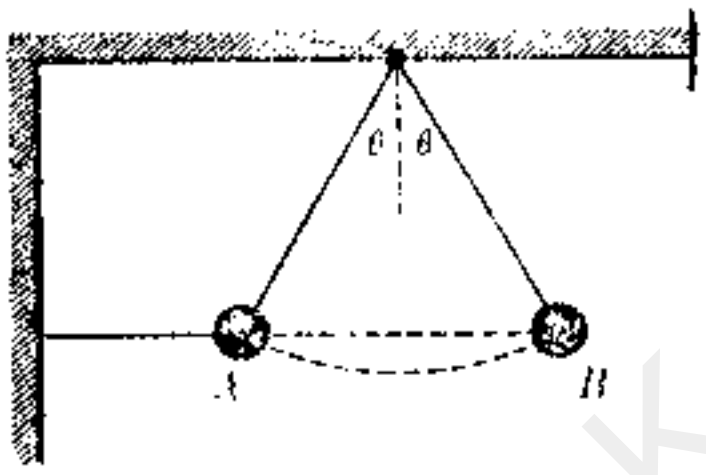
۶ـ۳۹ بمب افکنی باسرعت ۱۸۰ m/sec درروی دایره‌ای درسطح قائم میچرخد (a) شعاع دایره چقدرباشد تا شتاب شعاعی‌آن‌از 7g تجاوز نکند . (b) دراینحال وزنه ۸۰ کیلوگرمی‌که در هواپیما واقع است، چقدر وزن دارد (هواپیما درپائین‌ترین نقطه مسیر است .)

۶ـ۴۰ سطل‌آبی‌که بطنابی بطول ۲/۵ متربسته شده، درسطح قائم‌دوران میکند . حداقل سرعت درپائین‌ترین نقطه چقدر باشد تاآب درون‌آن دربالاترین نقطه نریزد .

۶ـ۴۱ چرخ فلکی هرده ثانیه یك دور درسطح قائم بدورمحورافقی‌میچرخد، فاصله شخصی‌که درآن نشسته ازمحور چرخش 5m است. (a) اختلاف دو وزن‌ظاهری شخص را دربالاترین وپائین‌ترین نقطه بدست‌آورید . (b) هرگاه بخواهیم وزن ظاهری در بالاترین نقطه صفر باشددستگاه چند دور درثانیه بچرخد . (c) دراین‌حال درپائین‌ترین نقطه، وزن ظاهری چقدر است . (d) هرگاه باهمین سرعت دربالاترین نقطه طناب حامل صندلی‌پاره شود چه اتفاقی میافتد ؟

۶ـ۴۲ گلوله‌ای دروضع A شکل ۶ـ۲۵ درحال تعادل است . نخ افقی را میسوزانیم گلوله بوضع B میرود . نسبت کشش طناب را در وضع A و B بدست آورید .



شکل ۶ـ۲۵

۶ـ۴۳ اغلب مردم میپرسند چه عاملی ماهواره را در مدارنگاهداشته ومانع سقوط‌آن میشود؟ (a) جواب شما دراین مورد چیست ؟ (b) این جواب درمورد ماه نیز صحیح است ؟

۶ـ۴۴ زمان یك‌دوران ماهواره‌ای بجرم m راکه در اطراف زمین در مدار دایره‌ای بشعاع ۸۰۰۰ km میچرخد بدست‌آورید . (جرم زمین = 6.0×10^{24} kgm)

۶ـ۴۵ میخواهیم ماهواره‌ای درسطح استوائی دورزمین در فاصله معینه بالای یك‌نقطه معین باشد فاصله آنرا اززمین پیدا کنید .

۶ـ۴۶ میخواهیم ماهواره‌ای را در ارتفاع 600 miles بالای سطح زمین در مدار دایره‌ای قراردهیم . هرگاه راکت، ماهواره را باین ارتفاع برساند، دراینصورت باید چه سرعتی بآن داده شود تا درمدار بماند شعاع زمین 3950 miles است .

۶ـ۴۷ ماهواره‌ای درمسیری بشعاع ۷۰۰۰ کیلومتر باسرعت ثابتی 27400 km درحرکت است . (a) زمان یك دوران و (b) شتاب نقل بسوی مدار چه اندازه است ؟

۶ـ۴۸ هرگاه زمین طوری بچرخدکه در استوا $g = 0$ شود طول مدت شبانروز چقدر است ؟

۶ـ۴۹ وزن شخصی دراستوا ۸۰۰ n است . اثرجاذبه زمین دراین نقطه براین‌شخص چه اندازه است ؟

www.KetabFarsi.com

فصل هفتم

کار و انرژی

مقدمه

درشکل ۷ـ۱ خط منحنی مسیر، جسمی بجرم **m** را نشانداده است که در صفحه **xy** حرکت میکند و برآیند نیروهای مؤثر برآن **F** میباشد. درحین انتقال، ممکن است اندازه، جهت و مقدار **F** تغییر کند. **F** را بدومؤلفه $\mathbf{F}_s$ مماس برمسیر و $\mathbf{F}_n$ قائم برمسیر، تجزیه میکنیم.

مؤلفه $\mathbf{F}_n$ که بر **v** بردارسرعت عمود است نیروی جذب بمرکز و تنها اثر آن تغییرجهت سرعت است درحالیکه اثر $\mathbf{F}_s$ تغییراندازه سرعت می‌باشد.

هرگاه **s** فاصله متحرك **m** ازنقطه اختیاری **O** واقع برمنحنی باشد در حالت کلی $\mathbf{F}_s$ تابع **s** است بنابرقانون دوم نیوتون میتوان نوشت:

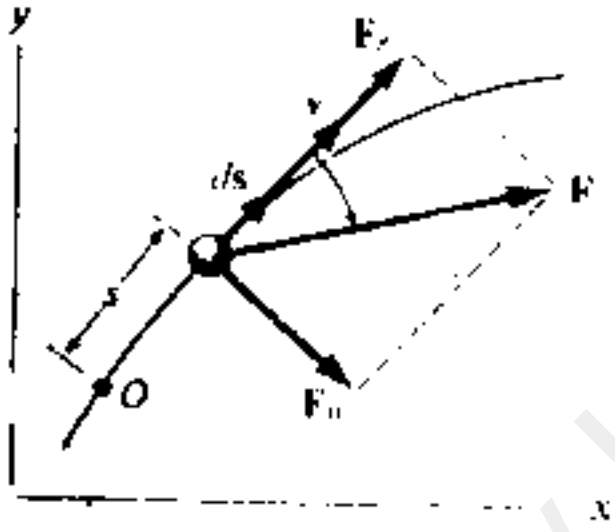
$$F_s = m\frac{dv}{dt}$$

چون F_s تابعی از **s** است میتوان نوشت:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds}$$

و ازآنجا:

$$F = mv\frac{dv}{ds}$$



شکل ۷ـ۱ مسیریك نقطه مادی درصفحه xy است

و یا :

$$F_s ds = mv dv$$

هرگاه بازاء $s = s_1$ و $s = s_2$ بترتیب $v = v_1$ و $v = v_2$ باشد انتگرال طرفین رابطه بالا چنین بدست میاید :

$$\int_{s_1}^{s_2} F ds = \int_{v_1}^{v_2} mv dv \qquad (۱-۷)$$

اما انتگرال طرف چپ برابر کار W است که نیروی F در فاصله s_1 و s_2 انجام میدهد یعنی :

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F_s(s) ds$$

واضح است که این انتگرال، بشرطی قابل محاسبه است که مؤلفه F_s بصورت تابعی از s دردست باشدویا F_s و s هردو بصورت تابعی ازیك متغیردیگرمعلوم باشند . انتگرال سمت راست فرمول قابل محاسبه است .

$$\int_{v_1}^{v_2} mv dv = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

نصف حاصلضرب جرم درمجذور سرعت یك جسم را انرژی جنبشی آن جسم مینامند وآنرا به E_K نمایش میدهند یعنی :

$$E_K = \frac{1}{2} mv^2$$

بنابراین فرمول ۷ـ۱ را میتوان چنین نوشت :

$$W = E_{K2} - E_{K1} \qquad (۲-۷)$$

یعنی **کار برآیند نیروهای وارد برذرات نقطه مادی، برابر تغییرانرژی جنبشی آن است .** این بیان را **قضیه کار ــ انرژی** مینامند .

اینك درباره مفهوم کار وانرژی جنبشی بتفصیل بیشتر صحبت میکنیم .

۷ـ۲ ، کار

درزبان عامیانه ، **کار** بهرنوع فعالیت اعم ازبدنی یا ذهنی اطلاق میشود . اما در

فیزیك مفهوم کار معنای محدودتری دارد . کارفیزیکی موقعی صورت میگیرد که نیروئی برجسمی واردآمده آنرا جابجاکند و درحین جابجائی ، همواره نیروی مؤثر مؤلفه‌ای در امتداد مسیرداشته باشد . هرگاه این مؤلفه وحرکت هم جهت باشندکار انجام شده مثبت و اگر مختلف‌الجهت باشند منفی است . هرگاه امتدادنیرو برتغییرمکان عمود باشد اندازه مؤلفه منطبق‌برمسیر، صفروکار انجام شده برابرصفر است .

بنابراین درموقع بالارفتن یك جسم ازسطح‌زمین، نیروئی که باعث بالا رفتن جسم میشودکار مثبت انجام میدهد . وقتی فنری کشیده میشودکارنیروئی که باعث کشیده شدن فنر میشود مثبت است ونیز نیروئی که باعث تراکم گازی میشودکار مثبت انجام میدهد . برعکس کارنیروی وزن جسم (که روپیائین اثرمیکند) هنگام بالا رفتن آن منفی‌است، زیرا مؤلفه مماسی نیرو (که دراینحال همان وزن جسم است) وتغییرمکان مختلف‌الجهت هستند . وقتی جسمی بررروی سطحی‌میلغزد، کار نیروی اصطکاك مؤثر برجسم‌همیشه منفی است. زیرا همیشه اصطکاك در خلاف جهت حرکت برجسم‌اثرمیکند، نیروی اصطکاك مؤثر بریك سطح ثابت کاری انجام نمی‌دهد زیرا این نیروجابجا نمی‌شود . با وجوداینکه نگاهداشتن بار توسط عضلات عملی‌مشکل وپرزحمت‌است، معذالك چون جابجائی وجودنداردکار صفراست . وقتی شخصی باری برپشت دارد و در سطح افقی جابجا میشود، کاری انجام نمی‌دهد چه‌وزن بار برجابجائی عمود است و بالاخره وقتی جسمی روی‌سطح افقی حرکت میکند. نیروی قائم وارده ازسطح برجسم نیز کاری انجام نمی‌دهد . همچنین کارنیروی جذب بمرکز در حرکت دورانی صفراست .

واحدکار دردستگاه mks یك‌نیوتون متر(n.m) است که ژول (j۱) نامیده میشود. واحدکار در سیستم cgs ارگ است وبرابر است با یك دین × سانتیمتر dyne.cm . چون هرمتر برابر cm ۱۰۰ وهر نیوتون برابر $۱۰^۵$ دین است نتیجه میگیریم که :

$$۱j = ۱n.m = ۱^{۵}dynes \times ۱۰^{۲} = ۱۰^{۷}dyen.cm = ۱۰^{۷}ergs$$

دردستگاه انگلیسی واحدکار فوت پوند (ftlb) است . داریم :

$$۱ft\ lb = ۱/۳۵۶j \qquad ۱j = ۰/۷۳۷۶ft\ bl$$

فرمول کاررا بصورت‌های مختلفی میتوان نوشت : هرگاه θ زاویه بین **F** و**ds** باشداندازه مؤلفه مماسی F_s برابراست با $F\cos\theta$ بنابراین :

$$W = \int_{s_۱}^{s_۲} F_s ds = \int_{s_۱}^{s_۲} F\cos\theta ds$$

درفصل اول درباره جمع وتفریق برداری ودرفصل سوم در باره حاصلضرب برداری

دوبردار صحبت کردیم. از تعریف کار میتوان تعریف **حاصلضرب عددی دوبردار** را نتیجه گرفت. بنابرتعریف، حاصلضرب عددی scalar دوبردار **A** و **B** برابراست باحاصلضرب اندازه **A** در تصویر **B** بر امتداد **A** . هرگاه زاویه بین **A** و **B** برابر θ باشدحاصلضرب اسکالر (که حاصلضرب نقطه‌ای نیز نامیده میشود) آندو برابراست با :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\theta$$

واضح است که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ وبرمبنای این تعریف داریم :

$$W=\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

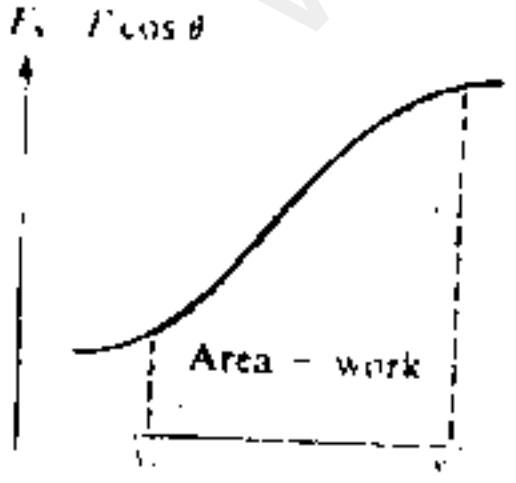
هرگاه اندازه F وزاویه بین امتدادآن با مسیر، ثابت باشد $F\cos\theta$ ثابت است واز انتگرال بیرون میآید و در اینحال، چنانچه مسافت طی شده را در فاصله s_1 و s_2 برابر s فرض کنیم ($s_1=0$ و $s_2=s$) خواهیم داشت :

$$W=\int F\cos\theta\,ds=F\cos\theta\int ds=(F\cos\theta)s$$

هرگاه نیرو ثابت وهم امتداد با تغییرمکان باشد (هم جهت یا مختلف الجهت) θ برابر صفر یا ۱۸۰° و $\cos\theta=\pm 1$ است لذا داریم :

$$W=\pm F\cdot s$$

و در این حالت خاص میتوان گفت « کار برابرحاصلضرب نیرو درتغییرمکان است» ولی باید درنظرداشت که **درحالت کلی** تعریف کاربصورت‌زیر فرموله میشود .



شکل ۷-۲ ، کاربرابرسطح زیرمنحنی $F\cos\theta$ برحسب s است

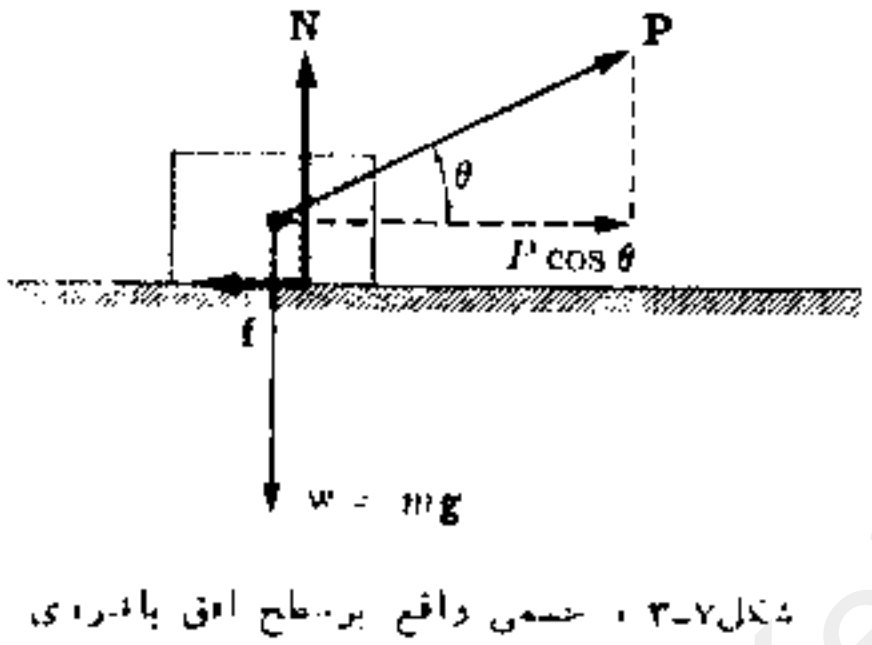
$$W=\int_{s_1}^{s_2}\mathbf{F}\,d\mathbf{s}=\int_{s_1}^{s_2}F\cos\theta\,ds \qquad (۳-۷)$$

درآنچه گفتیم **F** برآیند نیروهای خارجی وارد برجسم فرض شد . لازم است کار

نیروی معینی را که برجسمی اثرمیکند نیز بتوانیم بدست آوریم . کار هر نیرو را میتـوان از روی تعریف کلی کار که درفرمول ۷ـ۳ فرموله شده است محاسبه نمود و چون کار کمیت اسکالراست، پس ازمحاسبه کار هریك ازنیروها میتوان آنها را با هم جمع نمود .

هرگاه $F\cos\theta$ را بعنوان تابعی از s بتوان مطابق شکل ۷ـ۲ بصورت یك منحنی نمایش داد، کار درفاصله s_1 تا s_2 برابر سطح زیر منحنی $F\cos\theta$ برحسب s است که بین دو خط قائم بطول های s_1 و s_2 محدود باشد .

مثال ۱ ـ درشکل ۷ـ۳ صندوقی نشـان داده شده است که با نیروی P زاویه θ با افق دارد در امتداد افقی کشیده میشود . نیروهای دیگر که برآن اثرمیکنند **w** وزن جسم و **N** نیروی قائم وارده از تکیه گاه و **f** نیروی اصطکاك است . کار هریك از نیروهـا را هنگام جابجائی **s** (بطرف راست) بدست آورید . مؤلفه **p** درامتداد حرکت برابر است با $P\cos\theta$ وکار این نیرو برابراست با :



شکل ۷ـ۳ ، جسمی واقع برسطح افق بانیروی مایل P که با افق زاویه θ میسازد بطرف راست کشیده میشود .

$$W_p = (P\cos\theta)\cdot s$$

نیروهای **w** و **n** هردو برمسیرحرکت عمودانـد بنابراین کار انجام شده توسط آنها صفراست، یعنی

$$W_w = 0 \qquad W_N = 0$$

چون نیروی اصطکاك در خلاف جهت حرکت ممتداست، بنابراین کار انجام شده توسط آن منفی است یعنی :

$$W_f = -fs$$

چون کار کمیتی عددی است پس کار کل W برابرمجموع این کارهاست یعنی :

$$W = W_p + W_w + W_N + W_f = (P\cos\theta)\cdot s + 0 + 0 + f\cdot s = (P\cos\theta - f)s$$

اما $P\cos\theta - f$ برآیند نیروهای وارد برجسم است بنابراین **کار کل انجام شده توسط هریك از نیروها برابر کار انجام شده توسط برآیند نیروهای وارد برجسم است .**

فرض کنیم $w = 1000\,n$ و $P = 500\,n$ و $f = 150\,n$ و $\theta = 37^\circ$ و $s = 20\,m$ باشد داریم :

$$W_p = (P\cos\theta)\cdot s = ۵۰۰\,n \times ۰/۸ \times ۲۰\,m = ۸۰۰۰\,J$$

$$W_f = -f\cdot s = -۱۵۰\,n \times ۲۰\,m = -۳۰۰۰\,J$$

$$W = W_p + W_f = ۵۰۰۰\,J$$

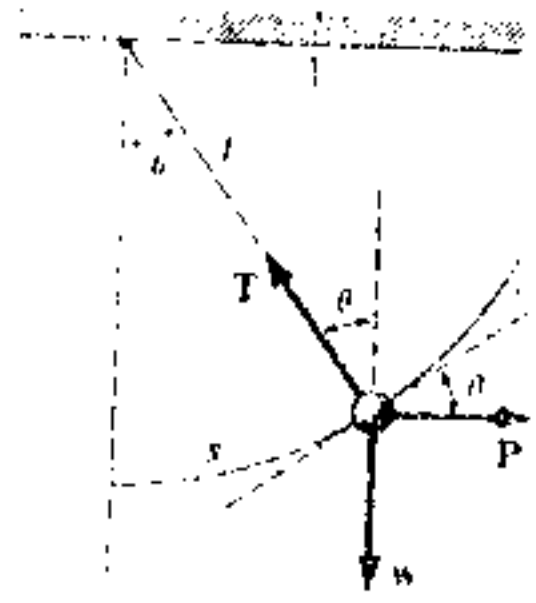
وبعنوان امتحان میتوان معلوم کرد که کار برآیند

$$W = (P\cos\theta - f)\cdot s = (۴۰۰\,n - ۱۵۰\,n)\times ۲۰\,m = ۵۰۰۰\,J$$

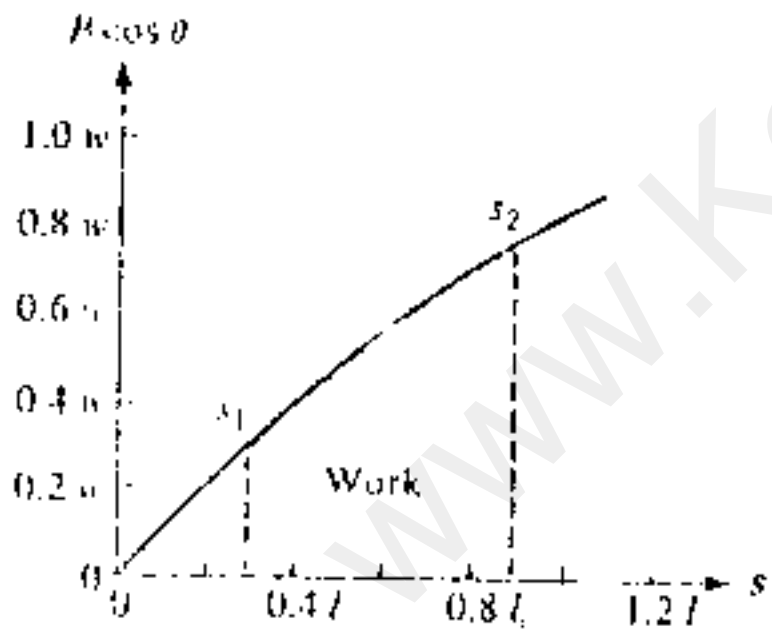
مثال۲ـ جسمی بوزن **w** بطنابی بطول **l** (شکل ۷ـ۴) آویزان است . نیروی متغیر افقی **P** که ابتدا صفر است و بتدریج افزایش می‌یابد، آنرا بطرف راست میکشد (بطوریکه همیشه تعادل جسم برقرار است) . کار انجام شده را وقتی زاویه انحراف θ شود ، بدست آورید .

چون جسم بحال تعادل‌است، بنابراین برآیند نیروهای افقی مؤثر بر جسم صفر است یعنی :

$$P = T\sin\theta$$



شکل ۷ـ۴ ، نیروی متغیر و افقی **P** برجسم کوچکی درفاصله صفر تا **s** اثر میکند



شکل ۷ـ۵ ، کار نیروی **P** وقتی نقطه اثر آن از $s_1 = 0/3\,l$ تا $s_2 = 0/9\,l$ تغییر میکند برابر سطح ذوزنقه مشخص است .

وقتی برآیند نیروهای قائم وارد برجسم را صفرفرض کنیم داریم :

$$w = T\cos\theta$$

واز تقسیم‌آندو، بریکدیگر نتیجه میشود :

$$P = w\ \tan\theta$$

نقطه اثر P در روی‌قوس s نوسان میکند. چون $s=l\theta$ است پس $ds=ld\theta$ و داریم :

$$W=\int P ds=\int P\cos\theta ds=\int_{\cdot}^{\theta} w\tan\theta\cos\theta l d\theta=wl\int_{\cdot}^{\theta}\sin\theta d\theta$$

$$=wl(1-\cos\theta) \qquad (۴-۷)$$

درشکل ۷-۵ منحنی $P\cos\theta$ (که برابر $w\sin\theta$ است) برحسب $s(=l\cdot\theta)$ رسم شده است . کار درهر فاصله برابر سطح زیرمنحنی است . در این‌شکل از $s_1=\cdot/31$ تا $s_2=\cdot/91$ کاربصورت سطح زیر منحنی نمایش داده شده است .

۷-۳، انرژی جنبشی

انرژی جنبشی یك جسم مانند کار، یك‌کمیت اسکالر است . انرژی جنبشی یك جسم متحرك تنها تابع **اندازه** سرعت آن (تندی‌آن) است و به امتداد وجهت و نحوه پیدا شدن سرعت درجسم بستگی‌ندارد .

برطبق قضیه‌کار ـ انرژی تغییر انرژی جنبشی یك جسم فقط تابع $W=\int F dS$ است ولی تابع اندازه‌های F و ds بطور مجزا نیست : مثلا اگر جابجائی زیاد ونیروکم وبالعکس جابجائی‌کم‌ونیرو زیاد باشد ولی حاصلضرب نیرو وتغییرمکان برابر باشند، تغییر انرژی جنبشی‌ثابت‌خواهد ماند . هرگاه m و v_1 و v_2 معلوم باشند میتوان‌کاربرآیند نیروهای‌وارد برجسم را حساب‌کرد، بدون اینکه بدانیم اندازه این برآیند یا اندازه‌تغییر مکان آن چقدر است .

هرگاه‌کار برآیند نیروها مثبت باشد ، انرژی جنبشی ثانویه جسم بیشتراز انرژی جنبشی اولیه آن است. یعنی انرژی‌جنبشی‌افزایش می‌یابد واگرکار مزبور منفی باشدانرژی جنبشی‌کاهش خواهد یافت . اگرکار صفر باشد انرژی جنبشی ثابت میماند .

درمحاسبه‌انرژی جنبشی، باید درانتخاب واحدهای جرم وسرعت، دقت خاص مبذول شود. دردستگاه cgs جرم‌برحسب گرم وسرعت برحسب cm/secودر دستگاه mks جرم برحسب kgm وسرعت برحسب m/sec سنجیده میشود . در دستگاه صنعتی انگلیسی ft برحسب slug و v برحسب ft/sec است . انرژی در سه دستگاه مذکور بترتیب برحسب

$$ftlb=slug\frac{ft^2}{sec^2} \quad , \quad joule=kgm\cdot\left(\frac{m}{sec}\right)^2 \quad , \quad erg=gm\cdot\left(\frac{cm}{sec}\right)^2$$

بدست میآید .

$$\text{Kgm}\cdot\frac{\text{m}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=\frac{\text{newton}}{\text{m}/\text{sec}^{۲}}\times\frac{\text{m}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=\text{newton}\times\text{m}=\text{Joule}$$

و یا همین ترتیب :

$$\text{gm}\cdot\frac{\text{cm}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=\frac{\text{dyne}}{\text{cm}/\text{sec}^{۲}}\times\frac{\text{cm}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=\text{dyne}\cdot\text{cm}=\text{erg}$$

$$\text{slug}\,\frac{\text{ft}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=\frac{\text{lb}}{\text{ft}/\text{sec}^{۲}}\times\frac{\text{ft}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=\text{ft lb}$$

مثال- بشکل ۷-۱ مراجعه کنید. مقادیر عددی درآخرمثال ۱ ذکرشده است . کار کل نیروهای خارجی مؤثر برجسم $۵۰۰۰\,\text{j}$ است. پس ازدیاد انرژی جنبشی جسم نیز $۵۰۰۰\,\text{j}$ خواهد بود . فرض کنیم $v_۱=۴\,\text{m}/\text{sec}$ باشد انرژی جنبشی اولیه برابراست با:

$$E_{k_۱}=\frac{۱}{۲}mv_۱^{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰۰۰\,\text{n}}{۱۰\,\text{m}/\text{sec}^{۲}}\times۱۶\frac{\text{m}^{۲}}{\text{sec}^{۲}}=۸۰۰\,\text{j}$$

برای پیدا کردن سرعت ثانویه جسم ابتدا باید شتاب را محاسبه نمود .

$$a=\frac{F}{m}=\frac{۴۰۰\,\text{n}-۱۵۰\,\text{n}}{\frac{۱۰۰۰\,\text{n}}{۱۰\,\text{m}/\text{sec}^{۲}}}=۲/۵\,\text{m}/\text{sec}^{۲}$$

سپس خواهیم داشت :

$$v_۲^{۲}=v_۱^{۲}+۲as=۱۶\,\text{m}^{۲}/\text{sec}+۲\times۲/۵\,\text{m}/\text{sec}^{۲}\times۲۰\,\text{m}=۱۱۶\,\text{m}^{۲}/\text{sec}^{۲}$$

وانرژی جنبشی درحالت دوم چنین بدست میآید .

$$E_{k_۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰۰۰\,\text{n}}{۱۰\,\text{m}/\text{sec}^{۲}}\times۱۱۶\,\text{m}^{۲}/\text{sec}^{۲}=۵۸۰۰\,\text{j}$$

وچنانکه دیده میشود تغییر انرژی جنبشی برابر ۵۰۰۰ ژول است . (در حل این مثال $g=۱۰\,\text{m}/\text{sec}^{۲}$ فرض شده است)

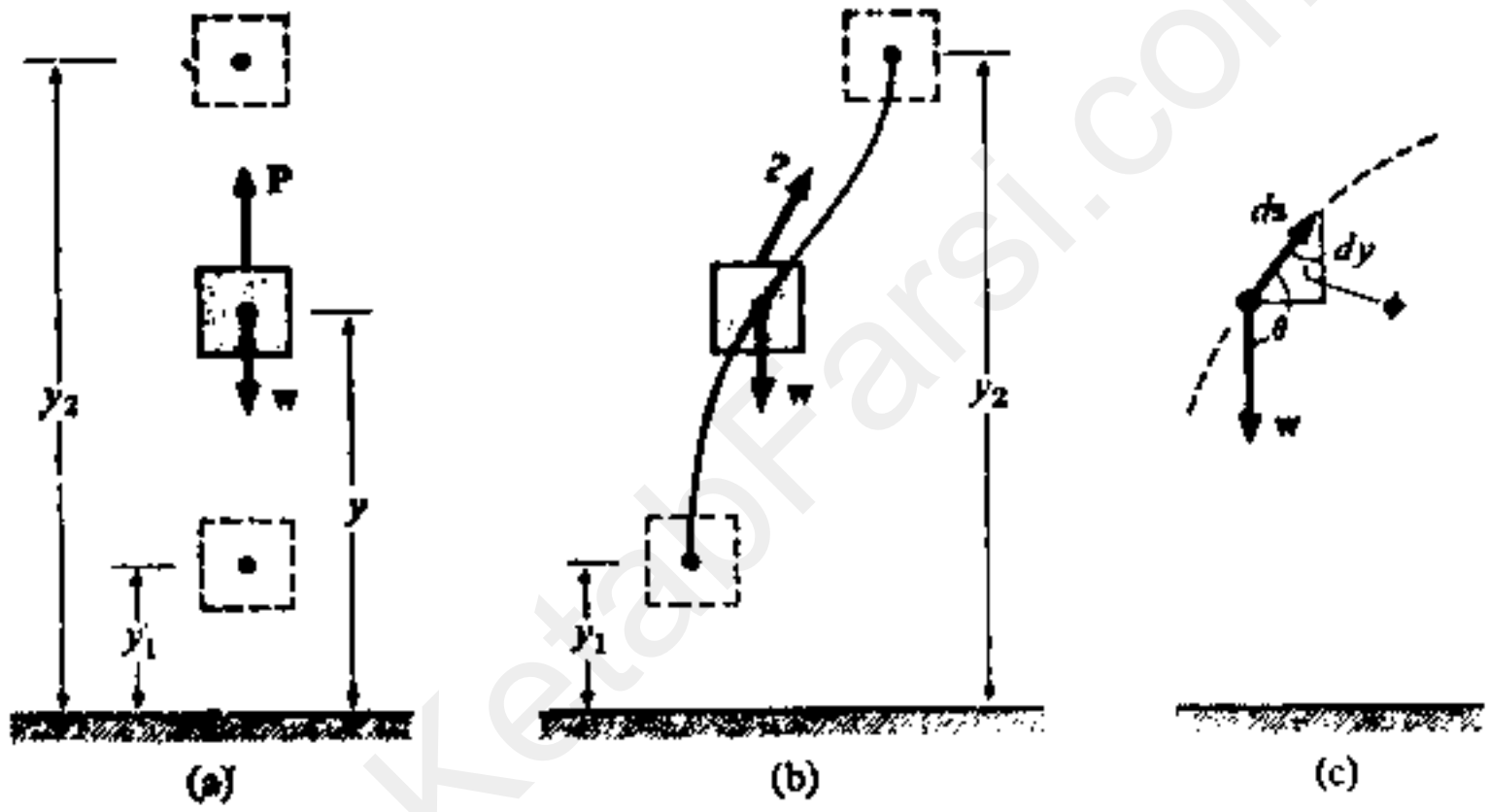
۷-۴ ، انرژی پتانسیل ثقلی

فرض کنیم مطابق شکل ۷-۶ (a) جسمی بجرم m $(w=mg)$ که مرکز ثقل آن در ارتفاع $y_۱$ واقع است . در امتداد قائم حرکت کرده بارتفاع $y_۲$ میرسد (سطح مبدء

اختیاری است) در اینجا از تغییرات g برحسب ارتفاع صرفنظر میکنیم . نیروی وزن w درامتداد قائم وروبپائین برجسم اثرمیکند . P را برآیند نیروهای خارجی وارد برجسم و W′ را کاراین نیروها فرض میکنیم. جهت w مخالف جهت جابجائی است وکار انجام شده توسط آن برابراست با :

$$W_{grav.} = -w(y_2 - y_1) = -(mgy_2 - mgy_1) \qquad (۵-۷)$$

[دانشجویان باید بتوانند برای یکدیگر استدلال کنندکه اعم از اینکه جهت تغییر مکان جسمی در امتداد قائم رو ببالا یا روبه پائین بـــــــاشد کار نیروی وزن یعنی : $mg(y_2 - y_1)$ — منفی است].



شکل ۷–۶ ، کار نیروی وزن w جسمی که در میدان ثقل از نقطه‌ای بنقطه دیگرمنتقل میشود .

حال فرض کنیم جسمی که در ارتفاع y_1 است برروی مسیرغیرمشخص حرکت کرده به نقطه دیگری که ارتفـاع آن y_2 است برسد . [شکل۷–۶ (b)] درقسمت (c) شکل قطعـه بینهایت کوچکی ازمسیررا بزرگه نشان داده‌اند . کار نیروی وزن برابر است با :

$$W_{grav.} = \int_{s_1}^{s_2} w\cos\theta\, ds$$

هر گاه φ زاویه ds با امتدادقائم (جزء بینهایت کوچك امتدادقائم را dy مینامیم) باشد. خواهیم‌داشت: $dy = ds\cos\theta$ و چون $\varphi = ۱۸۰^\circ - \theta$ است خواهیم داشت ·

$$\cos\varphi = -\cos\theta \qquad \cos\theta\,ds = -dy$$

وازآنجا :

$$W_{grav.} = -\int_{y_1}^{y_2} w\,dy = -w(y_2 - y_1) = -mg(y_2 - y_1) \qquad (۶-۷)$$

بنابراین کار نیروی وزن فقط بوضع ابتدائی وانتهائی جسم بستگی داشته تابع‌مسیر نیست . هرگاه این دو نقطه یعنی‌ابتدا و انتهای مسیردریك ارتفاع ازسطح مبدء باشند کار انجام شده توسط نیروی وزن صفر است .

ازآنجا که‌کارکل برابر تغییرانرژی جنبشی‌جسم است پس‌داریم :

$$W' + W_{grav.} = E_{k_2} - E_{k_1} \qquad W' - (mgy_2 - mgy_1) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right)$$

مقادیر $\frac{1}{2}mv_2^2$ و $\frac{1}{2}mv_1^2$ فقط تابع تندی انتهائی واولیه جسم است و مقادیر mgy_2 و mgy_1 فقط تابع ارتفاع ثانویه واولیه جسم میباشد. بنابراین هرگاه مقادیر mgy_2 و mgy_1 را از طرف «کار» بطرف «انرژی» منتقل‌کنیم داریم :

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgy_2 - mgy_1) \qquad (۷-۷)$$

درسمت‌چپ‌فرمول‌فوق فقط کار نیروی **P** بجای‌مانده است‌ودرسمت‌راست، عباراتی‌وجود دارندکه فقط تابع‌کمیات مربوط به انرژی (تندی ـ ارتفاع) اولیه وانتهائی‌جسم میباشد و بهیچوجه بامسیر طی‌شده توسّط‌جسم رابطه‌ای ندارند . کمیت mgy یعنی حاصلضرب وزن جسم درارتفاع‌آن ازسطح مبدء را **انرژی پتانسیل ثقلی** نامیده آنرا با E_p نمایش میدهیم

$$E_{p_{\text{ثقلی}}} = mgy \qquad (۸-۷)$$

پرانتز اول سمت راست فرمول ۷ـ۷ تغییرانرژی جنبشی و پرانتز دوم تغییرانرژی پتانسیل ثقلی‌است . میتوان فرمول ۷ـ۷ را بصورت زیر نوشت :

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1\right) \qquad (۹-۷)$$

مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل جسم را **انرژی مکانیکی** جسم مینامیم. پرانتزاول سمت راست فرمول ۷ـ۹ انرژی مکانیکی ثانویه جسم و پرانتز دوم انرژی مکانیکی اولیه آن میباشد. بنابراین میتوان گفت : **کارکلیه نیروهای خارجی‌غیر وزن، که برجسمی اثر میکنند برابر تغییرانرژی مکانیکی جسم است . هرگاه W' مثبت باشد انرژی مکانیکی** افزایش و چنانچه منفی باشد کاهش می‌یابد .

درحالت خاصی‌که تنها نیروی‌مؤثربرجسم، نیروی وزن‌است کار W' صفر و فرمول ۷ـ۹ بصورت زیر درمیآید:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1$$

دراینحال **انرژی مکانیکی‌کل ثابت‌مانده است** یعنی‌دوام و بقاء دارد . این،حالت خاصی از اصل‌بقاء **انرژی مکانیکی‌است .**

مثال ۱ـ مردی توپی بوزن ۱n را بحال سکون دردست دارد. آنرا درامتداد قائم بطرف بالا پرتاب میکند. دست این مرد ۷۵ سانتیمتر توپ را رانده آنرا پرتاب میکند . سرعت توپ‌درحین خروج ازدست شخص $15\frac{m}{sec}$ است. براساس قضیه‌کار ـ انرژی درباره حرکت این توپ بحث‌کنید . $\left(g = 10\frac{m}{sec^2}\right.$ فرض میشود $\left.\right)$

ابتدا درباره مرحله پرتاب بحث میکنیم. سطح مبدأ را وضع اولیه توپ میگیریم . پس $E_{k_1} = 0$ و $E_{p_1} = 0$ نقطه (۲) را در نقطه‌ای می‌گیریم‌که توپ از دست شخص خارج میشود خواهیم داشت :

$$E_{p_2} = mgy_2 = 1n \times 0/75m = 0/75j$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1n}{10m/sec^2} \times \left(\frac{15m}{sec}\right)^2 = 11/25 \text{ ژول}$$

فرض‌کنیم **p** نیروی وارده ازدست شخص برتوپ و W' کار این نیرو باشد . بنابراین W' برابر مجموع تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل جسم است یعنی برابر است با : $11/25j + 0/75j = 12j$

هرگاه نیروی **p** درتمام مدت پرتاب ثابت فرض شود داریم :

$$W' = p(y_2 - y_1)$$

وازآنجا نیروی **p** چنین بدست میآید :

$$p = \frac{W'}{y_2 - y_1} = \frac{12j}{0/75m} = 16n$$

اما بهرحال اعم ازاینکه **p** ثابت باشد یانباشد کارآن برابر ۱۲ ژول است .

اینك درحالتی بحث میکنیم که توپ ازدست شخص خارج شده است. هرگاه مقاومت هوا ناچیز باشد تنها نیروی مؤثر برجسم $w = mg$ است و انرژی مکانیکی کل، ثابت میماند. هرگاه سطح مبدء جدیدرا سطح د خروج توپ ازدست شخص، فرض کنیم محاسبات آسانتر است. این نقطه را نقطه (۱) فرض میکنیم خواهیم داشت :

$$E_{k_1} = 11/25j \qquad E_{p_1} = 0$$

$$E_{k_1} + E_{p_1} = 11/25j$$

یعنی انرژی کل مکانیکی همان ۱۱/۲۵ ژول است .

فرض کنیم بخواهیم تندی جسم را درارتفاع $6/25m$ بالای سطح مبدء پیدا کنیم . انرژی پتانسیل جسم دراین ارتفاع برابر ۶/۲۵ ژول است (چرا؟) لذا انرژی جنبشی آن ۵ ژول خواهد بود. تندی آن چنین بدست میآید :

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_k \quad \text{و} \quad v = \pm\sqrt{2E_k/m} = \pm 10\,m/sec$$

علامت $\pm$ مدلل میداردکه جسم ازاین نقطه دوبار عبورمیکند، یکی موقع بالارفتن ودیگری موقع پائین آمدن . انرژی پتانسیل جسم درهردوحال دراین سطح مقداریست ثابت لذا انرژی جنبشی ودرنتیجه تندی آن دراین سطح، ثابت خواهدبود. در موقع بالا رفتن علامت تندی مثبت ودرموقع پائین آمدن منفی است .

میخواهیم معین کنیم که جسم حداکثر تاچه ارتفاعی بالا میرود. درنقطه اوج، انرژی پتانسیل (نسبت به سطح مبدء دوم) ۱۱/۲۵ ژول و انرژی جنبشی برابر صفراست (چه $v = 0$) بآسانی معلوم میشودکه جسم تا ارتفاع $11/25m$ بالاتر از نقطه پرتاب صعودمیکند هرگاه سئوال شودکه درارتفاع $20m$ تندی جسم چقدر است جواب ما این است که چون حداکثر انرژی ۱۱/۲۵ ژول است و انرژی لازم برای اینکه جسم بارتفاع $20m$ برسد

برابر j ۲۰ است پس‌جسم، انرژی لازم برای رسیدن باین ارتفاع را ندارد .

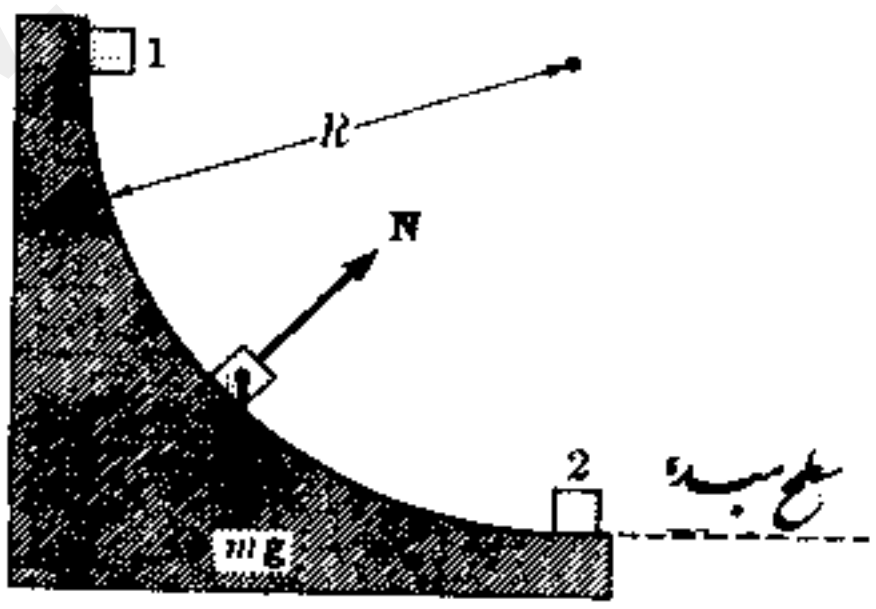
مثال ۲ـ جسمی برمسیر ربع دایره‌ای مطابق شکل ۷ـ۷ لـغزیده پائین می‌آید. هرگاه نیروی اصطکاك وجود نداشته باشد تندی جسم را در انتهـای مسیر بدست آورید . حرکت این جسم عیناً مانند حرکت جسمی است که به طنابی به‌طول **R** آویزان باشد، آنرا بالا آورده وقتی طناب بحال افقی‌قرارگرفت جسم را رهاکنیم (انتهای دیگرطناب مفروض درنقطه O ثابت است) .

دراینجا نمیتوان ازمعـادله حرکت باشتاب ثـابت استفـاده نمود. (زیرا شیب سطح تکیه‌گاه ثابت نیست بلکه تدریجاً کم شده بصفرمیرسد) هرگـاه اصطکاك نباشد نیروی مؤثر برجسم علاوه بروزن ، نیروی **N** است که ازطرف سطح‌تکیه‌گاه برجسم وارد میشود. امتداد این نیرو همواره برسطح عمود است. لذاکار انجام شده توسط‌آن برابر صفراست. هرگاه نقطه بالائی را (۱) ونقطه پائینی‌را (۲) وسطح مبده را نیز در نقطه (۲) فرض‌کنیم داریم $y_۲ = ۰$ و $y_۱ = R$ لذا میتوان نوشت :

$$E_{k۲} + E_{p۲} = E_{k۱} + E_{p۱}$$

$$\frac{۱}{۲} m v_۲^۲ + ۰ = ۰ + mgR$$

$$v_۲ = \pm \sqrt{۲gR}$$



شکل ۷ـ۶ جسمی‌که برمسیر منحنی بدون اصطکاکی بپائین میلغزد

یعنی‌مثل‌این است که جسم،ازارتفاع **R** سقوط کرده‌است (اکنون مفهوم $\pm$ چیست؟) هرگاه $R = ۱m$ فرض شود خواهیم داشت :

$$v = \pm \sqrt{۲ \times ۹/۸ (m/sec^۲) \times ۱m} = \pm ۴/۴۳ m/sec$$

مثال ۳ـ فرض کنیم جسمی بجرم $0/5kgm$ روی ربع دایره‌ای بشعاع $1m$ نظیر مثال قبل بپائین بلغزد ولی درانتهای‌مسیرسرعت‌آن $3m/sec$ شود کارنیروی اصطکاك مؤثر برجسم را پیدا کنید .

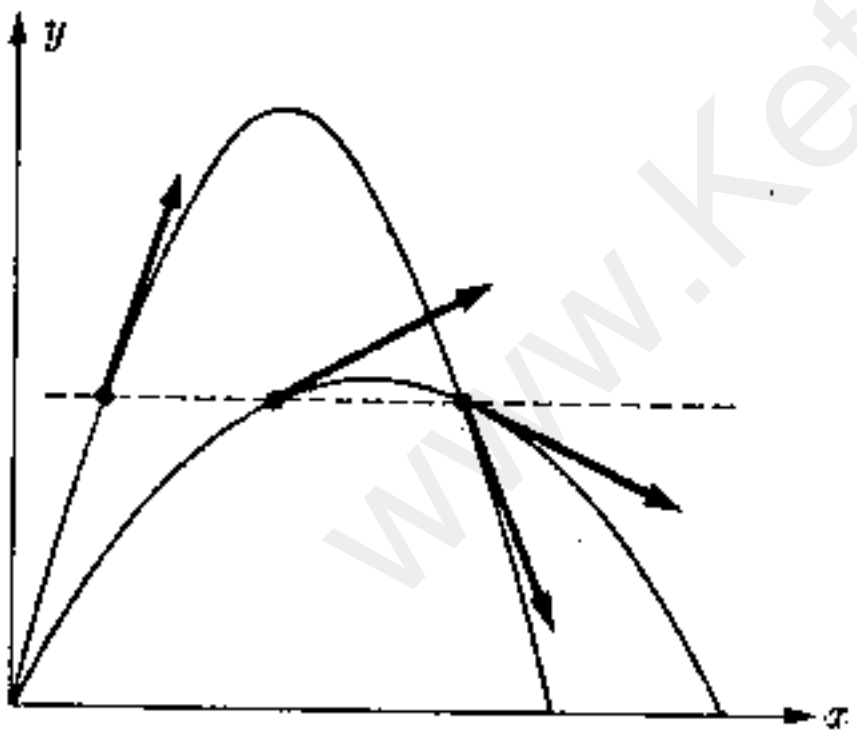
دراینحالت $W'=W_f$ خواهیم داشت :

$$W_f=\left(\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2\right)+(mgy_2-mgy_1)=$$

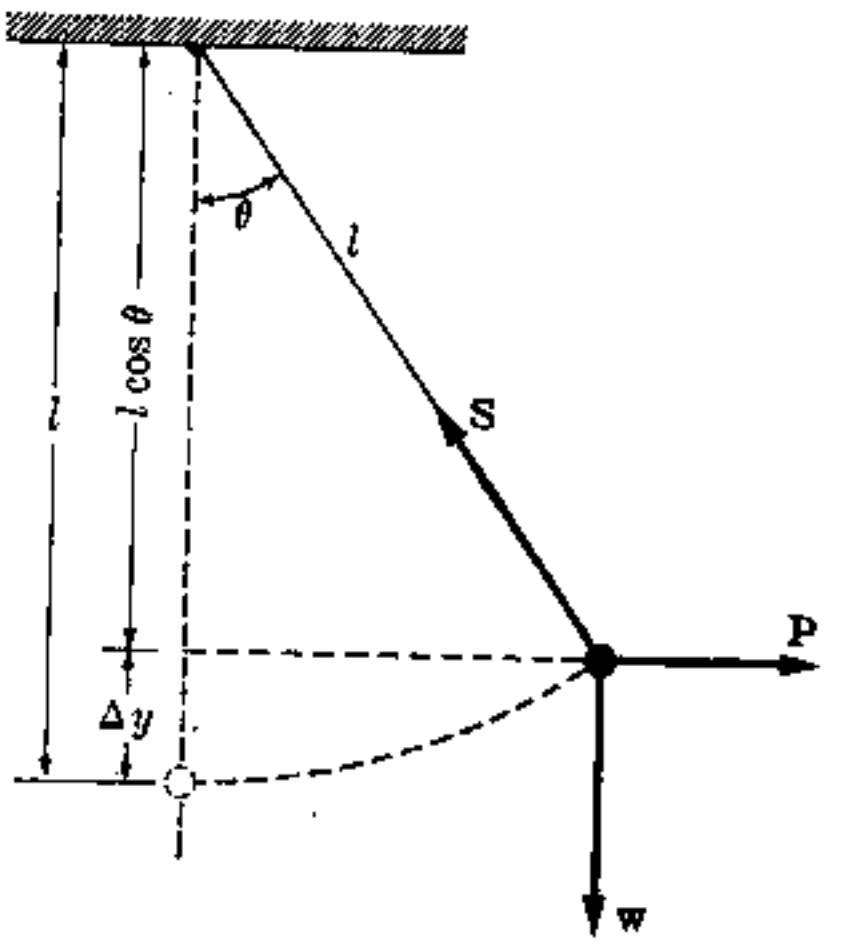
$$=\left(\frac{1}{2}\times 0/5kgm\times 9\frac{m^2}{sec^2}-0\right)+(0-0/5kgm\times 9/8m/sec^2\times 1m)=$$

$$=2/25j-4/9j=-2/65j$$

کار نیروی اصطکاك $2/65j-$ است وانرژی مکانیکی‌کل باندازه $2/65j$ کاهش یافته‌است. پس‌وقتی نیروی اصطکاك برجسمی اثرکند، انرژی مکانیکی‌آن ثابت نمی‌ماند .



شکل ۷ـ۸ وقتی‌تندی اولیه پرتاب یکی‌باشد درارتفاع معین تندی پرتابه ها روی مسیر های مختلف یکی‌است .



شکل ۷ـ۹ $\Delta y=l(1-cos\theta)$

مثال ۴ـ وقتی مقاومت هوا ناچیز فرض شود تنها نیروی مؤثربرپرتابه، وزن‌آن است وانرژی مکانیکی‌آن ثابت می‌ماند. درشکل ۷ـ۸ مسیر دوپرتابه نشانداده شده است‌که تندی اولیه پرتاب (وبنابراین انرژی مکانیکی) درهردویکسان بوده ولی زوایای پرتاب اولیه آنها باهم متفاوت‌اند. درارتفاع‌معین، انرژی پتانسیل پرتابه‌ها اعم ازاینکه بالاروند یاپائین آیند ونیز برهرمسیری‌که واقع باشند یکی است. پس انرژی جنبشی‌آنهانیزمساوی

وتندی همه‌آنها یکسان است.

مثال ۵ـ جسم کوچکی‌بوزن **w** بنخی بطول **l** آویزان است (شکل۷ـ۹) نیروی افقی ومتغیر **p** که از صفر شروع بافزایش تدریجی میکند جسم را بطرف راست میکشد و آنرا باندازه θ ازوضع تعادل منحرف میکند. کار **p** را حساب‌کنید.

کار W' مجموعه نیروهای خارجی باید برابر مجموع تغییر انرژی جنبشی وتغییر انرژی پتانسیل جسم باشد یعنی :

$$W = W_p + W_T = \Delta E_k + \Delta E_p$$

چون **T** برمسیر تغییر مکان عمودست پس $W_T = 0$ وچون جسم بآرامی وبتدریج براست‌کشیده شده تغییر انرژی جنبشی نیز صفر است پس :

$$W_p = \Delta E_p = w\Delta y$$

Δy ارتفاعی است‌که جسم تاآن ارتفاع بالارفته است . از شکل ۷ـ۹ بآسانی پیداست‌که $\Delta y = l(1-\cos\theta)$ یعنی :

$$W_p = wl(1-\cos\theta)$$

بیاد دارید‌که در قسمت۷ـ۲ نیز همین مسئله‌را با استفاده از $W_p = \int p\cos\theta ds$ محاسبه‌کردیم . ازهردو راه بیك نتیجه رسیدیم ولی چنانچه می بینید استفاده ازقضیه کار ـ انرژی راه بسیار آسانتری است .

تا اینجا فرض براین بودکه اختلاف ارتفاع، کسم و نیروی جاذبه ثابت‌است . اینك صورت‌کلی‌تر قضیه را مورد بحث قرار میدهیم. نیروی **w** درشکل ۷ـ۶ نیروی جاذبه‌ایست که اززمین برجسم وارد میشود و ازفرمول زیر بدست میآید :

$$G\frac{mm_E}{r^2}$$

دراین فرمول m_E جرم زمین و **r** فاصله جسم ازمرکز زمین است. وقتی **r** ازمقدار r_1 تا r_2 تغییرکند کارنیروی جاذبه برابر است با :

$$W_{grav} = -Gmm_E\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \left(\frac{Gmm_E}{r_2} - \frac{Gmm_E}{r_1}\right)$$

هرگاه کار فوق را برابر تغییر انرژی جنبشی قرارداده آنرا مرتب‌کنیم،فرمول

۷ـ۹ بصورت زیر درمیآید :

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{Gmm_E}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{Gmm_E}{r_1}\right)$$

مقدار $[-G(mm_E/r)]$ معرف اندازه انرژی پتانسیل جسمی بجرم m واقع در میدان جاذبه زمین است یعنی :

$$E_{p(\text{ثقلی})} = -G\frac{mm_E}{r} \qquad (۷ـ۱۰)$$

وانرژی مکانیکی کل جسم، مجموع انرژی جنبشی وپتانسیل جسم است یعنی :

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_E}{r}$$

هرگاه نیروی مؤثر برجسم، فقط وزن آن باشد، جمع انرژی جنبشی و پتانسیل آن مقداریست ثابت . یعنی تابع اصل بقاء انرژی است .

مثال ـ بااستفاده ازاصل بقاء انرژی تعیین کنید جسمی را باچه سرعتی درامتدادقائم پرتاب کنند تابفاصله R ازسطح زمین بالا رود. مقاومت هوارا ناچیزفرض کنید .

هرگاه v_1 سرعت اولیه باشد $r_1 = R$ و $r_2 = 2R$ و $v_2 = 0$ خواهیم داشت :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mm_E}{R} = 0 - \frac{Gmm_E}{R}$$

$$v_1^2 = \frac{Gm_E}{R}$$

که بانتیجه حاصله ازحل مثال ۸ درقسمت ۵ـ۶ کاملا موافق است .

ممکن است درنظر اول منفی، بودن انرژی پتانسیل عجیب بنظرمیآید . دلیل منفی بودن، نحوه انتخاب سطح مبدء است. به بینیم انرژی پتانسیل درروی چه سطحی صفر است. هرگاه درفرمول ۷ـ۱۰ مقدار E_p را برابرصفر قراردهیم $r = \infty$ میشود .

یعنی وقتی جسمی درفاصله بینهایت از زمین قراردارد انرژی پتانسیل آن صفر فرض میشود. هرچه جسم بزمین نزدیکتر شود انرژی پتانسیل آن کاهش مییابد بنابراین مقدارآن درهرفاصله محدود، منفی خواهد شد. تغییرانرژی پتانسیل جسمی وقتی ازنقطه معین

به‌نقطه دیگر میرود نسبت بهر سطح مبده مقداریست ثابت وهمیشه تغییرانرژی پتانسیل‌دارای اهمیت‌است، نه‌اندازه‌آن دریك ارتفاع معین .

بعلاوه نشانداديم‌که فرمول عمومی تغییر انرژی پتانسیل، وقتی‌تغییر ارتفاع زیادنباشد بصورت فرمول ۷ـ۶ خلاصه میشود . هرگاه فاصله دونقطه فرضی ازمرکززمین r_1 و r_2 بوده جسمی بجرم m ازنقطه اول به‌نقطه دوم برود داریم :

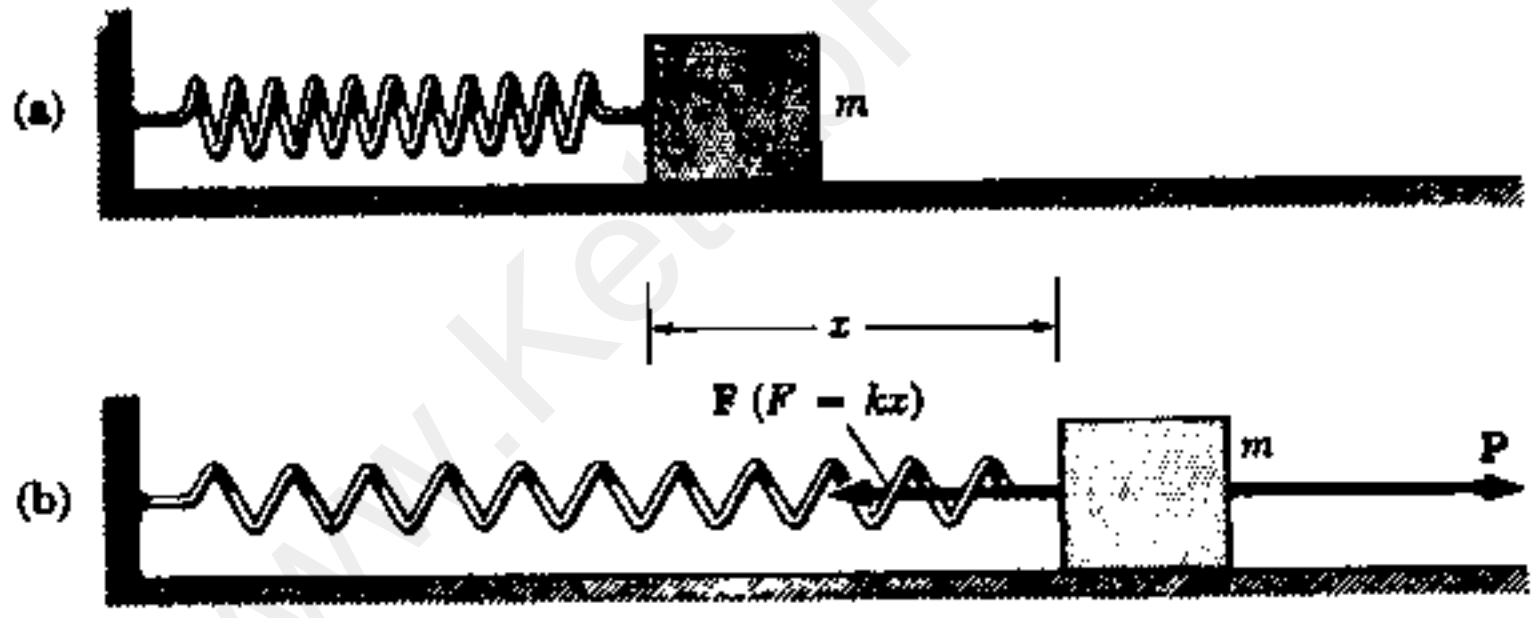
$$E_{p_2}-E_{p_1}=-G\frac{mm_E}{r_2}-\left(-G\frac{mm_E}{r_1}\right)=Gmm_E\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=$$

$$=Gmm_E\frac{r_2-r_1}{r_2r_1}$$

هرگاه فاصله دونقطه مذکور ازسطح زمین y_1 و y_2 فرض شود خواهیم داشت :

$$r_2-r_1=y_2-y_1$$

$$E_{p_2}-E_{p_1}=\frac{Gm_1m_E}{R^2}(y_2-y_1)$$



شکل۷ـ۱۰ وقتی‌نیروی p فنری‌را بطرف راست بکشد در فنر کشش F بوجود میآیدکه ازرابطه F = kx بدست‌میآید

هرگاه y_1 و y_2 در برابر R کوچك باشند حاصلضرب r_1r_2 تقریباً برابر مجذور شعاع زمین‌یعنی R^2 میشود وفرمول تغییر انرژی پتانسیل چنین میشود :

اما داریم :

$$G\frac{m_E}{R^2}=g$$

که درآن g شتاب ثقل زمین است. پس میتوان نوشت :

$$E_{p_2}-E_{p_1}=mg(y_2-y_1)$$

این فرمول را قبلا نیز درموقع بحث درتغییرات g نیز بدست‌آوردیم .

۷ـ۵ ، انرژی پتانسیل الاستیکی

درشکل۷ـ۱۰جسمی بجرم m نشانداده شده است که برسطح افقی قراردارد. یکطرف فنری باین جسم متصل وانتهای دیگرآن بدیواری وصل است. مبدء مختصات را، محل‌قرار گرفتن جسم درحالیکه فنر آزاداست، فرض میکنیم. (ش ۷ـ۱۰a) فرض کنیم نیروی P که ازخارج برفنر اثرمیکندباندازه‌ای باشدکه‌بتواند تغییر طول درآن ایجادکند بمحض‌اینکه اولین تغییرطول جزئی درفنرایجاد شد فنرنیزبرجسم نیروی F وارد میآورد. جهت‌نیروی F مخالف جهت x (افزایش طول فنر) وبنابراین مخالف جهت p است . نیروی F را نیروی‌ارتجاعی فنرمینامند. هرگاه P کاهش یافته‌یا صفرشود نیروی F باعث بازگشت فنر بوضع اول میشود و«ارتجاع» یعنی «بازگشت». تجربیات Robort Hooke در۱۶۷۸ درباره رابطه x تغییرطول فنر ونیروی F به‌نتیجه رسیدکه بصورت‌زیربیان میشود. هرگاه تغییرطول x ازحد معینی تجاوزنکند نیروی ارتجاعی متناسب باتغییرطول فنراست ویا :

$$F = kx \qquad (۱۱-۷)$$

که بقانون هوك موسوم است. ضریب تناسب k را ضریب ثابت‌فنر یا ضریب سختی مینامند Stiffness coefficient هرگاه کارنیروی ارتجاعی را به W_{el} نشان دهیم وقتی فنرازطول x_1 بطول x_2 میرسد خواهیم داشت:

$$W_{el} = -\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{x_1}^{x_2} F\cos\theta\, dx$$

جهت F باجهت dx مخالف‌است‌بنابراین $\cos\theta = -1$ خواهد شد لذا داریم

$$W_{el} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx$$

ویا :

$$W_{el} = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

اگر W′ کارنیروی خارجی P فرض شود. هرگاه کار کل را برابر تغییر انرژی جنبشی قراردهیم خواهیم داشت:

$$W' + W_{el} = \Delta Ek$$

$$W' - \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right)$$

مقادیر $\frac{1}{2}kx_2^2$ و $\frac{1}{2}kx_1^2$ فقط تابع وضع اولیه وانتهائی جسم است وبخصوص تابع نحوه تغییرطول فنر وشکل حرکت جسم نیست بنابراین آنهارا ازسمت «کار» درفرمول به سمت «انرژی» منتقل میکنیم. داریم

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + \left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) \qquad (۱۲-۷)$$

مقدار $\frac{1}{2}kx^2$ یعنی نصف حاصلضرب ضریب ثابت فنر در مجذور تغییر طول را **انرژی پتانسیل الاستیکی** نامیده میشود (E_p علامت انرژی پتانسیل است. هرگاه انرژی پتانسیل ثقلی یا ارتجاعی باشد آنرا بصورت زیر که مشخص‌تراست مینویسیم)

$$E_{p\,(\text{الاستیکی})} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۱۳-۷)$$

نتیجه میشودکار W' نیروی p برابر مجموع تغییرات انرژی جنبشی وانرژی پتانسیل ـ الاستیکی جسم است فرمول ۷ـ۱۲ را چنین می‌نویسیم

$$W' = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2\right)$$

مجموع انرژی جنبشی وپتانسیل جسم،انرژی مکانیکی کل آن نامیده میشود ومیتوان گفت : **کارکلیه نیروهای‌مؤثر برجسم‌باستثناء نیروی‌الاستیکی، برابر تغییر انرژی مکانیکی کل جسم است .**

هرگاه W' مثبت باشد ، انرژی مکانیکی جسم افزایش‌یافته وقتی منفی باشد **کاهش** مییابد. وقتی W' صفراست انرژی مکانیکی جسم ثابت میماند .

مثال ۱ـ ضریب ثابت k درفنرشکل ۷ـ۱۰ برابر $24\,n/m$ وجرم جسم $4\,kg$ است. درابتدا جسم بحال سکون وفنر آزاد است. فرض کنید اصطکاك صفراست ونیروی‌ثابت p برابر $10\,n$ برجسم‌اثر کند. پس‌ازطی فاصله $0/5\,m$ تندی جسم چقدر است؟چون‌نیروی ارتجاعی مؤثربرجسم تغییرمیکند. برآیند نیروها نیز متغییراست ونمیتوان ازمعادله‌حرکت متشابه‌التغیر استفاده‌کرد. بنابرقضیه کار انرژی میتوان نوشت

$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p$$

$$۱۰n \times ۰/۵m = \left(\frac{۱}{۲} \times ۴kgm \times v'^{۲}_{۲} - ۰\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times ۲۴\frac{n}{m} \times ۰/۲۵m^{۲} - ۰\right)$$

$$v_{۲}' = ۱m/sec$$

مثال ۲ـ فرض کنیداثر نیروی **p** پس ازطی فاصله ۰/۵m قطع‌شود. انرژی‌جنبشی دراینحال $\frac{۱}{۲}mv^{۲} = ۲j$ وانرژی پتانسیل $\frac{۱}{۲}kx^{۲} = ۳j$ لذا انرژی مکانیکی کل۵jاست.

(برابر کارنیروی **p**) وقتی جسم ساکن میشود انرژی جنبشی آن صفر و در نتیجه انرژی پتانسیل آن ۵ ژول‌است‌لذا :

$$\frac{۱}{۲}kx^{۲}_{max} = ۵j \qquad x_{max} = ۰/۷۰۷m$$

۷ـ۶ ، نیروهای تلف‌کننده و دخیره‌کننده انرژی

وقتی جسمی ازارتفاع معینی‌بالای افق، بارتفاع دیگری بالا یا پائین رود، کارنیروی وزن تابع مسیر نیست وفقط تابع وضع ابتدائی وانتهائی جسم است . دراین‌حال، کاربرابر اختلاف‌دومقدار اولیه وثانویه تابعی بنام **انرژی پتانسیل ثقلی است.** وقتی فقط نیروی وزن برجسمی اثر کند انرژی مکانیکی کل (جمع انرژی جنبشی و پتانسیل) ثابت است . یعنی نیروی وزن **ذخیره‌کننده انرژی** است. وقتی جسم بالامیرود کارنیروی وزن در ازاء کاهش انرژی‌جنبشی‌انجام‌میشودووقتی‌جسم‌مجدداً پائین آیدکارنیروی وزن‌باعث‌افزایش‌انرژی‌جنبشی میشود یعنی میتوان گفت کاریکه وزن درموقع بالارفتن‌انجام داده **ذخیره شده** وموقع پائین آمدن مجدداً بما پس داده است. پس دادن کامل کار دریافتی از مهمترین خواص نیروی وزن است .

وقتی‌جسمی‌که بانتهای فنری وصل است تغییر مکان یابد، کارنیروی ارتجاعی فنر نیز تابع نحوه تغییرمکان جسم نیست وفقط تابع اختلاف اندازه ابتدائی وانتهائی تابعی‌است‌که تابع **انرژی پتانسیل ارتجاعی** نامیده میشود. هرگاه نیروی ارتجاعی فنرتنها نیروی مؤثر برجسم باشد ، مجموع انرژی جنبشی جسم وانرژی پتانسیل ارتجاعی فنرثابت میماند. پس نیروی ارتجاعی فنرنیز نیروی ذخیره‌کننده انرژی است. وقتی جسم طوری حرکت‌کند که طول فنرافزایش یابد درازاء کاهش انرژی جنبشی، نیروی ارتجاعی فنرکار انجام میدهد . اما همینکه جسم درجهتی شروع بحرکت‌کندکه طول فنرکاهش یابد، کارنیروی ارتجاعی‌فنر باعث افزایش انرژی جنبشی میشود. یعنی کاردریافتی را پس میدهد.می‌بینیم که‌کارنیروهای ذخیره‌کننده انرژی، خواص‌زیر را دارا است.

(۱) تابع مسیر نیست
(۲) اندازه آن برابر تفاضل دومقدار ابتدائی وانتهائی تابعی بنام تابع انرژی میباشد.
(۳) برگشت پذیر کامل است .

درمقابل نیروهای ذخیره کننده انرژی ، نیروی اصطکاك (نیروی مقاوم وارده ازسطح تکیه گاه برجسم متحرك) قراردارد. کار نیروی اصطکاك تابع مسیراست. هرچه مسیر طویلتر باشد کار نیروی اصطکاك بیشتراست. تابعی وجود ندارد که تفاوت دووضع ابتدائی و انتهائی آن کار نیروی اصطکاك باشد. وقتی جسمی راکه ازنقطه‌ای بنقطه دیگر برده‌ایم مجدداً بجای اول بازگردانیم نه تنها کار نیروی اصطکاك درجابجائی اول را بدست نمیآوریم بلکه ناچاریم برای جابجائی دوم نیز مقداری کار بخاطروجود اصطکاك انجام دهیم. بنابراین کار نیروی اصطکاك برگشت پذیر نیست و بهمین جهت نیروی اصطکاك را نیروی **تلف‌کننده** انرژی مینامند . **انرژی مکانیکی جسم فقط وقتی ثابت است که نیروهای مؤثربرآن فقط ازنوع نیروهای ذخیره‌کننده انرژی باشند .**

بعداً خواهیم دید که وقتی نیروی اصطکاك برجسمی اثرمیکند نوع دیگری انرژی از تبدیل انرژی مکانیکی حاصل میشود واصل بقاء انرژی بصورت کلی‌تری بیان میشود. بطوریکه علاوه برانرژی جنبشی وپتانسیل انواع دیگر انرژی رانیزشامل باشد. یعنی انرژی کل (اعم ازمکانیکی وغیره) جمعاً ثابت میماند. دراین باره بعداً بتفصیل صحبت خواهیم کرد .

مثال ـ مثال ۳ درقسمت ۷ـ۴ حرکت جسمی رانشان میدهد که نیروی اصطکاك یعنی نیروی تلف‌کننده انرژی نیز برآن وارد میشود. انرژی پتانسیل اولیه جسم **۴/۹j** وانرژی جنبشی جسم درانتهای مسیر ۲/۲۵ ژول است. کار نیروی اصطلاك **۲/۶۵j** — میباشد. مقداری انرژی برابر ۲/۶۵ ژول درموقع لغزش جسم بصورتی دیگر ظاهر میشود. مجموع این انرژی وانرژی جنبشی جسم درانتهای مسیر، برابر انرژی مکانیکی اولیه جسم است وانرژی کل جسم ثابت مانده است.

۷ـ۷ ، کار داخلی

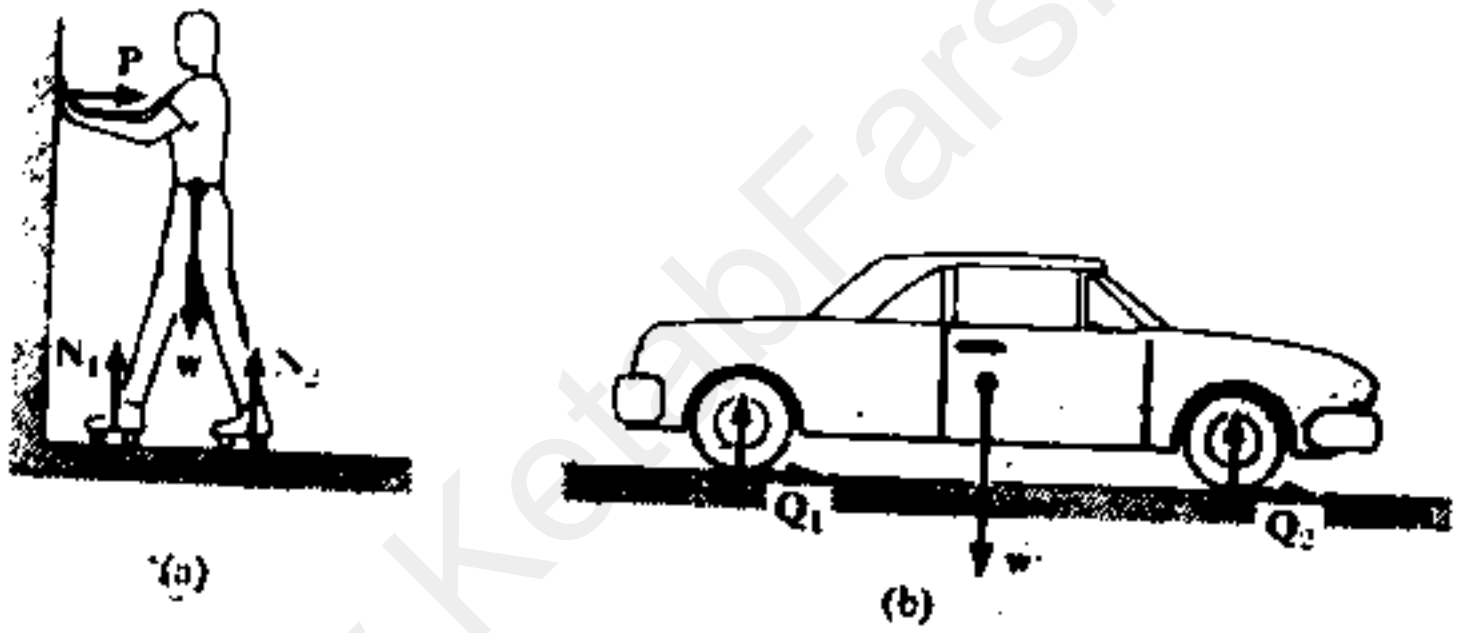
درشکل ۷ـ۱۱ (a) مردی نشانداده شده که کفش سکیت بپای داردو برسطح بدون اصطکاکی مقابل دیوارصلبی ایستاده است. نیروهای خارجی وارد برشخص عبارتنداز **w** وزن ، نیروهای N_1 و N_2 که ازتکیه گاه براو واردمیشود ونیروی **p** وارده ازدیوار (نیروی اخیرعکس‌العمل نیروئی است که شخص بردیوار وارد میکند.) کار نیروهای **N** و**w** چون برامتداد حرکت عمودا ندصفراست. چون نیروی **p** تنها نیروئی است که درامتدادافقی اثرمیکندلذا باعث میشود که دستگاه درامتداد افقی دارای شتاب شود . اما **کار نیروی P صفراست چون نقطه اثرآن جابجا**

نمونه . می‌بینیم که بامسئله‌عجیبی روبروهستیم‌یعنی نیروئی بجسمی شتاب میدهددرحالیکه **کارانجام شده توسط این نیرو صفراست** .

در چنین وضعی میتوان **کارداخلی** را تعریف‌کرد . با وجود آنکه نیروهای داخلی درایجاد شتاب نقشی‌ندارند معذالك چون نقطه اثرآنها متغیر است عامل انجام کارهستند . یعنی نیروهای درونی که در عضلات شخص بوجودمیآیند کارانجام میدهند. وقتی بازو وساعد شخص از هم بازمیشود مانند فنر متراکمی است که انبساط مییابد .) نقطه اثر این نیروها دریك‌جهت تغییرمکان میابندوکارداخلی W_i مخالف صفراست. این‌کار باعث افزایش انرژی جنبشی جسم میشود .

هرگاه جسم تحت تأثیر نیروهای داخلی وخارجی بحرکت درآید W کارکل یعنی مجموع‌کار نیروهای‌خارجی W_e وکارنیروهای‌داخلی W_i باعث‌تغییرانرژی‌جنبشی جسم‌میشود

$$W = W_e + W_i = \Delta E_k$$



شکل ۷ـ۱ (a) نیروهای داخلی مؤثر برمردی که بادست بدیوار نیرو وارد میکند. کارا ین نیروصفر است (b) نیروهای خارجی مؤثر براتومبیل . کاراین نیروها صفراست . درهر دو حالت کارنیروهای داخلی عامل افزایش انرژی جنبشی است

وقتی اتومبیلی حرکت تند شونده دارد ازاین قضیه میتوان استفاده نمود . قسمتی از لاستیك که‌بزمین متکی است نیروئی برزمین‌روبعقب وارد میکند و عکس‌العمل این نیروها که از زمین برلاستیك وارد میشود درشکل ۷ـ۱۱ (b) با Q_1 و Q_2 نشانداده شده است . این‌نیروها نیروهای‌خارجی وارده براتومبیل هستند وباعث ایجاد شتاب‌دراتومبیل میشوند. چون نقطه اثرنیروهای Q_1 و Q_2 حرکت نمی‌کند کار این نیروها صفراست. دراثرانفجار درون سیلندر ، نیروهای داخلی متعددی درون اتومبیل‌بوجود میآیدکه‌بعضی‌ازآنها کار انجام میدهند دراینجا نیز W_i کارنیروهای داخلی باعث افزایش انرژی جنبشی میشود .

۷ـ۸ ، انرژی پتانسیل‌داخلی

هرگاه نیروهای‌خارجی وارد برجسمی ازنوع ذخیره‌کننده انرژی باشند (ثقلی یا

الاستیکی) کاراین نیروها را میتوان بسمت «انرژی» فرمول کار ـ انرژی منتقل کرده آنها را انرژی پتانسیل خارجی نام نهاد. دربسیاری ازموارد نیروهای داخلی بستگی به فاصله بین دوذره مجاور دارند. درچنین صورتی کارنیروهای داخلی فقط تابع وضع ابتدائی وانتهائی این نیروهاست وبه‌نحوه حرکت بستگی ندارد کاراین نیروها رانیزمیتوان بسمت «انرژی» فرمول‌منتقل نموده آنرا **انرژی پتانسیل‌داخلی** نام نهاد . هرگاه E_p^i و E_p^e بترتیب‌انرژی پتانسیل خارجی وداخلی نامیده شود فرمول کارانرژی بصورت زیر درمیآید .

$$W' = \Delta E_k + \Delta E_p^e + \Delta E_p^i \qquad (۱۴-۷)$$

اینك انرژی مکانیکی کل جسم‌شامل انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل داخلی وانرژی پتانسیل خارجی است. هرگاه W' کارنیروهای خارجی غیروزن برابر صفر باشد انرژی مکانیکی کل ثابت میماند.

مثال ۱ـ فرض‌کنید دونقطه مادی درنقطه‌ای بسیار دور از کلیه اجرام‌مادی دیگر قراردارند نیروی‌خارجی براین دونقطه مادی وارد نمیشود. بنابراین کارنیروهای خارجی صفراست. دونقطه مذکور انرژی پتانسیل خارجی نیزندارند . نیروی جاذبه‌ای بین این دونقطه مادی وجود داردکه اندازه آن فقط تابع وضع این دونقطه نسبت بیکدیگر است . بنابراین میتوان گفت دستگاه دارای انرژی‌پتانسیل داخلی است. فرض‌کنید دونقطه مذکور در اثر جاذبه بطرف یکدیگر حرکت کنند . انرژی جنبشی دستگاه افزایش یافته انرژی پتانسیل داخلی آن‌کم میشود . مجموع انرژی جنبشی وانرژی‌پتانسیل داخلی ثابت میماند.

تنها نمیتوان بکمك اصل بقاء انرژی، سرعت هریك ازدو نقطه را تعیین نمود. اصل بقاءاندازه‌حرکت‌نیز دریافتن‌اندازه سرعت‌بما کمك میکند. بنابراین مسئله در فصل بعد مورد بحث قرارخواهدگرفت .

مثال ۲ـ درقسمت ۷ـ۵ انرژی پتانسیل‌خارجی جسمی راکه تحت تأثیر کشش‌فنری قرارداشت حساب‌کردیم این نیرو نیروی خارجی‌واردبرجسم و $\frac{1}{2}kx^2$ انرژی پتانسیل بطور آنرا **انرژی پتانسیل الاستیکی خارجی** جسم مینامیم .

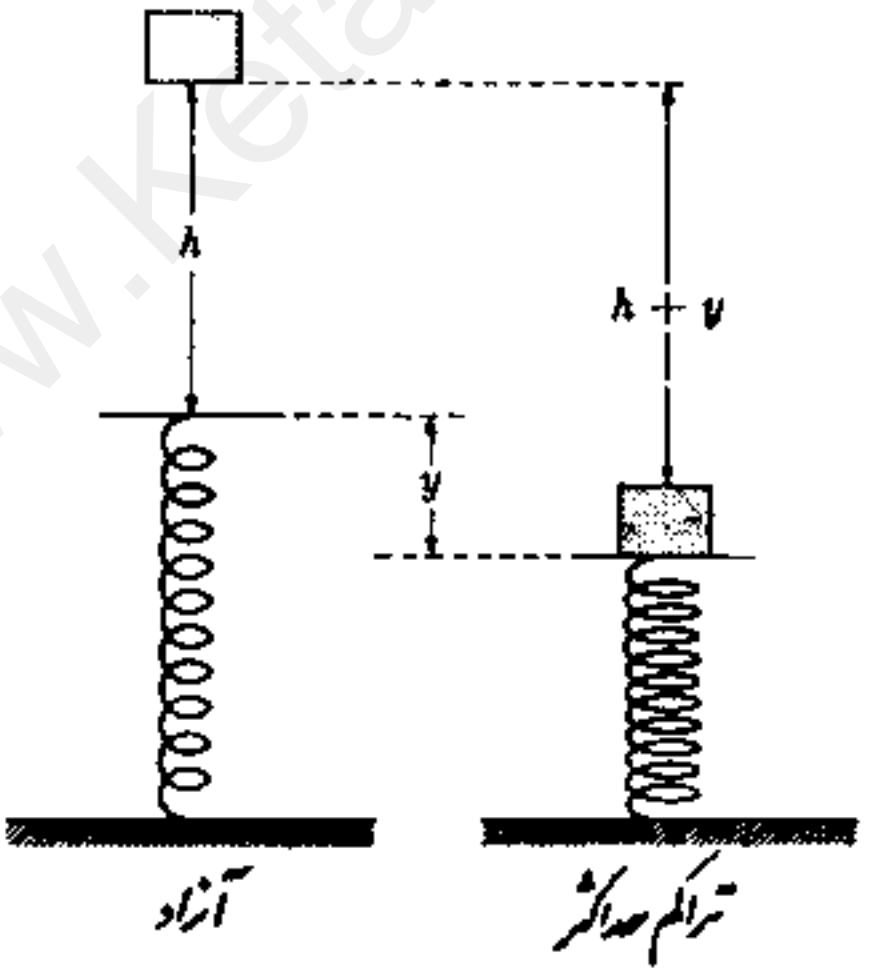
اکنون خود فنر را مورد نظرقرار میدهیم . فنر از عده بیشماری ملکول تشکیل‌شده است‌که بریکدیگر نیروی داخلی وارد میکنند وقتی‌فنر کشیده میشود وضع نسبی ملکولها تغییرمیکند. نیروهای بین ملکولی فقط تابع فاصله بین ملکولی ملکولها هستند پس‌موقعیکه فنر کشیده شوددارای انرژی پتانسیل داخلی میشود برای‌محاسبه این انرژی، فرض‌کنیدفنر را ازحالت آزاد بتدریج بادو نیروی مساوی ومختلف‌الجهت بدوطرف بکشیم: کاراین‌نیروها

برابر $\frac{۱}{۲}kx^۲$ است که درآن x ازدیاد طول فنردرنتیجه تأثیر این نیروهاست . هرگاه این کار را درسمت چپ فرمول نگاهداریم میتوان گفت که این‌کار W' یعنی کار نیروهای خارجی است . (فرمول ۷ـ۱۴). در انرژی پتانسیل خارجی و انرژی جنبشی فنر تغییری حاصل نشده است. هرگاه انرژی پتانسیل داخلی فنررا وقتی $x=۰$ است صفر فرض کنیم تغییر انرژی پتانسیل داخلی پس ازکشیده‌شدن (که‌دراین حال برابرتغییر انرژی پتانسیل کل است) برابر انرژی پتانسیل انتهائی E_p' است بنابراین خواهیم داشت :

$$W'=\Delta E_p'=E_p' \qquad E_p'=\frac{۱}{۲}kx^۲$$

لذا انرژی پتانسیل داخلی فنری‌که کشیده شده است برابراست‌با $\frac{۱}{۲}kx^۲$ ، دیده میشودکه انرژی‌پتانسیل داخلی را میتوان بدون‌دردست داشتن‌اطلاعات زیاد درباره نیروهای داخلی‌حساب‌کرد.

مثال ۳ـ جسمی بجرم m که درابتدا بحال سکون است ازارتفاع h برروی فنری سقوط میکند وآنرا باندازه y متراکم مینماید (شکل ۷ـ۱۲) هرگاه ضریب تراکم فنر k باشد ماکزیموم y را حساب‌کنید.



شکل ۷ـ۱۲ ارتفاع سقوط کل برابر $h+y$ است

دراین جسم میتوان ازاصل بقاء انرژی مکانیکی استفاده نمود. درلحظه‌ایکه جسم‌رها میشود ونیز در لحظه‌ای که تراکم حداکثر مقدار خود را داراست انرژی جنبشی برابر صفر است. بنابراین‌کاهش انرژی پتانسیل ثقلی جسم برابرافزایش انرژی پتانسیل ارتجاعی

فنراست. ازشکل ۷ـ۱۲ پیداست که ارتفاع سقوط $h+y$ است. بنابراین داریم :

$$mg(h+y)=\frac{1}{2}ky^2 \quad \text{و یا} \quad y^2-\frac{2mg}{k}y-\frac{2mgh}{k}=0$$

$$y=\frac{1}{2}\left[\frac{2mg}{K} \pm \sqrt{(2mg/k)^2+8mgh/k}\right]$$

۸ـ۷ ، توان

درتعریف کار، زمان انجام کارهیچگونه نقشی ندارد. وقتی باری بارتفاع معینی بالا میرود، مقدار کار مشخصی انجام گرفته است. خواه این کار دریك ثانیه وخواه دریکدقیقه یا یکسال انجام گرفته باشد. دربسیاری ازموارد لازم است سرعت انجام کار درنظر گرفته‌شود. مقدارکاری که یکدستگاه درواحد زمان انجام میدهد **توان** دستگاه نامیده میشود.

هرگاه درزمان Δt کار ΔW توسط دستگاهی انجام شود تـوان متوسط P چنین تعریف‌میشود .

$$\text{توان متوسط} = \frac{\text{کار انجام شده}}{\text{زمان انجام کار}}$$

$$P=\frac{\Delta w}{\Delta t}$$

توان لحظه‌ای P حد $\frac{\Delta W}{\Delta t}$ است وقتی Δt بسمت صفر میل کندیعنی:

$$P=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{dW}{dt} \qquad (۱۵-۷)$$

واحدتوان‌دردستگاه mks ژول برثانیه‌است‌که **وات watt** (۱W) نامیده میشود . چون این واحد بسیار کوچك است کیلو وات برابر 10^3 وات ($1kw=10^2w$) و مگاوات ($Mw=10^6w$) نیز معمول شده است. واحد توان دردستگاه cgs ارگ‌برثانیه است‌که اسم خاصی ندارد .

دردستگاه‌صنعتی‌انگلیسی واحدتوان ftlb/sec است‌ولی چون‌این‌واحد بسیار کوچك استواحددیگری‌بنام‌اسب که‌برابر $33000\,ftlb/min = 550\,ftlb/sec$ است‌رایج‌میباشد

یعنی موتوری بتوان یك اسب میتواند باری بوزن سی وسه هزار پوند را در هر دقیقه یك فوت بالا برد .

بعضی بغلط تصورمی‌کنندکه وات وکیلووات واحدهای الکتریکی‌واسب واحدمکانیکی میباشد. اما چنین نیست. میتوان توان مصرفی یك موتور الکتریکی یا یك لامپ را برحسب اسب وتوان یك موتوردیزل را برحسب کیلووات سنجید .

با استفاده ازروابط موجود میان‌واحدهای نیوتون ، پوند ومتروفوت ،میتوان نشانداد که $1hp=746w$ یا $0/746kw$ یعنی درحدود $\frac{3}{4}$ کیلووات است (در دستگاه متریك اسب بخار $75 \frac{kgm}{sec}$ تعریف شده بود و برابر $736w$ میشد. همیشه باختلاف بین اسب انگلیسی hp واسب درسیستم متریك .C.V توجه‌کنید. مترجم).

پس از آشنائی بادوواحد اسب وکیلووات میتوان «اسب ساعت» و «کیلووات ساعت» را بعنوان واحدهای‌کار تعریف نمود

«اسب ساعت» کاری است‌که دستگاهی‌بتوان یك اسب‌درمدت یکساعت انجام میدهد.

چون چنین دستگاهی درهردقیقه $33000ftlb$ کارانجام میدهد کاریکساعت آن برابراست با $60\times33000ftlb$ ویا $1/98\times10^6ftlb$ = یك اسب ساعت

کیلووات ساعت کاری است‌که دستگاهی بتوان یك کیلووات درمدت یکساعت انجام میدهد

چون چنین دستگاهی درهرثانیه $1000j$ کارانجام داده،کارانجام‌شده‌دریکساعت توسطاین دستگاه برابر1000×3600 است ویا:

$$1kw.hr=3/6\times10^6joules=3/6Mj$$

باید توجه داشت‌که‌کار باآنکه کمیت فیزیکی است قابل خرید وفروش است. نیرو و سرعت کمیت‌های قابل‌خرید وفروش‌نیستندولی شما میتوانید کیلووات‌ساعت(انرژی‌الکتریکی) را بقیمت چند ریال بخرید. همچنین هر BTU گرماکه معادل ۷۷۸ فوت پوند است‌در حدود چند هزارم ریال می‌ارزد .

۷ـ۱۰ ، توان وسرعت

فرض‌کنیم‌نیروی F که بریك‌نقطه مادی اثرمیکند باندازه Δs تغییرمکان یابد. هرگاه F_s مؤلفه مماسی نیروی F باشد کارنیروی F برابر $\Delta W=F_s.\Delta s$ وتوان متوسط برابر است با :

$$\bar{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=F_s\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}=F_s\cdot\bar{v}$$

وتوان لحظه‌ای برابر است با :

$$\boxed{P=F_s\cdot v} \qquad (۱۶-۷)$$

که درآن v سرعت لحظه‌ای است . راه دیگر این است که فرمول ۷ـ۱۶ را بصورت زیر بنویسیم

$$\boxed{P=F.v} \qquad (۱۷-۷)$$

مثال نیروی موتور جهت هواپیمائی $۱۵۰۰۰n$ است. وقتی سرعت آن $۲۵۰m/sec$ است توان چه اندازه است؟

$$P=F_s\cdot v=۱۵۰۰۰n\times۲۵۰\frac{m}{sec}=۳۷۵۰۰۰۰\frac{j}{sec}=۳/۷۵\times۱۰^{۳}kw\,h$$

مسائل

درحل این مسائل $g=۱۰m/sec$ فرض شود مگر اینکه درصورت مسئله عدد دیگری قید شده باشد

۱ـ۷ نیروی موتوریك لکوموتیو باری $۶\times۱۰^{۴}n$ است وقطاررا باسرعت $۷۲km/hr$ میبرد. وقتی قطار یك کیلومتر راه طی کند، موتور چقدر کار انجام داده است.

۲ـ۷ جسمی بجرم $۴۰kgm$ برسطح افقی بضریب اصطکاك $۰/۲$ میلغزد. هرگاه نیروی مؤثر بر آن $۸۰n$ و امتداد نیرو ۳۰° زیر افق باشد، پس از ۳ متر جابجاشدن، چقدر کار انجام شده است .

۳ـ۷ قایقی را باطناب می‌کشند. هرگاه زاویه امتداد طناب و امتداد حرکت ۱۰° و نیروی موثر $۵۰۰n$ باشد پس از ۳۰ متر جابجاشدن ، چقدر کار انجام میشود ؟

۴ـ۷ جسمی را روی سطح افقی با نیروئی واقع در امتداد افق برابر $۵۰n$ بفاصله

۱/۵متر جابجامیکنند. نیروی اصطکاک ۱۰n است. کار نیروی محرك (۵۰n) وکار نیروی اصطکاک را بدست آورید .

۷ـ۵ جسمی بانیروی $F=-150x^3$ بطرف مبدء مختصات جذب میشود. دراین فرمول F برحسب نیوتون و x برحسب متراست. (a) چه نیروئی لازم است تاجسم را درنقطه a به فاصله ۰/۳ مترازمبدء نگاهدارد ؛ (b) نیروی لازم برای اینکه جسم درنقطه b بفاصله ۰/۶m ازمبدء قرار گیرد. (c) جسم درفاصله ab چقدر کار انجام میدهد ؟

۸ـ۶ نیروئی که گازموجود درسیلندری بسطح مقطع A درپیستن واردمیآورد p.A است که درآن p فشار گاز است. کار W درفاصله x_1 و x_2 برابراست با :

$$W=\int_{x_1}^{x_2} F\,dx=\int_{x_1}^{x_2} p\cdot A\,dx=\int_{V_1}^{V_2} p\cdot dV$$

دراین فرمول dv تغییرات کوچك حجم است. (a) درانبساط ایزوترم گاز (دما ثابت) رابطه فشار وحجم $p=\frac{nRT}{V}$ است. n و R اعداد ثابت و T نیزدر اینحالت ثابت است هرگاه گازازحجم V_1 به V_2 برسدکارانجام شده راحساب کنید. (b) درتحول آدیاباتیك گازرابطه حجم و فشار $k=\frac{k}{V^{\gamma}}$ است که درآن γ و k ضرائب ثابت‌اند. هرگاه گاز بطورآدیاباتیك از V_1 تا V_2 انبساط یابد کارانجام شده راحساب کنید .

۷ـ۷ (a) انرژی جنبشی اتومبیلی بجرم ۹۰۰kg که باسرعت ۴۵km/hr درحرکت است بدست آورید. (b) وقتی سرعت دوبرابر شود انرژی جنبشی چند برابرمیشود ؟

۷ـ۸ انرژی جنبشی گلوله ۲ گرمی که با سرعت $500\ \frac{m}{sec}$ درحرکت است چند ارگ وچند ژول است ؟

۷ـ۹ جرم الکترون $9\times10^{-28}gm$ و سرعت الکترونی که به صفحه حساس اسیلوگراف برخورد میکند $10^9\ \frac{cm}{sec}$ است . انرژی جنبشی آنرا حساب کنید .

۷ـ۱۰ انرژی پتانسیل آسانسوری بجرم ۹۰۰kg در بالای آسمانخراشی بارتفاع ۳۸۰ مترچقدراست .

۷ـ۱۱ وقتی جسمی بجرم ۱kgm را از زمین بلندکرده روی میزی بارتفاع ۱m قرار دهیم ازدیاد انرژی پتانسیل آن چقدر میشود .