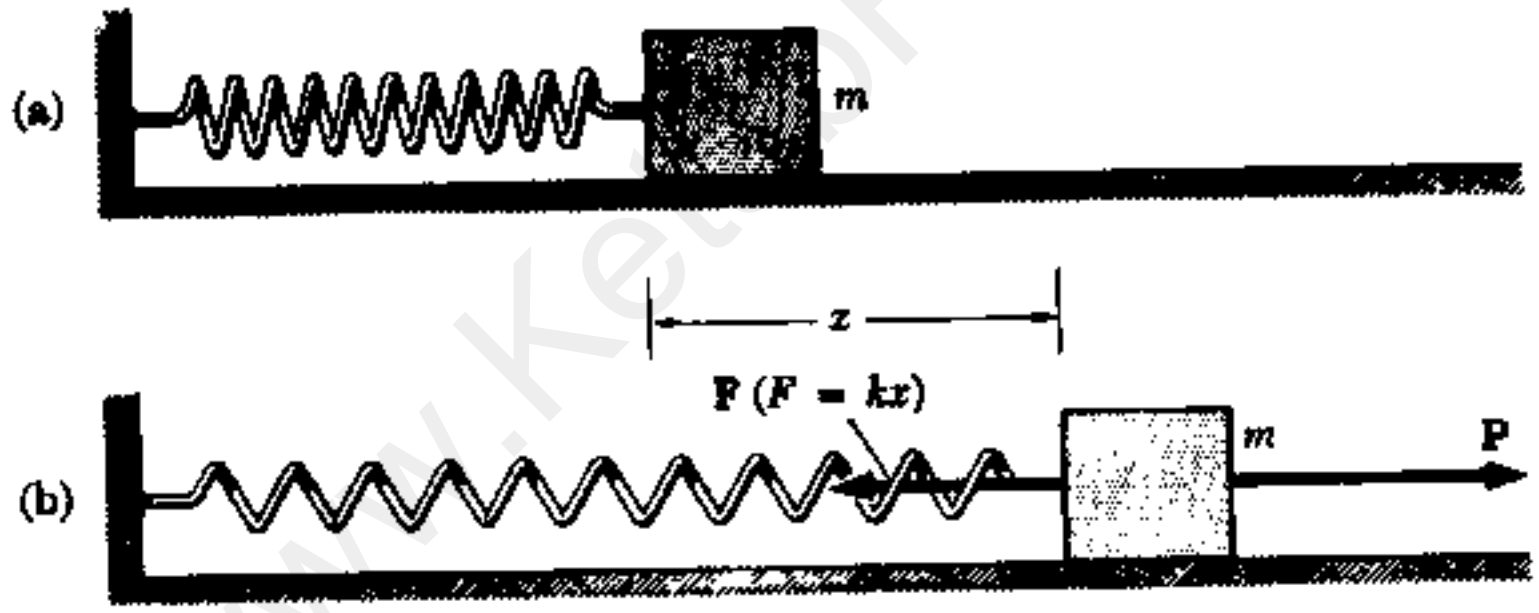
$$E_{P_2} - E_{P_1} = -G\frac{mm_E}{r_2} - \left(-G\frac{mm_E}{r_1}\right) = Gmm_E\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= Gmm_E\frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

هرگاه فاصله دونقطه مذکور ازسطح زمین y_1 و y_2 فرض شود خواهیم داشت :

$$r_2 - r_1 = y_2 - y_1$$

$$E_{p_2} - E_{p_1} = \frac{Gmm_E}{R^2}(y_2 - y_1)$$



شکل۷ـ۱۰ وقتی‌نیروی $\mathbf{p}$ فنری‌را بطرف راست بکشد در فنر کشش $\mathbf{F}$ بوجود میآیدکه ازرابطه $F = kx$ بدستمیآید

هرگاه y_1 و y_2 در برابر R کوچك باشند حاصلضرب $r_1 r_2$ تقریباً برابر مجذور شعاع زمین‌یعنی R^2 میشود وفرمول تغییر انرژی پتانسیل چنین میشود :

اما داریم :

$$G\frac{m_E}{R^2} = g$$

که درآن g شتاب ثقل زمین است. پس میتوان نوشت :

$$E_{p_2} - E_{p_1} = mg(y_2 - y_1)$$

این فرمول را قبلا نیز درموقع بحث درتغییرات g نیز بدست‌آوردیم .

۷ـ۵ ، انرژی پتانسیل الاستیکی

درشکل۷ـ۱۰جسمی بجرم m نشانداده شده است که برسطح افقی قراردارد.یکطرف فنری باین جسم متصل وانتهای دیگرآن بدیواری وصل است. مبدء مختصات را، محل‌قرار گرفتن جسم درحالیکه فنر آزاداست، فرض میکنیم. (ش ۷ـ۱۰a) فرض‌کنیم نیروی F که ازخارج برفنر اثرمیکندباندازه‌ای باشدکه‌بتواند تغییر طول درآن ایجادکند بمحض‌اینکه اولین تغییرطول جزئی درفنرایجاد شد فنرنیز برجسم نیروی F وارد میآورد. جهت‌نیروی F مخالف جهت x (افزایش طول فنر) وبنابراین مخالف جهت p است . نیروی F را **نیروی‌ارتجاعی** فنرمینامند. هرگاه P کاهش یافته‌یا صفرشود نیروی F باعث بازگشت فنر بوضع اول میشود و«ارتجاع» یعنی «بازگشت». تجربیات Robert Hooke در۱۶۷۸ درباره رابطه x تغییرطول فنر ونیروی F به‌نتیجه رسیدکه بصورت‌زیربیان میشود. هرگاه تغییرطول x ازحد معینی تجاوزنکند **نیروی ارتجاعی متناسب باتغییرطول فنراست** ویا :

$$F = kx \qquad (۱۱-۷)$$

که **بقانون هوک** موسوم است. ضریب تناسب k را **ضریب ثابت‌فنر** یا ضریب سختی مینامند Stiffness coefficient هرگاه کارنیروی ارتجاعی را به W_{el} نشان دهیم وقتی فنرازطول x_1 بطول x_2 میرسد خواهیم داشت:

$$W_{el} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_1}^{x_2} F\cos\theta\, dx$$

جهت F باجهت dx مخالف‌است‌بنابراین $\cos\theta = -1$ خواهد شد لذا داریم

$$W_{el} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx$$

ویا :

$$W_{el} = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

اگر W′ کارنیروی خارجی P فرض شود. هرگاه کار کل را برابر تغییر انرژی جنبشی قراردهیم خواهیم داشت:

$$W' + W_{el} = \Delta Ek$$

$$W' - \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right)$$

مقادیر $\frac{1}{2}kx_2^2$ و $\frac{1}{2}kx_1^2$ فقط تابع وضع اولیه وانتهائی جسم است وبخصوص تابع نحوه تغییرطول فنر وشکل حرکت جسم نیست بنابراین آنهارا ازسمت «کار» درفرمول به سمت «انرژی» منتقل میکنیم. داریم

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \qquad (۱۲-۷)$$

مقدار $\frac{1}{2}kx^2$ یعنی نصف حاصلضرب ضریب ثابت فنر در مجذور تغییر طول را **انرژی پتانسیل الاستیکی** نامیده میشود (E_p علامت انرژی پتانسیل است. هرگاه انرژی پتانسیل ثقلی یا ارتجاعی باشد آنرا بصورت زیر که مشخص‌تراست مینویسیم)

$$E_{p\,(\text{الاستیکی})} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۳-۷)$$

نتیجه میشودکار W' نیروی p برابر مجموع تغییرات انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل ـ الاستیکی جسم است فرمول ۷ـ۱۲ را چنین بی‌نویسیم

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

مجموع انرژی جنبشی وپتانسیل جسم،انرژی مکانیکی کل آن نامیده میشود ومیتوان گفت : **کارکلیه نیروهای مؤثر برجسم باستثناء نیروی الاستیکی، برابر تغییر انرژی مکانیکی کل جسم است .**

هرگاه W' مثبت باشد ، انرژی مکانیکی جسم افزایش‌یافته وقتی منفی باشد **کاهش** مییابد. وقتی W' صفراست انرژی مکانیکی جسم ثابت میماند .

مثال ۱ـ ضریب ثابت k درفنرشکل ۷ـ۱۰ برابر $24\,n/m$ وجرم جسم $4\,kg$ است. درابتدا جسم بحال سکون وفنر آزاد است. فرض کنید اصطکاک صفراست ونیروی ثابت p برابر $10\,n$ برجسم اثر کند. پس‌ازطی فاصله $0/5\,m$ تندی جسم چقدر است؟چون نیروی ارتجاعی مؤثر برجسم تغییرمیکند، برآیند نیروها نیز متغییراست ونمیتوان ازمعادله‌حرکت متشابه‌التغیر استفاده‌کرد. بنابرقضیه کار انرژی میتوان نوشت

$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$۱۰\,n \times ۰/۵m = \left(\frac{۱}{۲} \times ۴kgm \times v'^{۲}_{۲} - ۰\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times ۲۴\frac{n}{m} \times ۰/۲۵m^{۲} - ۰\right)$$

$$v_{۲}{}' = ۱\,m/sec$$

مثال ۲ـ فرض کنیداثر نیروی **p** پس ازطی فاصله ۰/۵m قطع‌شود. انرژی‌جنبشی دراینحال $\frac{۱}{۲}mv^{۲} = ۲j$ وانرژی پتانسیل $\frac{۱}{۲}kx^{۲} = ۳j$ لذا انرژی مکانیکی کل۵jاست.

(برابر کارنیروی **p**) وقتی جسم ساکن میشود انرژی جنبشی آن صفر و در نتیجه انرژی پتانسیل آن ۵ ژول‌است‌لذا :

$$\frac{۱}{۲}kx^{۲}_{max} = ۵j \qquad x_{max} = ۰/۷۰۷m$$

۷ـ۶ ، نیروهای تلف‌کننده و ذخیره‌کننده انرژی

وقتی جسمی ازارتفاع معینی‌بالای افق، بارتفاع دیگری بالا یا پائین رود، کارنیروی وزن تابع مسیر نیست وفقط تابع وضع ابتدائی وانتهائی جسم است . دراین‌حال، کاربرابر اختلاف‌دومقدار اولیه وثانویه تابعی بنام **انرژی پتانسیل ثقلی است.** وقتی فقط نیروی وزن برجسمی اثر کند انرژی مکانیکی کل (جمع انرژی جنبشی و پتانسیل) ثابت است . یعنی نیروی وزن **ذخیره‌کننده انرژی** است. وقتی جسم بالامیرود کارنیروی وزن در ازاء کاهش انرژی‌جنبشی‌انجام‌میشودووقتی‌جسم‌مجدداً پائین آیدکارنیروی وزن‌باعث‌افزایش‌انرژی‌جنبشی میشود یعنی میتوان گفت کاریکه وزن درموقع بالارفتن‌انجام داده **ذخیره شده** وموقع پائین آمدن مجدداً بما پس داده است. پس دادن کامل کار دریافتی از مهمترین خواص نیروی وزن است .

وقتی‌جسمی‌که بانتهای فنری وصل است تغییر مکان یابد، کارنیروی ارتجاعی فنر نیز تابع نحوه تغییرمکان جسم نیست وفقط تابع اختلاف اندازه ابتدائی وانتهائی تابعی‌است‌که تابع **انرژی پتانسیل ارتجاعی** نامیده میشود. هرگاه نیروی ارتجاعی فنرتنها نیروی مؤثر برجسم باشد ، مجموع انرژی جنبشی جسم وانرژی پتانسیل ارتجاعی فنرثابت میماند. پس نیروی ارتجاعی فنرنیز نیروی ذخیره‌کننده انرژی است. وقتی‌جسم طوری حرکت‌کند که طول فنرافزایش یابد درازاء کاهش انرژی جنبشی، نیروی ارتجاعی فنرکار انجام میدهد . اما همینکه جسم درجهتی شروع بحرکت‌کندکه طول فنرکاهش یابد، کارنیروی ارتجاعی‌فنر باعث افزایش انرژی جنبشی میشود. یعنی کاردریافتی را پس میدهد.می‌بینیم‌که‌کارنیروهای ذخیره‌کننده انرژی، خواص‌زیر را دارا است.

(۱) تابع مسیر نیست
(۲) اندازه‌آن برابرتفاصل‌دومقدار ابتدائی وانتهائی‌تابعی بنام تابع انرژی میباشد.
(۳) برگشت پذیر کامل است .

درمقابل نیروهای ذخیره‌کننده انرژی ، نیروی اصطکاك (نیروی مقاوم‌وارده ازسطح تکیه‌گاه برجسم‌متحرك) قراردارد. کارنیروی اصطکاك تابع‌مسیراست. هرچه‌مسیرطویلتر باشد کارنیروی اصطکاك بیشتراست. تابعی وجود ندارد که تفاوت دووضع ابتدائی و انتهائی آن کارنیروی اصطکاك باشد. وقتی جسمی راکه ازنقطه‌ای بنقطه دیگر برده‌ایم مجدداً بجای اول بازگردانیم نه‌تنهاکارنیروی اصطکاك درجابجائی‌اول را بدست نمیآوریم بلکه ناچاریم برای جابجائی دوم نیز مقداری‌کار بخاطروجود اصطکاك انجام‌دهیم. بنابراین‌کار نیروی اصطکاك برگشت پذیرنیست و بهمین جهت نیروی اصطکاك را نیروی **تلف‌کننده** انرژی مینامند . **انرژی مکانیکی جسم فقط وقتی ثابت است که نیروهای مؤثربرآن فقط ازنوع نیروهای ذخیره‌کننده انرژی باشند .**

بعداً خواهیم دیدکه وقتی نیروی اصطکاك برجسمی اثرمیکند نوع دیگری انرژی‌از تبدیل انرژی مکانیکی‌حاصل میشود واصل بقاء انرژی‌بصورت‌کلی‌تری بیان میشود. بطوریکه علاوه برانرژی جنبشی وپتانسیل انواع‌دیگر انرژی رانیزشامل‌باشد. یعنی انرژی‌کل (اعم ازمکانیکی‌وغیره) جمعاً ثابت میماند. دراین‌باره بعداً بتفصیل صحبت‌خواهیم‌کرد .

مثال ـ مثال ۳ درقسمت ۷ـ۴ حرکت جسمی رانشان میدهدکه نیروی اصطکاك‌یعنی نیروی تلف‌کننده انرژی نیز برآن وارد میشود. انرژی‌پتانسیل اولیه جسم **۴/۹j** وانرژی جنبشی‌جسم‌درانتهای مسیر ۲/۲۵ ژول‌است. کار نیروی‌اصطلاك **۲/۶۵j** — میباشد.مقداری انرژی برابر ۲/۶۵ ژول درموقع لغزش جسم بصورتی دیگر ظاهرمیشود. مجموع این انرژی وانرژی‌جنبشی‌جسم درانتهای مسیر، برابر انرژی‌مکانیکی اولیه جسم است وانرژی کل جسم ثابت مانده است.

۷ـ۷ ، کار داخلی

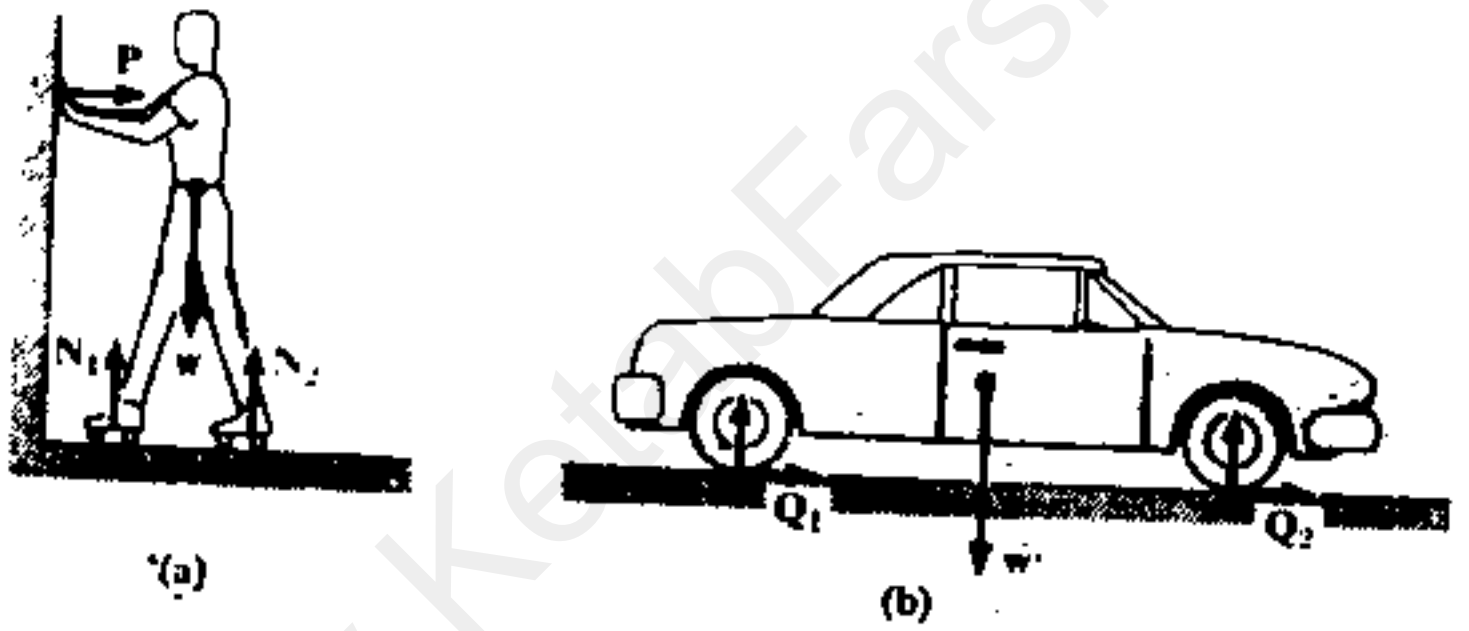
درشکل۷ـ۱۱(a)مردی‌نشانداده‌شده که‌کفش سکیت‌بپای داردو برسطح‌بدون‌اصطکاکی مقابل‌دیوارصلبی‌ایستاده است. نیروهای‌خارجی وارد برشخص عبارتنداز **w** وزن ، نیروهای N_1 و N_2 که ازتکیه‌گاه براو واردمیشود ونیروی **p** وارده ازدیوار (نیروی‌اخیرعکس‌العمل نیروئی است‌که شخص بردیوار وارد میکند.)کار نیروهای **N** و**w** چون برامتداد حرکت عمودانندصفراست.چون‌نیروی **p** تنها نیروئی‌است که‌درامتدادافقی‌اثرمیکندلذا باعث‌میشودکه دستگاه درامتداد افقی دارای شتاب شود . اماکارنیروی **P صفراست‌چون نقطه اثرآن‌جابجا**

موضوع . می‌بینیم که بامسئله‌عجیبی روبروهستیم‌یعنی نیروئی بجسمی شتاب میدهددرحالیکه کارانجام شده توسط این نیرو صفراست .

در چنین وضعی میتوان **کارداخلی** را تعریف‌کرد . با وجود آنکه نیروهای داخلی درایجاد شتاب نقشی‌ندارند معذالك چون نقطه اثرآنها متغیر است عامل انجام کارهستند . یعنی نیروهای درونی‌که در عضلات شخص بوجودمیآیند کارانجام میدهند. وقتی بازو وساعد شخص از هم بازمیشود مانند فنر متراکمی است که انبساط مییابد .) نقطه اثر این نیروها دریك‌جهت تغییرمکان میابندوکارداخلی W_i مخالف صفراست. این‌کار باعث افزایش انرژی جنبشی جسم میشود .

هرگاه جسم تحت تأثیر نیروهای داخلی وخارجی بحرکت درآید W کارکل یعنی مجموع‌کارنیروهای‌خارجیW_e وکارنیروهای‌داخلی W_i باعث‌تغییرانرژی‌جنبشی جسم‌میشود

$$W = W_e + W_i = \Delta E_k$$



شکل ۷ـ۱ (a) نیروهای داخلی مؤثر برمردی که بادست بدیوار نیرو وارد میکند. کارا ین نیروصفر است (b) نیروهای خارجی مؤثر براتومبیل . کاراین نیروها صفراست . درهر دو حالت کارنیروهای داخلی عامل افزایش انرژی جنبشی است

وقتی اتومبیلی حرکت تند شونده دارد ازاین قضیه میتوان استفاده نمود . قسمتی از لاستیك که‌بزمین متکی است نیروئی برزمین‌روبعقب وارد میکند و عکس‌العمل این نیروها که از زمین برلاستیك وارد میشود درشکل ۷ـ۱۱ (b) با Q_1 و Q_2 نشانداده شده است . این‌نیروها نیروهای‌خارجی وارده براتومبیل هستند وباعث ایجاد شتاب‌دراتومبیل میشوند. چون نقطه اثرنیروهای Q_1 و Q_2 حرکت نمی‌کند کار این نیروها صفراست. دراثرانفجار درون سیلندر ، نیروهای داخلی متعددی درون اتومبیل‌بوجود میآیدکه‌بعضی‌ازآنها کار انجام میدهند دراینجا نیز W_i کارنیروهای داخلی باعث افزایش انرژی جنبشی میشود .

۷ـ۸ ، انرژی پتانسیل‌داخلی

هرگاه نیروهای‌خارجی وارد برجسمی ازنوع ذخیره‌کننده انرژی باشند (ثقلی یا

الاستیکی) کاراین نیروها را میتوان به‌سمت «انرژی» فرمول کار ـ انرژی منتقل کرده آنها را انرژی پتانسیل خارجی نام نهاد. دربسیاری ازموارد نیروهای داخلی بستگی به فاصله‌بین دوذره مجاور دارند. درچنین صورتی کارنیروهای داخلی فقط تابع وضع ابتدائی وانتهائی این نیروهاست و به‌نحوه حرکت بستگی ندارد کاراین نیروها رانیزمیتوان بسمت «انرژی» فرمول‌منتقل نموده آنرا **انرژی پتانسیل‌داخلی** نام نهاد . هرگاه E_p^e و E_p^i بترتیب‌انرژی پتانسیل خارجی وداخلی نامیده شود فرمول کارانرژی بصورت زیر درمیآید .

$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p^e + \Delta E_p^i \qquad (۱۴-۷)$$

اینك انرژی مکانیکی کل جسم‌شامل انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل داخلی وانرژی پتانسیل خارجی است. هرگاه W' کارنیروهای خارجی غیروزن برابر صفر باشد انرژی مکانیکی کل ثابت میماند .

مثال ۱ـ فرض کنید دونقطه مادی درنقطه‌ای بسیار دور از کلیه اجرام‌مادی دیگر قراردارند نیروی‌خارجی براین دونقطه مادی وارد نمیشود. بنابراین کارنیروهای خارجی صفراست. دونقطه مذکور انرژی پتانسیل خارجی نیزندارند . نیروی جاذبه‌ای بین این دونقطه مادی وجود داردکه اندازه آن فقط تابع وضع این دونقطه نسبت بیکدیگر است . بنابراین میتوان گفت دستگاه دارای انرژی‌پتانسیل داخلی است. فرض کنید دونقطه مذکور در اثر جاذبه بطرف یکدیگر حرکت کنند . انرژی جنبشی دستگاه افزایش یافته انرژی پتانسیل داخلی آن‌کم میشود . مجموع انرژی جنبشی وانرژی‌پتانسیل داخلی ثابت میماند.

تنها نمیتوان بکمك اصل بقاء انرژی، سرعت هریك ازدو نقطه را تعیین نمود. اصل بقاءاندازه‌حرکت‌نیز دریافتن‌اندازه سرعت‌بما کمك میکند. بنابراین مسئله در فصل بعد مورد بحث قرارخواهدگرفت .

مثال ۲ـ درقسمت ۷ـ۵ انرژی پتانسیل‌خارجی جسمی راکه تحت تأثیر کشش‌فنری قرارداشت حساب‌کردیم این نیرو نیروی خارجی‌واردبرجسم و $\frac{1}{2}kx^2$ انرژی پتانسیل نظیر آنرا **انرژی پتانسیل الاستیکی خارجی**جسم مینامیم .

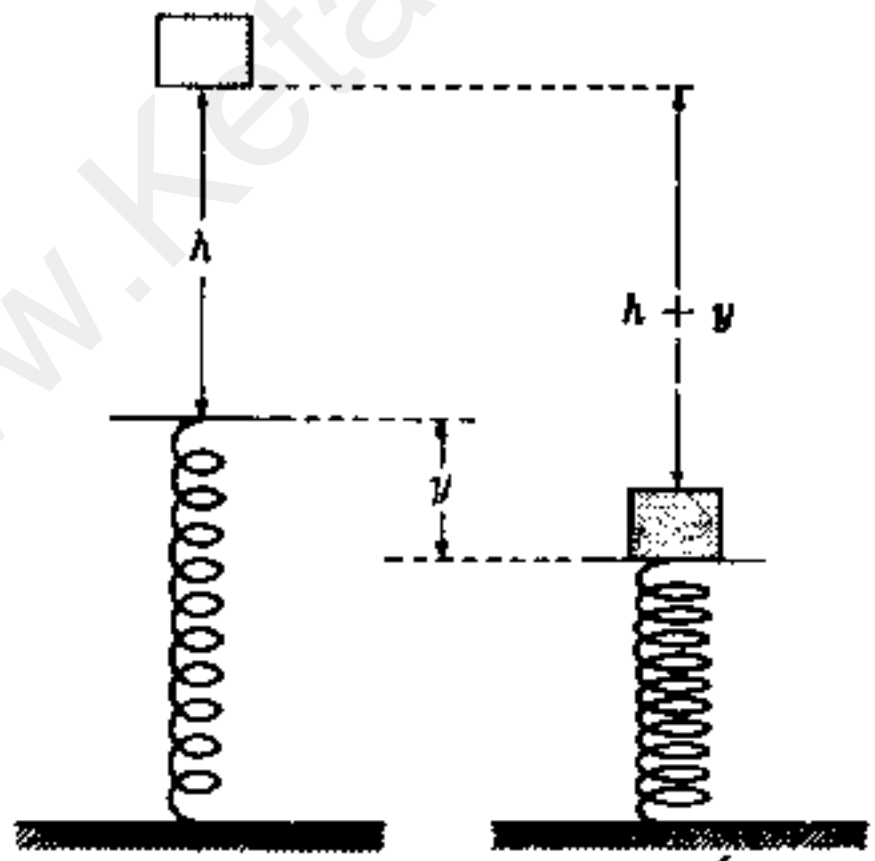
اکنون خود فنر را مورد نظرقرار میدهیم . فنر از عده بیشماری ملکول تشکیل‌شده است‌که بریکدیگر نیروی داخلی وارد میکنند وقتی‌فنر کشیده میشود وضع نسبی ملکولها تغییرمیکند. نیروهای بین ملکولی فقط تابع فاصله بین ملکولی ملکولها هستند پس‌وقتیکه فنر کشیده شوددارای انرژی پتانسیل داخلی میشود برای‌محاسبه این انرژی، فرض کنیدفنر را ازحالت آزاد بتدریج بادونیروی مساوی ومختلف‌الجهت بدوطرف بکشیم: کاراین‌نیروها

برابر $\frac{1}{2}kx^2$ است که درآن x ازدیاد طول فنردرنتیجه تأثیر این نیروهاست . هرگاه این کار را درسمت چپ فرمول نگاهداریم میتوان گفت که این‌کار W' یعنی کار نیروهای خارجی است . (فرمول ۷ـ۱۴). در انرژی پتانسیل خارجی و انرژی جنبشی فنر تغییری حاصل نشده است. هرگاه انرژی پتانسیل داخلی فنررا وقتی $x=0$ است صفر فرض کنیم تغییر انرژی پتانسیل داخلی پس ازکشیده‌شدن (که‌دراین حال برابرتغییر انرژی پتانسیل کل است) برابر انرژی پتانسیل انتهائی E_p' است بنابراین خواهیم داشت :

$$W' = \Delta E_p' = E_p' \qquad E_p' = \frac{1}{2}kx^2$$

لذا انرژی پتانسیل داخلی فنری‌که کشیده شده است برابراست‌با $\frac{1}{2}kx^2$ ، دیده میشودکه انرژی‌پتانسیل داخلی را میتوان بدون‌دردست داشتن‌اطلاعات زیاد درباره نیروهای داخلی‌حساب‌کرد.

مثال ۳ـ جسمی بجرم m که درابتدا بحال سکون است ازارتفاع h برروی فنری سقوط میکند وآنرا باندازه y متراکم مینماید (شکل ۷ـ۱۲) هرگاه ضریب تراکم فنر k باشد ماکزیموم y را حساب‌کنید.



شکل ۷ـ۱۲ ارتفاع سقوط کل برابر $h+y$ است

دراین جسم میتوان ازاصل بقاء انرژی مکانیکی استفاده نمود. درلحظه‌ایکه جسم‌رها میشود ونیز در لحظه‌ای که تراکم حداکثر مقدار خود را داراست انرژی جنبشی برابر صفر است. بنابراین‌کاهش انرژی پتانسیل ثقلی جسم برابرافزایش انرژی پتانسیل ارتجاعی

فنراست. ازشکل ۷-۱۲ پیداست که ارتفاع سقوط $h+y$ است. بنابراین داریم :

$$mg(h+y)=\frac{1}{2}ky^2 \quad \text{ویا} \quad y^2-\frac{2mg}{k}y-\frac{2mgh}{k}=0$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{2mg}{K}\pm\sqrt{(2mg/k)^2+8mgh/k}\right]$$

۷-۸ ، توان

درتعریف کار، زمان انجام کارهیچگونه نقشی ندارد. وقتی باری بارتفاع معینی بالا میرود، مقدار کار مشخصی انجام گرفته است. خواه این کار دریك ثانیه وخواه دریکدقیقه یا یکسال انجام گرفته باشد. دربسیاری ازموارد لازم است سرعت انجام کار درنظر گرفته‌شود. مقدارکاری که یکدستگاه درواحد زمان انجام میدهد **توان** دستگاه نامیده میشود.

هرگاه درزمان Δt کار ΔW توسط دستگاهی انجام شود توان متوسط P چنین تعریف‌میشود .

$$\text{توان متوسط} = \frac{\text{کار انجام شده}}{\text{زمان انجام کار}}$$

$$P=\frac{\Delta w}{\Delta t}$$

توان لحظه‌ای P حد $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ است وقتی Δt بسمت صفر میل کندیعنی:

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{dW}{dt} \qquad (۷-۱۵)$$

واحدتوان‌دردستگاه mks ژول برثانیه‌است‌که وات watt (w۱) نامیده میشود . چون این واحد بسیار کوچك است کیلو وات برابر 10^3 وات ($1kw=10^3w$) و مگاوات ($Mw=10^6w$) نیز معمول شده است. واحد توان دردستگاه cgs ارگ‌برثانیه است‌که اسم خاصی ندارد .

دردستگاه‌متعارف انگلیسی واحدتوان $ftlb/sec$ است‌ولی چون‌این‌واحد بسیار کوچك است‌واحددیگری‌بنام‌اسب که‌برابر $550\,ftlb/sec=33000\,ftlb/min$ است‌رایج‌میباشد

یعنی موتوری بتوان یك اسب میتواند باری بوزن سی وسه هزار پوند را در هر دقیقه یك فوت بالا برد .

بعضی بغلط تصورمی‌کنندکه وات وکیلووات واحدهای الکتریکی‌واسب واحدمکانیکی میباشد. اما چنین نیست. میتوان توان مصرفی یك موتور الکتریکی یا یك لامپ را برحسب اسب وتوان یك موتوردیزل را برحسب کیلووات سنجید .

با استفاده ازروابط موجود میان‌واحدهای نیوتون ، پوند ومتروفوت میتوان نشانداد که $1hp=746w$ یا $0/746kw$ یعنی درحدود $\frac{3}{4}$ کیلووات است (در دستگاه متریك اسب بخار $75\ \frac{kgm}{sec}$ تعریف شده بود و برابر $736w$ میشد. همیشه باختلاف بین اسب انگلیسی hp واسب درسیستم متریك .C.V توجه‌کنید. مترجم).

پس از آشنائی بادوواحد اسب وکیلووات میتوان «اسب ساعت» و «کیلووات ساعت» را بعنوان واحدهای‌کار تعریف نمود

«اسب ساعت» کاری است‌که دستگاهی‌بتوان یك اسب‌درمدت یکساعت انجام میدهد.

چون چنین دستگاهی درهردقیقه $33000ftlb$ کارانجام میدهد کاریکساعت آن برابراست با $60\times33000ftlb$ ویا $1/98\times10^6ftlb$ = یك اسب ساعت

کیلووات ساعت کاری است‌که دستگاهی بتوان یك کیلووات درمدت یکساعت انجام میدهد

چون چنین دستگاهی درهرثانیه $1000j$ کارانجام داده، کارانجام‌شده‌دریکساعت توسطاین دستگاه برابر1000×3600 است ویا:

$$1kw.hr=3/6\times10^6joules=3/6Mj$$

باید توجه داشت‌که‌کار باآنکه کمیت فیزیکی است قابل خرید وفروش است. نیرود سرعت کمیت‌های قابل‌خرید وفروش‌نیستندولی شما میتوانید کیلووات‌ساعت(انرژی‌الکتریکی) را بقیمت چند ریال بخرید. همچنین هر BTU گرماکه معادل ۷۷۸ فوت پوند است‌در حدود چند هزارم ریال می‌ارزد .

۷ـ۱۰ ، توان وسرعت

فرض‌کنیم‌نیروی F که بریك‌نقطه مادی اثرمیکند باندازه Δs تغییرمکان یابد. هرگاه F_s مؤلفه مماسی نیروی F باشد کارنیروی F برابر $\Delta W=F_s.\Delta s$ وتوان متوسط برابر است با :

$$\bar{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=F_s\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=F_s\cdot\bar{v}$$

وتوان لحظه‌ای برابر است با :

$$\boxed{P=F_s\cdot v} \qquad (۱۶-۷)$$

که درآن v سرعت لحظه‌ای است . راه دیگر این است که فرمول ۷ـ۱۶ را بصورت زیر بنویسیم

$$\boxed{P=F.v} \qquad (۱۷-۷)$$

مثال نیروی موتور جهت هواپیمائی $۱۵۰۰۰n$ است. وقتی سرعت آن $۲۵۰m/sec$ است توان چه اندازه است؟

$$P=F_s\cdot v=۱۵۰۰۰n\times۲۵۰\frac{m}{sec}=۳۷۵۰۰۰\frac{j}{sec}=۳/۷۵\times۱۰^{۲}kwh$$

مسائل

درحل این مسائل $g=۱۰m/sec$ فرض شود مگراینکه درصورت مسئله عدد دیگری قید شده باشد

۱ـ۷ نیروی موتوریك لکوموتیو باری $۶\times۱۰^{۴}n$ است وقطاررا باسرعت $۷۲km/hr$ میبرد. وقتی قطاریك کیلومتر راه طی کند، موتور چقدر کارانجام داده است.

۲ـ۷ جسمی بجرم $۴۰kgm$ برسطح افقی بضریب اصطکاك $۰/۲۵$ میلغزد. هرگاه نیروی مؤثر برآن $۸۰n$ و امتدادنیرو ۳۰° زیرافق باشد، پس از ۳ متر جابجاشدن، چقدر کار انجام شده است .

۳ـ۷ قایقی را باطناب می کشند. هرگاه زاویه امتدادطناب و امتداد حرکت ۱۰° و نیروی موثر $۵۰۰n$ باشد پس از ۳۰ متر جابجاشدن ،چقدرکارانجام میشود ؟

۴ـ۷ جسمی را روی سطح افقی با نیروئی واقع درامتداد افق برابر $۵۰n$ بفاصله

۱/۵متر جابجامیکنند. نیروی اصطکاک ۱۰n است. کار نیروی محرك (۵۰n) وکار نیروی اصطکاک را بدست آورید .

۷ـ۵ جسمی بانیروی $F=-150x^3$ بطرف مبدء مختصات جذب میشود. دراین فرمول F برحسب نیوتون و x برحسب متراست. (a) چه نیروئی لازم است تاجسم را درنقطه a به فاصله ۰/۳ متر ازمبدء نگاهدارد ؟ (b) نیروی لازم برای اینکه جسم درنقطه b بفاصله ۰/۶m ازمبدء قرار گیرد. (c) جسم درفاصله ab چقدر کار انجام میدهد ؟

۸ـ۶ نیروئی که گازموجود درسیلندری بسطح مقطع A برپیستن واردمیآورد p.A است که درآن p فشار گاز است. کار W درفاصله x_1 و x_2 برابراست با :

$$W=\int_{x_1}^{x_2} Fdx=\int_{x_1}^{x_2} p\cdot Adx=\int_{V_1}^{V_2} p\cdot dV$$

دراین فرمول dv تغییرات کوچك حجم است. (a) درانبساط ایزوترم گاز (دما ثابت) رابطه فشار وحجم $p=\frac{nRT}{V}$ است. n و R اعداد ثابت و T نیزدر اینحالت ثابت است هر گاه گازازحجم V_1 به V_2 برسدکارانجام شده راحساب کنید. (b) درتحول آدیاباتیك گازرابطه حجم و فشار $k=\frac{k}{V^\gamma}$ است که درآن γ و k ضرائب ثابت‌اند. هر گاه گاز بطورآدیاباتیك از V_1 تا V_2 انبساط یابد کارانجام شده راحساب کنید .

۷ـ۷ (a) انرژی جنبشی اتومبیلی بجرم ۹۰۰kg که باسرعت ۴۵km/hr درحرکت است بدست آورید. (b) وقتی سرعت دوبرابر شود انرژی جنبشی چند برابرمیشود ؟

۷ـ۸ انرژی جنبشی گلوله ۲ گرمی که با سرعت $500\ \frac{m}{sec}$ درحرکت است چند ارگ وچند ژول است ؟

۷ـ۹ جرم الکترون $9\times10^{-28}gm$ و سرعت الکترونی که به صفحه حساس اسیلوگراف برخورد میکند $10^9\ \frac{cm}{sec}$ است . انرژی جنبشی آنرا حساب کنید .

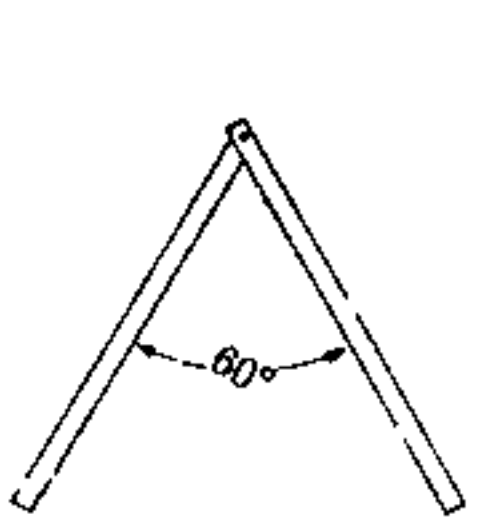
۷ـ۱۰ انرژی پتانسیل آسانسوری بجرم ۹۰۰kg در بالای آسمانخراشی بارتفاع ۳۸۰ مترچقدراست .

۷ـ۱۱ وقتی جسمی بجرم ۱kgm را از زمین بلندکرده روی میزی بارتفاع ۱m قرار دهیم ازدیاد انرژی پتانسیل آن چقدر میشود .

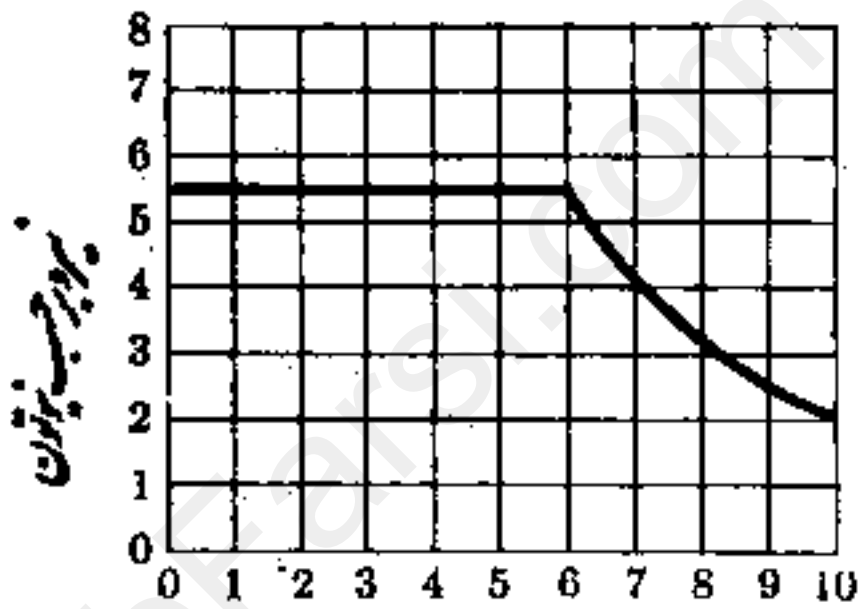
۷ـ۱۳ جرم خط‌کشی که درشکل ۷ـ۱۳ نشان‌داده شده است ۳۰۰gm و طول آن یك‌متر است. هرگاه آنرا ۶۰° منحرف‌کنیم ازدیاد انرژی پتانسیل‌آنرا حساب‌کنید.

۷ـ۱۳ نیروی لازم برای کشیدن فنری از رابطه $F = ۱۵۰x$ بدست میآیدکه‌در آن F برحسب نیوتون وx برحسب‌متر است. (a) چه نیروئی لازم است تافنر را ۱۵cm بکشیم. (b)کارانجام شده را وقتی فنر ۱۵cm ۳۰cm و ۶۰cm کشیده شود حساب‌کنید

۸ـ۱۴ طول‌درجات نیروهنجی ۲۰cm وحداکثر باری‌راکه‌اندازه میگیرد۲۰۰۰n است (a) انرژی پتانسیل فنر را وقتی ۲۰cm و ۱۰cm و ۵cm کشیده شود بدست آورید. (b)وقتی وزنه ۲۵kgm بآن آویزان است انرژی پتانسیل چقدراست ؟



۱۳ـ۷



شکل ۷ـ۱۴

۷ـ۱۵ جسمی تحت اثرنیروی ثابت ۵/۵n شش‌متر جابجا میشود وسپس اندازه نیرومطابق شکل ۷ـ۱۴ کاهش میآبد (a) درشش‌متراول چقدر کارانجام شده‌است. (b)در چهار متر بعدی‌که نیرو درحال کاهش است کار انجام شده چقدراست ؟

۷ـ۱۶ جسمی‌بوزن ۱۶۰n را روی سطح افقی بدون اصطکاکی ۲۰متر بحلومیرانیم نیروی مؤثر ۸۰ نیوتون است وجسم ازحال سکون شروع بحرکت میکند(a)کار انجام‌شده چقدراست واین‌کار بچه‌صورتی‌ازانرژی درمیآید. (b)ازطریق‌محاسبه، شتاب، سرعت‌انتهائی وسپس انرژی جنبشی‌را بدست آورید نتایج را قیاس‌کنید .

۷ـ۱۷ درمسئله قبل فرض‌کنید جسم باسرعت اولیه 5m/sec حرکت میکند.(a)کار انجام شده را حساب‌کنید (b) شتاب و سرعت انتهائی را محاسبه و صحت محاسبات قسمت (a) را مشخص‌کند .

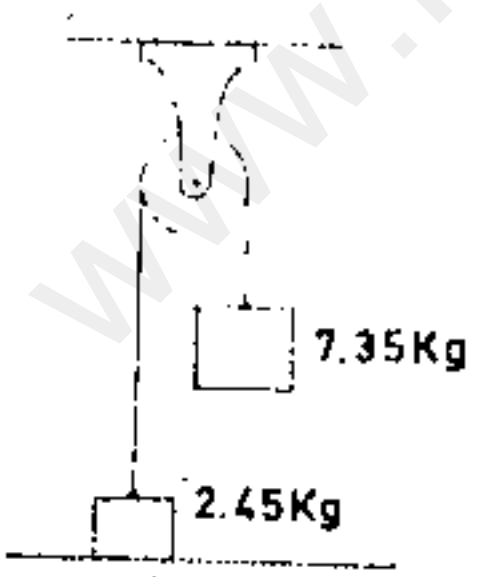
۷ـ۱۸ جسمی بجرم ۵ کیلوم را باسرغت ثابت 4m/sec درامتداد قائم ۸ متربالا میبریم. (a)نیروی مؤثر برجسم. (b) کار انجام شده دراین بالا رفتن را حساب‌کنید. این کار بچه‌صورتی درمیآید .

۷ـ۱۹ جسمی بجرم ۱۲ کیلوگرم را روی سطح شیب‌داری بشیب ۳۷° بانیروی F برابر ۱۴۴ نیوتون که درامتداد سطح برجسم اثرمیکند، ۳۰متر بالامی‌بریم. ضریب اصطکاک لغزشی ۰/۲۵ است. (a) کارنیروی F چه اندازه است ؟ (b) ازدیاد انرژی جنبشی جسم چه اندازه است. (c) ازدیاد انرژی پتانسیل جسم را حساب کنید. (d) کار نیروی اصطکاک را محاسبه کنید. (e) جمع جوابهای (b) و (c) و (d) چیست ؟

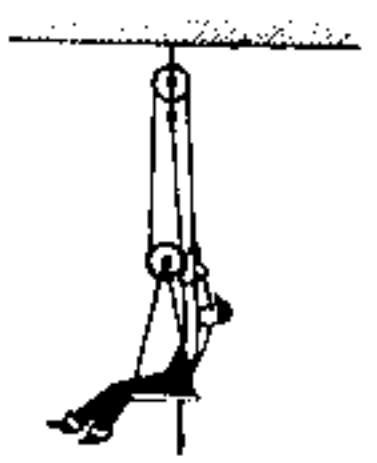
۷ـ۲۰ شخصی بجرم ۷۵kgm درکفه‌ای قراردارد ومطابق شکل ۷ـ۱۵ انتهای طناب حامل کفه ، پس ازعبور از دستگاه قرقره در دست شخص قرارمیگیرد. هرگاه از اصطکاک صرفنظر کنیم حساب کنید. (a) نیروئی راکه شخص باید بر انتهای طناب وارد آورد تاباسرعت ثابت بالارود (b) وقتی کفه یك‌متر بالارفت ازدیاد انرژی پتانسیل چه اندازه است؟ این ازدیاد انرژی را بامحاسبه نیرو وتغییرمکان نیز محاسبه کنید

۷ـ۲۱ بشکه‌ای بجرم ۱۲۰kgm بطنابی بطول ۱۰m آویزان است. (a) چه نیروئی درامتداد افق برآن واردشود تا درهمین امتداد ۱/۵ متر جابجاشود. (b) دراین جابجائی چقدر کارانجام شد است ؟

۷ـ۲۲ دستگاهی راکه درشکل ۷ـ۱۶ نشانداده شده بحال آزادرهامیکنیم. وزنه ۷/۳۵ کیلوگرمی ۲/۴ متر بالای سطح زمین است با استفاده از اصل بقاء انرژی سرعت وزنه را هنگام برخورد بزمین بدست آورید. اصطکاک قرقره ناچیز است . $g = 9/8111 / sec^2$



شکل ۷ـ۱۶



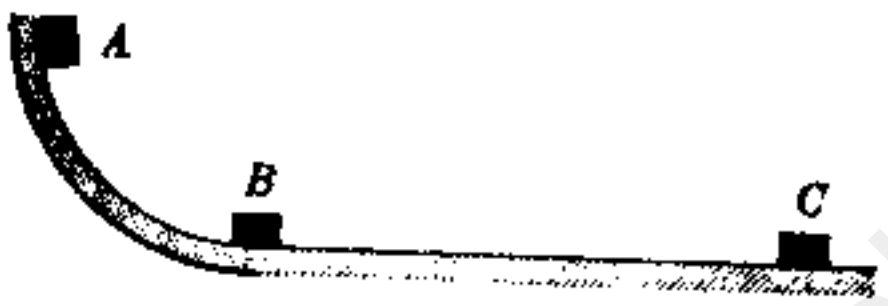
شکل ۷ـ۱۵

۷ـ۲۳ ضریب ثابت فنریك تفنك فنری ۵۷۶n/m است. هرگاه آنرا ۵ سانتیمتر متراکم کنیم و جرم گلوله‌آن ۴ گرم باشد. (a) سرعت گلوله هنگام خارج شدن از تفنگ چه اندازه است. (b) سرعت گلوله‌را در صورتیکه نیروی اصطکاک ثابتی برابر ۱۰۱۱ در مقابل حرکت فنر وجود داشته‌باشد بدست آورید .

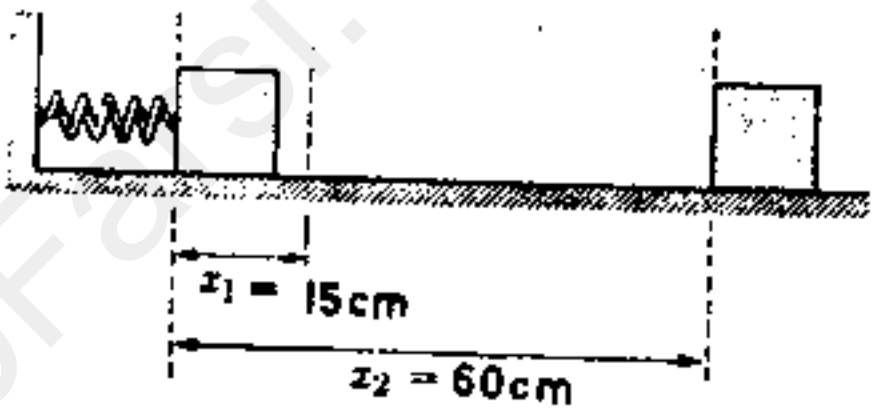
۲۴ـ۷ جسمی بجرم یك کیلوگرم مانندشکل ۷ـ۱۷ فنری‌را درامتداد افقی متراکم کرده است.ضریب ثابت‌فنر ۱۲۰۰ n/m است. هرگاه فنررا رهاکنیم وزنه پس‌ازطی فاصله ۶۰ cm می‌ایستد. هرگاه همانطورکه‌درشکل نشانداده شده است تراکم اولیه‌فنر۱۵ سانتیمترباشد ضریب اصطکاك سطح را بدست‌آورید .

۲۵ـ۷ جسمی بجرم دو کیلوگرم از ارتفاع ۴۰ cm روی فنری‌که ضریب ثابت آن ۹۶۰ n/m است می‌افتد . ماکزیموم تراکم فنررا بدست‌آورید.

۲۶ـ۷ پرتابه‌ای‌بجرم ۸ kgm باسرعت‌اولیه ۲۵۰ m/sec درامتداد ۴۵° پرتاب میشود پرتابه دیگری باهمین جرم وهمین سرعت درامتدادقائم پرتاب میشود. (a) حداکثرارتفاع دوپرتابه را بدست‌آورید(b) نشان‌دهیدکه انرژی دوپرتابه درحالیکه درارتفاع ماکزیموم هستند باهم برابرند. (c) بااستفاده‌ازقضیه کار ـ انرژی ؛ حداکثر ارتفاع همین پرتابه را اگرزاویه پرتاب ۳۰° میبود بدست‌آورید

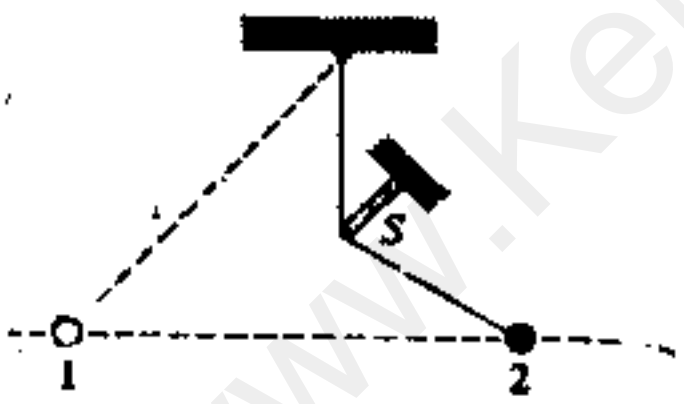


شکل۷ـ۱۸



شکل ۷ـ۱۷

۲۷ـ۷ جسمی‌بجرم ۱ kgm ازحال سکون‌ازنقطه A شکل ۷ـ۱۸ رها میشود. شعاع‌ربع‌دایره ۱/۲ متراست. وقتی جسم بنقطه B میرسدسرعت‌آن ۴ m/sec است . جسم از B تا C که چهار متر دورتراست حرکت‌کرده می‌ایستد. (a) ضریب اصطکاك سطح افقی و (b) کارنیروی اصطکاك را درطول مسیرمنحنی بدست‌آورید.



شکل ۷ـ۱۹

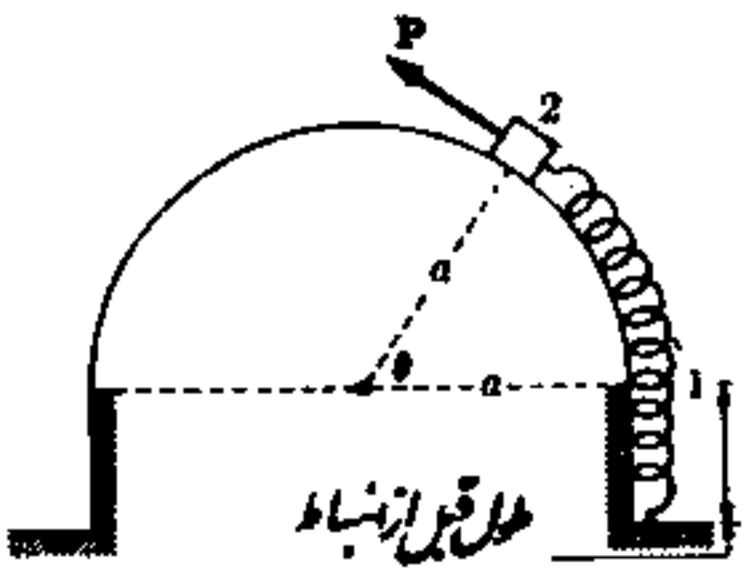
۲۸ـ۷ گلوله‌ای بجرم m به‌نخی بطول یك‌متر آویزان است هرگاه‌آنرا ۶۰° منحرف وسپس‌رهاکنیم.(a) سرعت‌آن وقتی ازوضع قائم عبورمیکند چه‌اندازه‌است؟ (b) وقتی مجدداً بانحراف ماکزیموم میرسدشتاب لحظه‌ای آن‌چه اندازه‌است ؟

۲۹ـ۷ گلوله‌ای به‌نخی بسته شده ودرسطح قائم روی محیط دایره‌ای درحرکت است. ثابت‌کنیدکه اختلاف دوکشش مؤثربرنخ ، درپائین‌ترین وبالاترین‌نقطه مسیر ،۶برابروزن گلوله است (b)هرگاه مطابق شکل‌مانع S راسر راه نخ‌قراردهیم‌ثابت‌کنیدکه ارتفاع گلوله دردووضع (۱) و (۲) مساوی‌است وبه‌جای S مربوط نیست

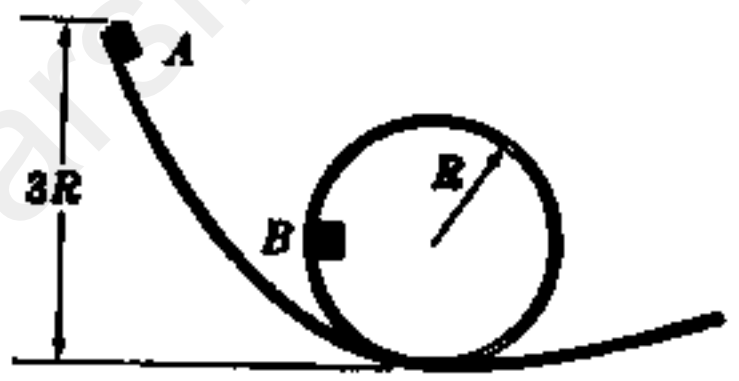
۷ـ۳۰ جسمی روی مسیری که درشکل ۷ـ۲۰ نشانداده شده از حال سکون شروع بحرکت میکند. ارتفاع A نقطه شروع حرکت $2R$ بالاتر ازته حلقه است. وقتی جسم بنقطه B(انتهای قطرافقی) میرسد. (a)شتاب شعاعی. (b) شتاب مماسی. (c) شتاب کل رابدست آورید

۷ـ۳۱ خط کش بیوزنی بطول یک متر حول محورافقی که از آن میگذرد میتواند بچرخد دو وزنه یک کیلوگرم ودو کیلوگرمی بدوانتهای خط کش وصل اند. هر گاه خط کش را ازوضع افقی بدون سرعت اولیه رها کنیم هنگام عبورازوضع قائم، سرعت هروزنه چقدراست ؟

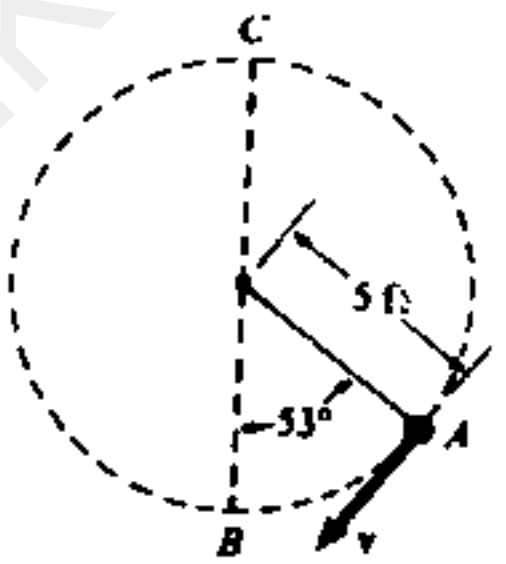
۷ـ۳۲ مطابق شکل ۷ـ۲۱ وزنه w رابانیروی متغیر $\mathbf{p}$ روی سطح استوانه‌ای میکشیم طرف دیگر وزنه بفنری وصل است. وقتی وزنه ازوضع(۱) بوضع (۲) برسد کار نیروی $\mathbf{p}$ را حساب کنید. (a) ازطریق انتگراسیون (b) براساس استفاده ازقضیه کارانرژی



شکل ۷ـ۲۱



شکل ۷ـ۲۰



شکل ۷ـ۲۲

۷ـ۳۳ وزنه ۴پوندی به‌نخی بطول $5ft$ آویزان‌است وپاندولی رامطابق‌شکل ۷ـ۲۲ تشکیل میدهد. آنرا $53°$ ازوضع قائم منحرف میکنیم. (a) باچه سرعت اولیه‌ای آنرا دد امتداد مماس پرتاب کنیم تا با سرعت $10\frac{ft}{sec}$ بنقطه c برسد. (b) پس‌ازرسیدن به B سرعت آن‌چه‌اندازه است؟ (c) وقتی از B عبورمیکند کشش مؤثر برنخ چه‌اندازه است. (d) هر گاه

باسرعت اولیه قسمت(a)ولی درجهت مخالف، جسم را بحرکت درآوریم باچه سرعتی جسم به C میرسد؟

۷ـ۳۴ انرژی پتانسیل ملکولهای دوائی بنا بر فرمول لنارد جونز Lennard-Jones بصورت زیر تابع r فاصله دوائم است؟

$$E_p(r)=\varepsilon_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$$

ثابت کنید که (a) r_0 فاصله ایست که انرژی پتانسیل نظیر آن می‌نیموم است. (b) می‌نیموم انرژی پتانسیل $-\varepsilon_0$ است. (c) وقتی $E_p(r)=0$ فاصله دوائم $r_0\sqrt[6]{2}$ است. (d) منحنی $E_p(r)$ را رسم کنید.

۷ـ۳۵ جسم ساکنی را در امتداد محور x ها بحرکت درمیآوریم. انرژی پتانسیل آن تابعی است از x یعنی $E_p(x)$ وانرژی کل آن ثابت وبرابر E است. ثابت کنید که زمان حرکت ازمبدء تانقطه‌ای بفاصله x برابراست با:

$$t=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E-E_p(x)]}}$$

۷ـ۳۶ پلشاهواره بجرم m درمداری بشعاع $2R$ بدور زمین میچرخد (R شعاع زمین) برحسب R و m و G ضریب جاذبه عمومی و m_g جرم زمین مقادیر زیررا بدست آورید. (a) انرژی جنبشی ماهواره .(b) انرژی پتانسیل ثقلی. (c) انرژی مکانیکی کل را

۷ـ۳۷ راننده موتورسیکلتی ازحالسکون موتوررا بحرکت درمیآورد. مرکز ثقل دستگاه درسطح افقی درحرکت است. (a) نیروئی که بوجودآورنده شتاب است چیست؟ (b) کار نیروی بوجود آورنده شتاب چه اندازه است؟ (c) چه عاملی باعث افزایش انرژی جنبشی میشود؟

۷ـ۳۸ برای اینکه درمدت ۳ ثانیه موتوری بتواند وزن ۵۰۰۰kg را دومتر بلند کند توان آن چه اندازه است؟

۷ـ۳۹ یك تله اسکی که گنجایش ۸۰ نفررا دارد روی طناب سیمی بشیب ۳۷° حرکت میکند . سرعت حرکت ۱۲/۶km/hr است. هرگاه هرنفر بطور متوسط ۷۵kgm جرم داشته باشد توان لازم برای بالابردن این عده را بدست آورید

۷ـ۴۰ (a) هرگاه قیمت هر کیلو وات ساعت انرژی ۴ ریال باشد قیمت هر اسب ساعت چقدراست؟ با هرریال چند ft lb وچند ژول انرژی میتوان خرید؟

۴۱ـ۷ (a) هرگاه‌قیمت هر کیلووات ساعت انرژی ۱/۵ ریال باشد پرتاب‌پرتابه‌ای بجرم $800\,kgm$ با سرعت اولیه $1000\,\frac{m}{sec}$ چند ریال خرج دارد ؟

۴۲ـ۷ ارزش‌کار موتوری‌بتوان $10\,hp$ درمدت $8\,hr$ چقدراست. قیمت‌هر کیلووات ساعت انرژی ۴ ریال است .

۴۳ـ۷ وقتی اتومبیلی باسرعت $45\frac{km}{hr}$ درحرکت‌باشد، توان‌موتورآن $20\,hp$ است. (a) نیروی مقاوم چه اندازه است؟ (b) هرگاه نیروی مقاوم متناسب باسرعت باشد توان موتور در سرعت $24\frac{km}{hr}$ و $96\frac{km}{hr}$ چه اندازه است ؟

۴۴ـ۷ وقتی یدك‌کشی باسرعت $30\,km/hr$ درحرکت است موتور آن ۴۰ اسب قدرت داردکشش طناب یدك‌کش چه‌اندازه است.

۴۵ـ۷ مردی بجرم $70\,kgm$ ازسه طبقه عمارتی بارتفاع ۱۲متر بالامیرود. (a) چندژول کارانجام داده. (b) انرژی پتانسیل‌اوچقدر افزایش یافته؟ (c) هرگاه در ۲۰ثانیه بالارفته‌باشدتوان چه‌اندازه است.

۴۶ـ۷ تلمبه‌ای ازچاهی بعمق ۳۰متر درهر دقیقه ۲/۴ مترمکعب آب بالا میآورد سرعت‌آب درحین خروج‌ازلوله $10\,m/sec$ است. (a) کارانجام شده درهردقیقه و (b) کاریکه صرف بالا آوردن آب شده است و (c) توان موتور را محاسبه‌کنید .

۴۷ـ۷ آسانسوری بجرم $1500\,kgm$ ازحال‌سکون شروع بحرکت‌کرده با شتاب ثابت $3\frac{m}{sec}$ روبالا میرود. (a) کشش‌را در طناب حامل آسانسور پیداکنید . (b) وقتی آسانسور $13/5\,m$ بالارفت سرعت‌آن چه اندازه‌است؟ (c) سه‌ثانیه پس ازشروع حرکت انرژی جنبشی آن‌چقدراست. (d) پس ازهمین‌سه‌ثانیه انرژی پتانسیل‌آن‌چقدرافزایش‌مییابد. (e) وقتی سرعت $7/2\,\frac{m}{sec}$ است توان موتور چه اندازه است ؟

۴۸ـ۷ اتومبیلی بجرم $1000\,\frac{kg}{m}$ برجاده افقی باسرعت $30\,m/sec$ درحرکت است و دراینحال توان‌موتورآن $50\,hp$ است هرگاه‌باهمین توان درجاده‌ای بشیب ۰/۰۵ بالارود سرعت آن چقدر میشود. نیروهای اصطکاك را ثابت فرض‌کنید .

۴۹ـ۷ (a) هر گاه اتومبیلی بجرم ۱۲۰۰kgm بر جاده افقی باسرعت ۴۵km/hr حرکت کند توان آن ۲۰hp است. اندازه نیروهای مقاوم در برابر آن چقدر است. (b) چه توانی لازم است تا اتومبیل با همین سرعت در جاده‌ای بشیب ۱۰٪ بالا رود. (c) چه توانی لازم است تا با همین سرعت در جاده‌ای بشیب ۲٪ پائین آید. (d) شیب چقدر باشد تا اتومبیل بدون کمك موتور باهمین سرعت روی جاده پائین آید

www.KetabFarsi.com

فصل هشتم

اندازه حرکت وضربه

۸ـ۱ ، اندازه حرکت وضربه

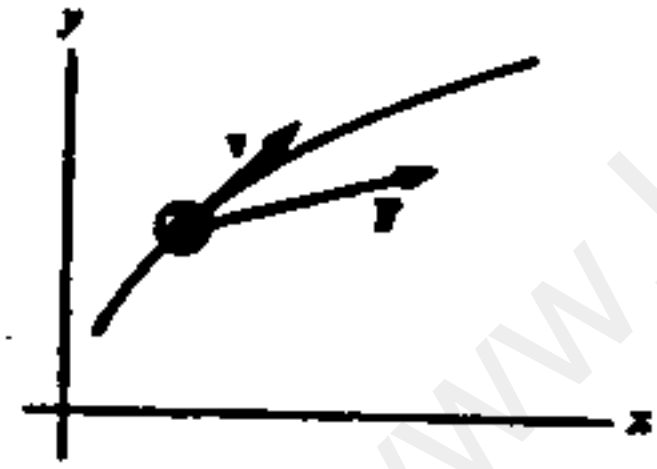
درفصل قبل دیدیم که چگونه مفهوم کار وانرژی بکمك قوانین نیوتون روشن شد . اینك مفاهیم برخورد و اندازه حرکت را بکمك همین قوانین مشخص میکنیم .

باز هم نقطه مـادی بجرم m را در نظر میگیریم که باسرعت v تحت اثـر نیروی F در صفحه xy مطابق شکل ۸ـ۱ حرکت میکند . از قوانین نیوتون نتیجه میشود .

$$\mathbf{F}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

و یا :

$$\mathbf{F}dt=m d\mathbf{v}$$



شکل ۸ـ۱ ، نقطه مادی که درصفحه xy درحرکت است

هرگاه در زمانهای t_1 و t_2 بردار سرعت بترتیب v_1 و v_2 باشد خواهیم داشت :

$$\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}dt=\int_{v_1}^{v_2}m d\mathbf{v} \qquad (۸-۱)$$

انتگرال سمت چپ را ضربه نیروی F در فاصله زمانی $t_1 - t_2$ مینامند . ضربه یك کمیت برداری است .

$$\text{ضربه} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt$$

واضح است که انتگرال بالا فقط موقعی قابل‌حل است که نیرو بصورت تابعی از زمان مشخص باشد . حل انتگرال سمت راست فرمول قبل چنین است :

$$\int_{v_1}^{v_2} m\,dv = mv_2 - mv_1$$

حاصلضرب جرم یك‌جسم درسرعت آنرا **اندازه حرکت** یا **momentum** جسم مینامند . واضح است که اندازه حرکت نیز کمیتی است برداری .

$$\text{اندازه حرکت} = m \cdot v$$

(معمولا برای اینکه اندازه حرکت mv از اندازه حرکت زاویه‌ای مشخص باشد آنرا اندازه حرکت خطی مینامند . چون فعلا بحث اندازه حرکت زاویه‌ای مطرح نیست چنانچه mv را فقط اندازه حرکت بنامیم اشتباهی رخ‌نمیدهد.)

اینك میتوان فرمول ۸ـ۱ را چنین نوشت :

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = mv_2 - mv_1 \qquad (۸-۲)$$

این فرمول را میتوان چنین بیان نمود : **بردار ضربه مؤثر بریك جسم‌درهرفاصله زمانی (ازحیث جهت ومقدار) برابر تغییر بردار اندازه حرکت جسم است . این قضیه را قضیه ضربه ــ اندازه حرکت مینامند .**

مورد استفاده از قضیه اندازه حرکت ـ ضربه درمواردیست که زمان اثر نیروکوتاه باشد مانند انفجار وبرخورد . چنین نیروها را **نیروهای ضربه‌ای** مینامند .

واحد ضربه در هر دستگاه برابر حاصلضرب واحدهای نیرو و زمان است . مثلا در

دستگاه mks واحدضربه $n \cdot sec$ ودردستگاه cgs برابر $dyne \cdot sec$ و در سیستم صنعتی انگلیسی lb_{sec} است .

واحد اندازه حرکت دردستگاه mks برابر $kgm \cdot \frac{m}{sec}$ ودر cgs برابر $gm \cdot \frac{cm}{sec}$ ودر دستگاه انگلیسی برابر $slug\ ft/sec$ است. باکمی دقت معلوم میشود که واحد ضربه وواحد اندازه حرکت یکی‌است مثلا :

$$1\frac{kgm \cdot m}{sec} = \frac{1kgm \cdot m}{sec^2} \cdot sec = 1n \cdot sec$$

برخلاف کار ، انرژی و توان که کمیات سکالر هستند ، ضربه واندازه حرکت کمیات برداری‌میباشند. بنابراین فرمول ۸-۲ یك تساوی برداری است ومعادل بادوتساوی سکالر (درصفحه xy) یا سه تساوی سکالر (درفضا) است .

وقتی نیرو وسرعت درصفحه xy باشند داریم :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{x_2} - mv_{x_1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = mv_{y_2} - mv_{y_1} \qquad (۸-۳)$$

هرگاه F مقدار ثابتی‌باشد میتوان آنرا انتگرال خارج نمود . دراین‌صورت بفرض اینکه $t_1 = 0$ و $t_2 = t$ باشد داریم :

$$F \times t = mv_2 - mv_1 \qquad (۸-۴)$$

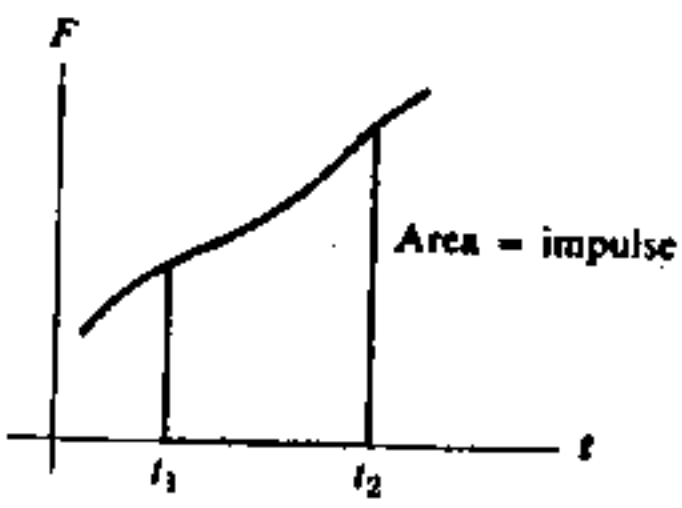
یعنی ضربه نیروی ثابت برابر حاصلضرب اندازه نیرو در زمان تأثیر آن است .

تغییر بردار اندازه حرکت ($mv_2 - mv_1$) هم‌جهت با بردار ضربه است .

هرگاه F و v_1 و v_2 در یك امتداد باشند فرمول ۸-۴ بصورت زیردر میآید :

$$F \cdot t = mv_2 - mv_1$$

ضربه هر مؤلفه نیروی واقع بریك امتداد



شکل ۸-۲