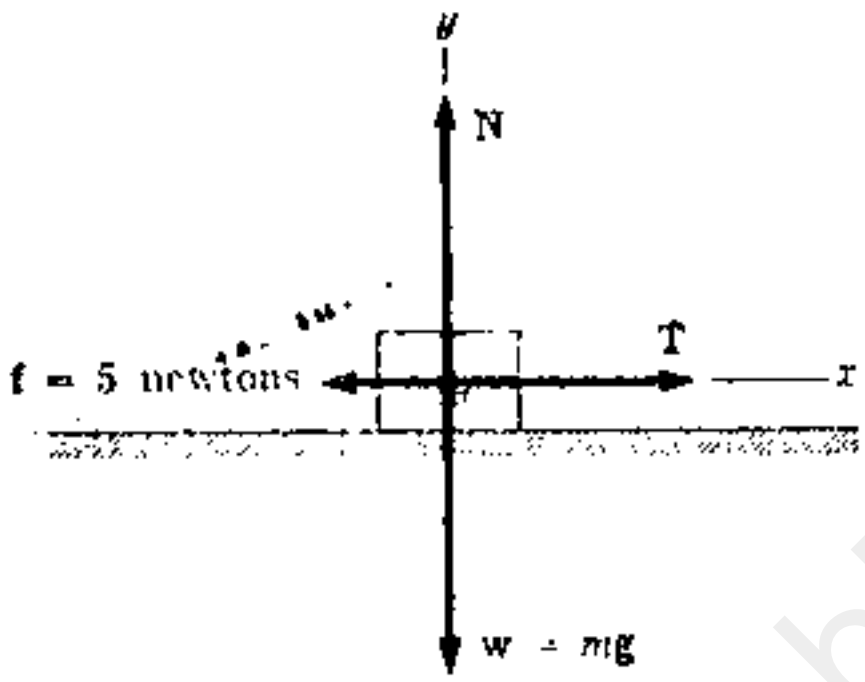
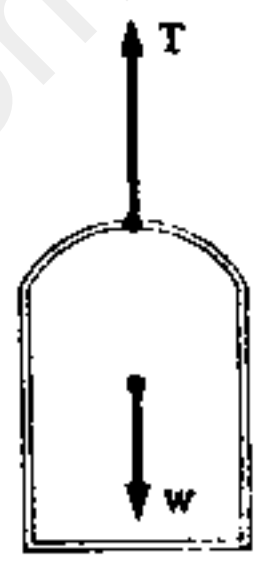
مثال ۱ــ جسمی بجرم ۲۰kgm برسطح افقی قرار دارد . چه نیروی ثـابت T برآن اثر کندتادرمدت دوثانیه پس‌ازشروع حرکت سرعت‌آن به ۴m/sec برسد . نیروی اصطکاك بین جسم وسطح اتکاء ثابت وبرابر 5n است . فرض‌کنید همه نیروها برمرکزثقل اثر میکند (بشکل ۵ــ۳ رجوع شود)

جرم جسم معلوم است مؤلفه قائم شتاب $a_y = 0$ است . مؤلفه افقی شتاب را بکمك اعدادیکه برای سرعت بیان شده است بدست میاوریم . چون نیروها ثـابت‌اند مؤلفه افقی شتاب نیز ثابت میباشد ازمعادلات حرکت متشابه‌التغییر نتیجه میشود :



شکل ۵ــ۳ برآیند نیروها $T - w$ است .



شکل ۵ــ۴

$$a_x = \frac{v - v_0}{t} = \frac{4\,m/sec^2 - 0}{2\,sec} = 2\,m/sec^2$$

برآیند نیروها درامتداد محور x ها عبارتند از :

$$\Sigma F_x = T - f_s$$

و درامتداد محور y ها عبارتست از :

$$\Sigma F_y = N - w$$

بنابرقانون دوم نیوتون‌داریم :

$$T - f = ma_x \qquad N - w = ma_y = 0$$

ازفرمول دوم معلوم میشودکه :

$$N = w = mg = 10\,kgm \times 9/8\,m/sec^2 = 98/0\,n$$

و از فرمول اول نتیجه میشودکه :

$$T = f + ma_x = 5n + 10\,kgm \times 2\,m/sec^2 = 25n$$

مثال ۲ـ جرم آسانسوری با محتویات آن جمعاً ۵۰۰۰n است. کشش مؤثر بر طناب حامل آسانسور را حساب کنید. سرعت آسانسور که رو بپائین در حرکت است پس از پیمودن فاصله ۱۸m از ۶m/sec بصفر میرسد. (شکل ۵ـ۴) شتاب ثقل $g=10\frac{m}{sec^2}$ جرم آسانسور برابر است با :

$$m=\frac{w}{g}=\frac{5000n}{10m/sec^2}=500kgm$$

از معادلات حرکت متشابه‌التغییر نتیجه میشود که :

$$v^2=v_0^2+2ay \quad , \quad a=\frac{v^2-v_0^2}{2y}$$

سرعت اولیه v_0 برابر $-6m/sec$ و سرعت v برابر صفر است. هرگاه مبدأ مختصات را نقطه شروع بحرکت فرض کنیم خواهیم داشت $y=-18m$ و ازآنجا :

$$a=\frac{0-(-6m/sec)^2}{-2\times 18m}=1\frac{m}{sec^2}$$

بنابراین شتاب مثبت و رو بالا است از دیاگرام آزاد که در شکل ۵ـ۴ نشانداده شده است برآیند نیروها چنین است :

$$\Sigma F=T-w=T-5000n$$

وچون داریم :

$$\Sigma F=ma \quad , \quad T-5000n=500kgm\times 1m/sec^2=500n \quad \text{و} \quad T=5500n$$

مثال ۳ـ شتاب جسمی که برسطح شیب دار بدون اصطکاکی با زاویه شیب θ حرکت میکند چه اندازه است ؟

برجسم تنها نیروی وزن w و نیروی قائم وارد از تکیه‌گاه N (ش ۵ـ۵) میباشد.

محورهارا درامتداد سطح و عمود برسطح انتخاب و نیروی وزن را بدو مؤلفه روی این دومحور تجزیه میکنیم خواهیم داشت :

$$\Sigma F_y=N-w\cos\theta \qquad \Sigma F_x=w\sin\theta$$

اما میدانیم که درامتداد محور y ها شتابی وجود ندارد پس $a_y=0$ و درنتیجه $\Sigma F_y=ma_y=0$ درنتیجه داریم $N=w\cos\theta$ ازفرمول $\Sigma F_x=ma_x$ نتیجه میشود:

$$w\sin\theta=ma_x$$

و چون $w=mg$ است پس میتوان نوشت :

$$a_x=g\sin\theta$$

جرم درفرمول فوق ظاهر نمیشود یعنی وقتی جسمی برروی سطح شیب دار بدون اصطکاك حرکت میکند وزن آن هرچه باشد جسم روی سطح با شتاب $g\sin\theta$ که رو بپائین متوجه است حرکت میکند. (توجه داشته باشیدکه لازم نیست سرعت حتماً روبپائین باشد).

مثال ۴ـ بشکل ۲ـ۴ (فصل دوم) مراجعه کنید جرم جسم را $4kgm$ و جرم طناب را $0/5kgm$ فرض کنید. هرگاه F_1 برابر ۹ نیوتون باشد F'_1 ، F_2 ، F'_2 چه اندازه‌هائی‌را داراهستند ؟ سطحی که جسم‌برآن حرکت‌میکند افقی‌وبدون اصطکاك‌است.

از قانون سوم نیوتون نتیجه میشود که F_2،F'_1 و F_2،F'_2 است نتیجه میگیریم که $F'_1=9n$ نیروی F_2 را بااستفاده ازقانون دوم نیوتون میتوان بدست‌آورد بشرط آنکه شتاب معلوم باشد. همچنین F'_2 را ازبکار بردن قانون دوم نیوتون درمورد طناب بدست‌آورد. شتاب معلوم نیست ولی هرگاه طناب وجسم جمعاً جسم واحدی در نظر گرفته شوند میتوان آنرا محاسبه نمود. نیروهای قائم وارد براین مجموعه را نباید در نظرآورد زیرا درامتداد قائم حرکتی وجود ندارد . چون نیروی اصطکاك وجود ندارد نیروهای خارجی وارد برمجموعه فقط F_1 است (F_2 و F'_2 دراین مجموعه **نیروهای داخلی** بحساب می‌آیند . F'_1 برجسم اثر نمیکند بلکه از جسم برشخص وارد می‌شود) بنابرقانون دوم نیوتون میتوان نوشت :

$$\Sigma F=ma$$

$$qn=(4kgm+0/5kgm)\times a$$

$$a=2m/sec^2$$

اکنون اصل دوم نیوتون را برای جسم بکارمیبریم :

$$\Sigma F=ma$$

$$F_2=4kgm\times 2m/sec^2=8n$$

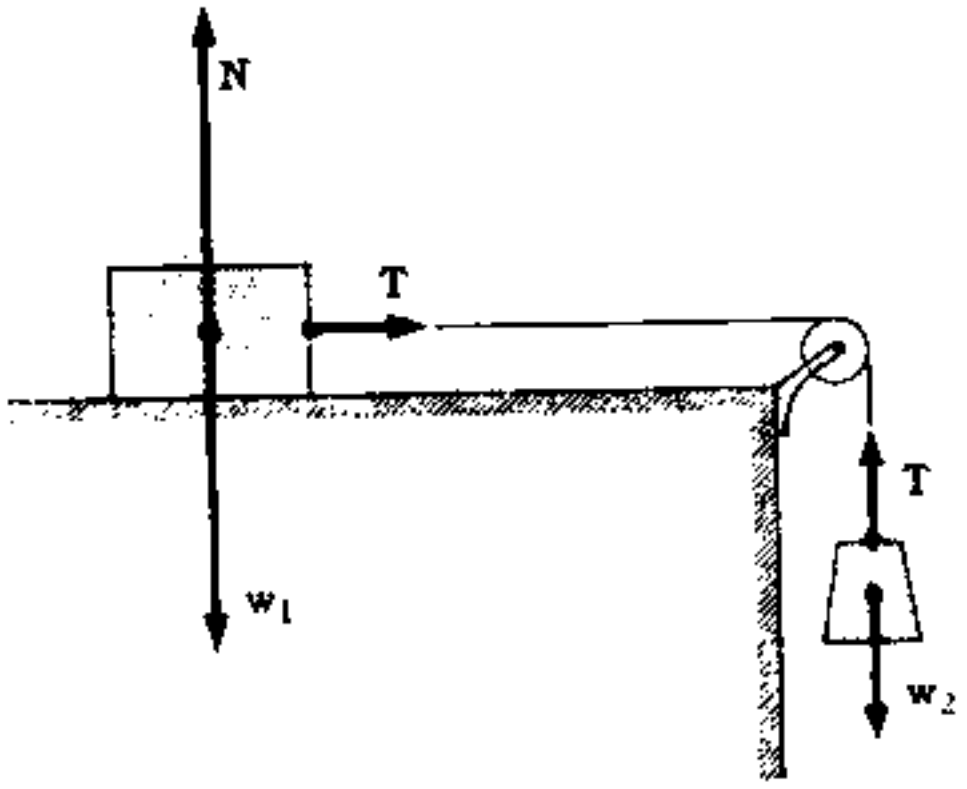
درمورد طناب بتنهائی مینویسیم :

$$\Sigma F=F_1-F'_2=9n-F'_2$$

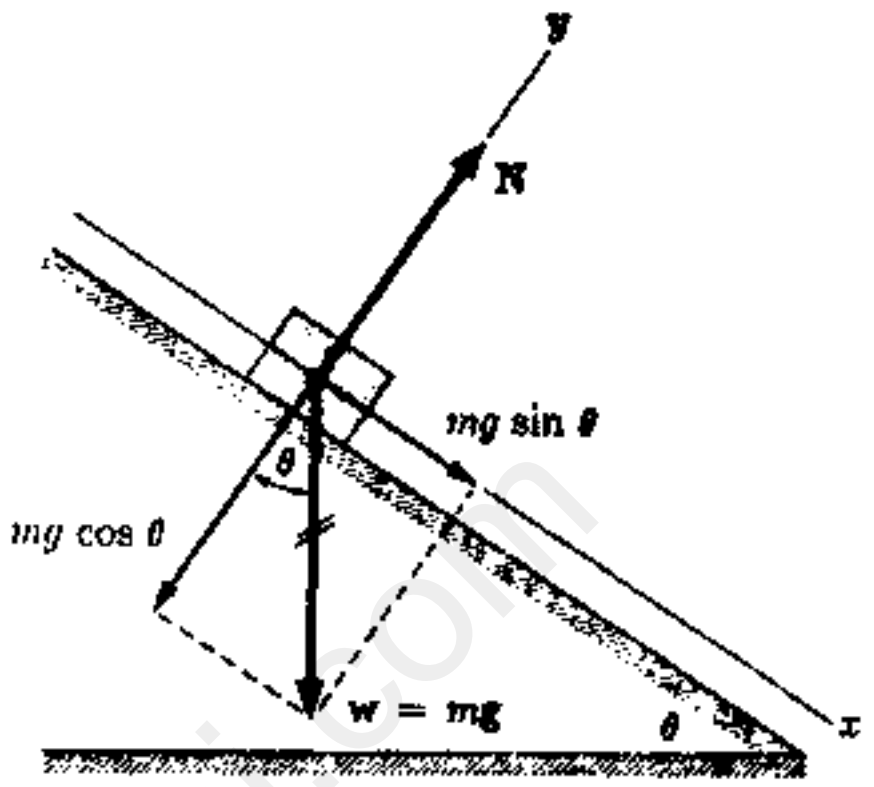
وبنابرقانون دوم داریم :

$$۹n - F'_۲ = ۰/۵kgm \times ۲m/sec^۲ = ۱n$$

$$F_۲' = ۸n$$



ش- ۵-۶



شکل ۵-۵ جسمی برسطح شیب دار بدون اصطکاك

بنابراصل سوم نیوتون که باحذف $F_۲$ و $F'_۲$ بطورضمنی مورد استفاده‌قرارگرفت اندازه $F_۲$ و $F'_۲$ باهم برابرند. اما توجه داشته باشیدکه نیروهای $F_۲$ و $F_۱$ مساوی نبوده (طناب بحال تعادل نیست) واین دونیرو عمل وعکس‌العمل نیستند .

مثال ۵ـ در شکل ۵-۶ جسمی بجرم $m_۱$ (بوزن $w_۱$) برسطح افقی بدون اصطکاکی درحرکت است. این جسم باطناب بی‌وزنی که ازروی قرقره‌بدون اصطکاکی‌عبور کرده است بوزنه $w_۲$ وصل میشود . شتاب دستگاه وکشش مؤثر برطناب را محاسبه کنید .

نیروهای مؤثر بردوجسم درشکل نشانداده شده است. نیروهائی راکه دوطرف طناب بردوجسم وارد می‌آورد میتوان یك جفت عمل‌وعکس‌العمل فرض‌نمود وبهمین دلیل ماهردو را باحرف T' نمایش داده‌ایم. برای جسمی‌که روی سطح قراردارد مینویسیم :

$$\Sigma F_x = T' = m_۱a$$

$$\Sigma F_y = N - w_۱ = ۰$$

چون دوجسم بایك طناب بهم وصل‌اند شتاب حرکت هردو یکی است. قانون دوم نیوتون را برای جسم آویزان مینویسیم . داریم :

$$\Sigma F_y = w_۲ - T = m_۲a$$

ازجمع فرمول اول دوم بدست میآید :

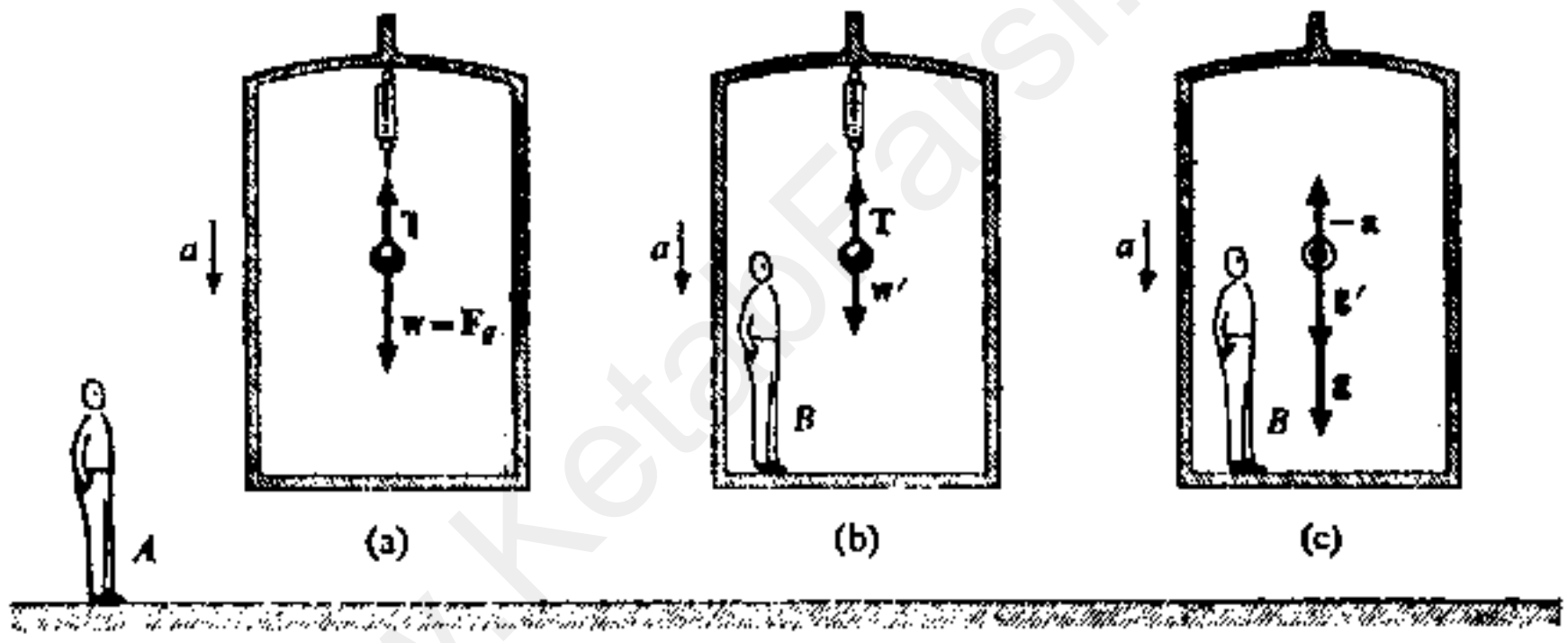
$$w_2=(m_1+m_2)a$$

ویا :

$$a=\frac{m_2}{m_1+m_2}$$

این نشان میدهد که شتاب دستگاه بطور کلی برابر خارج قسمت نیروی خارجی وارد بر دستگاه (که فقط w_2 است) برجرم کل دستگاه یعنی m_1+m_2 است پس داریم :

$$a=g\frac{m_2}{m_1+m_2}$$



شکل ۵–۷ (a) برای ناظر A جسم شتابی رو بپائین دارد واین ناظرمینویسد

$$w-T=ma$$

(b) برای ناظر B شتاب صفر است واو مینویسد :

$$w'=T$$

(c) برای ناظر B شتاب سقوط آزاد برابر $a'=g-a$ است.

ازحذف a بین دورابطه‌مذکور نتیجه میشود :

$$T=w_2\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

یعنی T کسری از w_2 است. با وجود آنکه زمین نیروئی برابر w_2 بر جسم آویزان وارد میآوردمعذالك فقط کسری از آن بجسم واقع بر سطح اثر میکند. زیرا این زمین

نیست که جسم لغزان واقع برسطح را میکشد بلکه طناب آنرا میکشد و کشش طناب باید از w_2 کمتر باشد زیرا جسم آویزان دارای شتاب است.

مثال ۶ـ مطابق شکل ۵ـ۷ جسمی به نیروسنجی که بسقف آسانسوری آویزان است متصل میباشد. هرگاه شتاب آسانسور نسبت بزمین a باشد نیروسنج چه عددی را نشان میدهد؟ سطح زمین را دستگاه مختصات اینرسی فرض کنید.

نیروهای مؤثر برجسم عبارتند از w وزن آن (که همان F_g نیروی جاذبه وارده اززمین برجسم است) روبپائین ونیروی T که ازطرف نیروسنج روبیالا برآن وارد میشود. جسم نسبت به آسانسور ساکن است. لذا نسبت بزمین دارای شتاب a است (روبپائین را جهت مثبت اختیار میکنیم) برآیند نیروهای وارده برجسم $w - T$ است. بنابر قانون دوم نیوتون داریم:

$$w - T = ma \qquad T = w - ma$$

بنابرقانون سوم نیوتون، جسم نیروسنج را بانیروئی برابر $w - ma$ (یعنی مساوی T) ولی روبپائین میکشد پس عددی که نیروسنج نشان میدهد همان $w - ma$ خواهد بود.

هرگاه همین جسم به نیروسنج ساکنی واقع درسطح زمین آویزان شده بود نیروسنج اخیر همان w را نشان میداد. برای ناظری که درآسانسوراست جسم بحال تعادل بنظر میآید و نیروسنج نیز w' را نشان میدهد که اندازه آن $w - ma$ است. w' را **وزن ظاهری** جسم مینامند زیرا این نیرو فقط بظاهر (و برای ناظریکه درآسانسوراست) از طرف وزنه برنیروسنج وارد میشود. نیروی جاذبه وارده از زمین برجسم معین، w را **وزن حقیقی** جسم مینامند. خواهیم داشت

$$w' = w - ma \qquad (۵-۸)$$

هرگاه آسانسور یا درحال سکون باشد ویا باسرعت ثابت (بیالا یا بپائین) حرکت کند وزن ظاهری آن باوزن حقیقی برابراست زیرا $a = ۰$ است. هرگاه مطابق شکل ۵ـ۷ شتاب حرکت آسانسور روبپائین باشد وزن ظاهری ازوزن حقیقی کمتراست وجسم «سبکتر» بنظر میآید. هرگاه شتاب آسانسور روبیالا باشد وزن ظاهری ازوزن حقیقی بیشتر است وجسم «سنگین‌تر» بنظرمیآید. هرگاه آسانسور باشتاب ثقل سقوط کند یعنی $a = g$ باشد چون وزن حقیقی جسم $w = mg$ است وزن ظاهری برابر صفر است و جسم «بی وزن» بنظر میآید. درفصل بعد درحرکت دورانی نیز درباره بی‌وزنی صحبت خواهیم کرد.

مسئله را ازنقطه نظردیگر می‌توان مورد توجه قرارداد. هرگاه دستگاه متصل بزمین

را دستگاه اینرسی فرض کنیم وزن یك جسم ازرابطه زیر بدست میآید :

$$w = mg \qquad (۵-۹)$$

که درآن g شتاب سقوط آزادجسم نسبت بزمین است. فرض کنیم چنانکه درشکل ۵-۷(c) نشانداده شده‌است جسم را درون آسانسور آزادانه رها کنیم. g شتاب آن نسبت به‌آسانسور چه اندازه است ؟

درفصل چهارم نشان دادیم که سرعت های نقطه مادی P نسبت بدستگاه‌های A و B که نسبت بهم درحرکت‌اند عبارتست از :

$$\mathbf{v}_{pB} = \mathbf{v}_{pA} + \mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_{pA} - \mathbf{v}_{BA}$$

$\mathbf{v}_{BA}$سرعت نسبی دستگاه B نسبت به A است. هرگاه ازطرفین تساوی فوق نسبت به t مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{d\mathbf{v}_{pB}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{pA}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_{BA}}{dt}$$

و یا :

$$\mathbf{a}_{pB} = \mathbf{a}_{pA} - \mathbf{a}_{BA}$$

(رابطه فوق بشرطی صحیح است که دستگاه‌های A وB نسبت بهم حرکت چرخشی نداشته باشد)

حال فرض کنیم B دستگاه متصل به‌آسانسور و A دستگاه متصل بزمین باشد $\mathbf{a}_{pB}$ شتاب جسم نسبت به‌آسانسور و برابر g′ و $\mathbf{a}_{pA}$ شتاب جسم نسبت بزمین یعنی g و $\mathbf{a}_{BA}$ شتاب آسانسور نسبت بزمین یعنی a است وداریم :

$$g' = g - a \qquad (۵-۱۰)$$

و :

$$mg' = mg - ma$$

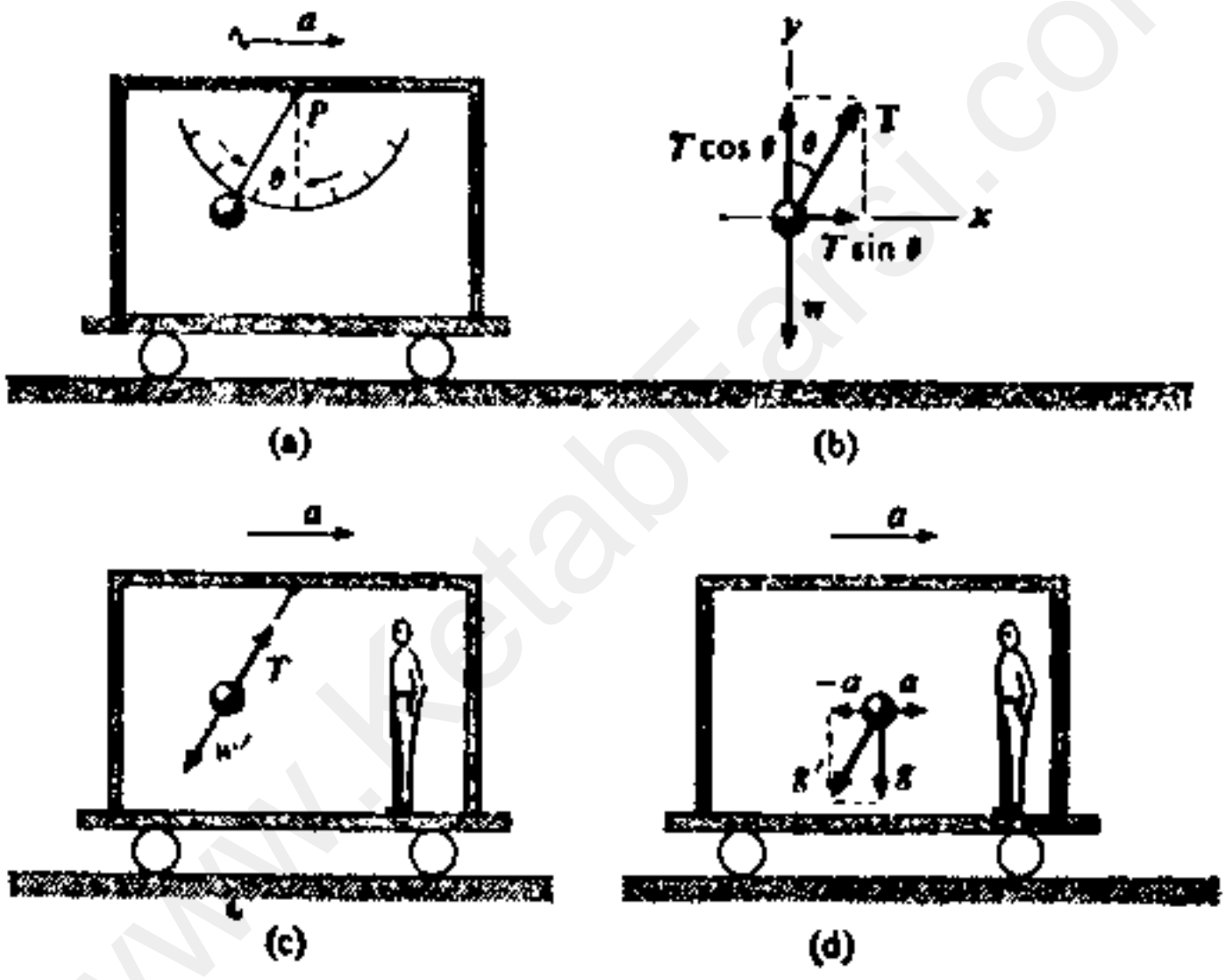
اما mg برابروزن واقعی جسم یعنی w و $w - ma$ برابر وزن ظاهری w′است بنابراین نتیجه میگیریم :

$$w' = mg' \qquad (۵-۱۱)$$

که‌نظیرفرمول (۵-۹) است. یعنی وقتی‌جسمی درآسانسوری سقوط‌میکند شتاب سقوط آن در نظر ناظر درون آسانسور g′ شتابی است که این جسم دریك دستگاه مختصات اینرسی در اثر w′ (وزن ظاهری جسم) پیدا میکند.

مثال ـ شکل ۵ـ۸(a) یك شتاب سنج **accelerometer** را نشان میدهد . جسم کوچکی بانتهای میله سبکی متصل است واین میله میتواند حول نقطه **P** نوسان کند . هر گاه دستگاه دارای شتاب **a** بطرف راست باشد میله با امتداد قائم‌زاویه θ میسازد(درعمل باید دستگاه دارای مستهلك کننده‌ای باشد بطوریکه ازنوسانات زیاد در موقع تغییرشتاب جلوگیری کند میله ووزنه را درظرفی ازروغن معدنی قرارمیدهند)

همانطورکه درقسمت (b) شکل نشانداده شده است نیروهای مؤثر بر جسم یکی **w** وزن جسم دیگری **T** نیروی وارده ازمیله‌برآن است.(ازوزن میله صرفنظر شده است)مؤلفه افقی‌برآیند نیروها عبارتست از :



شکل ۵ـ۸ (a) شتاب سنج. (b) نیروهای مؤثر برجسم w و T میباشند . (c) وزن ظاهری w' مساوی و مختلف‌الجهت با T است (d) شتاب سقوط آزاد g' نسبت به شتاب‌سنج با فرمول $g' = g - a$ مشخص شده است .

$$\Sigma F_x = T \sin\theta$$

ومؤلفه قائم آن چنین است.

$$\Sigma F_y = T\cos\theta - w$$

مؤلفه شتاب درامتداد محور **x**ها همان شتاب جسم ومؤلفه قائم شتاب برابرصفر است پس داریم

$$T\sin\theta = ma \qquad T\cos\theta = w$$

هر گاه بجای w مقدارآن یعنی mg قرارداده دو فرمول بالا را برهم تقسیم کنیم‌رابطه‌زیر بدست میآید :

$$a = g\tan\theta$$

یعنی شتاب متناسب با تانژانت زاویه انحراف است .

اکنون مسئله را از نقطه نظرشخصی که با دستگاه درحرکت است حل میکنیم [شکل ۵-۸ (c)]. ازنظر این شخص جسم درحال تعادل است ونیروهای وارده برآن (ازنظراین شخص) T و w' است که مساوی‌ومختلف‌الجهت میباشند . این شخص w' را وزن ظاهری جسم مینامدبرای بدست آوردن رابطه‌ای برای w'قانون دوم نیوتون را بصورت معادله‌ای برداری مینویسیم. برآیند نیروهای مؤثر وارد برجسم جمع برداری w و T میباشد لذا داریم

$$w+T=ma \qquad T=-w+ma$$

وزن ظاهری w' مساوی ومختلف‌الجهت با T است یعنی $w'=-T$ درنتیجه میتوان‌نوشت:

$$w'=w-ma \qquad (۵-۱۲)$$

این فرمول صورت کلی‌فرمول۵-۸ برای w'وزن ظاهری یك جسم نسبت بدستگاهی که شتاب آن دریك دستگاه اینرسی برابر a است میباشد. در مثال فوق وزن ظاهری از حیث اندازه وامتداد وجهت با وزن حقیقی متفاوت است .

شتاب سقوط آزاد g' نسبت به شتاب سنج ازفرمول ۵-۱۰ چنین‌بدست میآید :

$$g'=g-a$$

که‌درشکل۵-۸ (d) نشانداده شده است. بنابراین :

$$mg'=mg-ma$$

وبازهم میتوان نوشت :

$$w'=mg'$$

شتاب سقوط آزاد نسبت به شتاب سنج در امتداد وجهت وزن ظاهری w' است و اندازه آن برابراست با

$$g'=\frac{w'}{m}$$

تا اینجا ازقانون دوم نیوتون فقط درمواردی استفاده کردیم که برآیند نیروهای‌وارد

برجسم ثابت ودرنتیجه، حرکت جسم حرکت باشتاب ثابت بود درچنین حالاتی مسائل را میتوان بآسانی حل‌کرد زیرا به معلومات ریاضی زیادی احتیاج ندارد . هرگاه نیرو متغیر باشد شتاب نیز متغیر خواهد بود وصورت ساده معادلات حرکت باشتاب ثابت نمیتواندمورد استفاده قرارگیرد. مادراینجا دومسئله نمونه درمورد نیرو و شتاب متغیر حل میکنیم .

مثال ۸ــ فرض‌کنیدمقاومت هوا وحرکت‌وضعی زمین وجود ندارد. درباره حرکت جسمی‌که درامتداد قائم بهوا پرتاب میشود بادرنظر گرفتن اینکه شتاب ثقل با تغییرفاصله متحرك اززمین تغییرمیکند بحث‌کنید .

نیروی جاذبه مؤثر برجسمی‌که بفاصله r ازمرکز زمین قراردارد $G\frac{mm_E}{r^2}$ است وبنابرقانون دوم نیوتون شتاب آن‌برابر :

$$g=\frac{w}{m}=-\frac{Gm_E}{r^2}$$

میباشد. جهت مثبت روبیالا (یا درامتداد شعاع روبخارج) فرض شده است .

درفرمول ۴ــ۸ نشانداده شده است‌که شتاب را میتوان ازفرمول زیربدست آورد

$$g=v\frac{dv}{dr}$$

لذا داریم :

$$v\frac{dv}{dr}=-\frac{Gm_E}{r^2} \quad \text{و} \quad \int_{v_1}^{v_2} vdv=-Gm_E\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

v_1 و v_2 بترتیبسرعت‌های جسم درفواصل r_1 و r_2 ازمرکز زمین‌است. نتیجه‌میگیریم‌که:

$$v_2^2-v_1^2=2Gm_E\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right) \qquad (۱۳-۵)$$

فرض‌کنیم جسم باچنان سرعتی بهوا پرتاب شودکه باندازه شعاع زمین از سطح آن دورشوددراین صورت $v_2=0$ و $r_1=R$ و $r_2=2R$ است وداریم :

$$v_1^2=\frac{Gm_E}{R} \qquad (۱۴-۵)$$

هرگاه g_0 شتاب ثقل درسطح‌زمین یعنی درفاصله $r=R$ باشد داریم :

$$Gm_e=g_0R^2$$

وبنابرفرمول ۵-۱۴ میتوان نوشت:

$$v_1^2=g_0R \qquad (۱۵-۵)$$

حال خودتان فرض کنیدکه شتاب ثقل‌ثابت وبرابر g_0 است. ارتفاع صعود جسم را براساس این فرض محاسبه ونتایج را باهم‌مقایسه کنید.

مثال ۹ـ درطبیعت موارد متعددی دیده میشود که در آنها نیرو متناسب باتندی افزایش می‌یابد. بعداً خواهیم دیدکه‌هرگاه گلوله‌کوچکی بشعاع r درون سیال ویسکوزی باسرعت v حرکت کند نیروی مقاومی باآن مقابله میکندکه اندازه آن برابر :

$$R=-6\pi\eta rv$$

است. دراین فرمول η ضریب ویسکوزیته است واین فرمول را چنانکه بعداً خواهیم دید فرمول‌ستوکس مینامند. فرمول ستوکس رابصورت ساده زیر می‌نویسیم:

$$R=-kv$$

براین کره کوچك سه‌نیرودرامتدادقائم اثرمیکند: وزن w، نیروی رانش B ونیروی‌مقاومت R (شکل ۵-۹).

شکل ۵-۹ نیروهای مؤثر برگلوله کوچکی که درون سیال ویسکوزی درحرکت است .

فرض کنیم‌کره ازحال سکون شروع بحرکت میکند وجهت مثبت y روبپائین است بنابراین داریم:

$$\Sigma F_y=w-B-kv=ma$$

وقتی درابتدای حرکت $v=0$ است نیروی مقاوم صفروشتاب اولیه a_0 مثبت‌است:

$$a_0=\frac{w-B}{m} \qquad (۱۶-۵)$$

سرعت‌گلوله روبافزایش است وپس‌ازآنکه بحد معین v رسید نیروی مقاوم برابر $w-B$

میشود وبرآیند نیروهای وارد برگلوله برابر صفرمیگردد . دراین لحظه شتاب صفر و از این پس سرعت ثابت میماند. سرعت حد v_T را با فرض $a = 0$ چنین محاسبه میکنند

$$w - B - kv_T = 0$$

ویا :

$$v_T = \frac{w - B}{k} \qquad (۱۷-۵)$$

برای پیدا کردن رابطه‌ای بین سرعت و زمان رسیدن بسرعت حد مجدداً از قانون دوم نیوتون استفاده میکنیم :

$$m\frac{dv}{dt} = w - B - kv$$

بجای $\frac{w-T}{k}$ اندازه آن یعنی v_T قرارمیدهیم خواهیم‌داشت:

$$\frac{dv}{v - v_T} = -\frac{k}{m}dt$$

چون‌درلحظه $t = 0$ اندازه سرعت $v = 0$ است پس داریم :

$$\int_0^v \frac{dv}{v - v_T} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

و ازآنجا :

$$\ln\frac{v_T - v}{v_T} = -\frac{k}{m}t$$

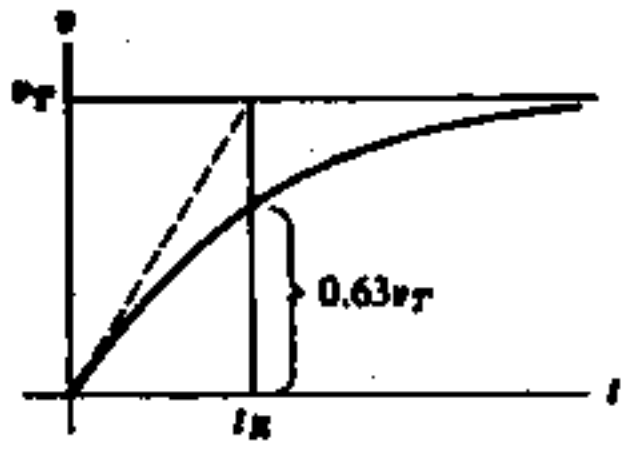
ویا :

$$1 - \frac{v}{v_T} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

وبالاخره خواهیم‌داشت:

$$v = v_T\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \qquad (۱۸-۵)$$

درتوابع نمائی relaxation time که با t_R نمایش‌داده میشود اهمیت زیادی دارد. اندازه t_R را میتوان درشکل۵ـ۱۰ مشاهده نمود هرگاه حرکت جسم درسیال همیشه دارای شتاب ثابت a_0 میبود (درمنحنی این فرض با خط چین نمایش داده شده‌است). پس‌اززمان t_R (یعنی‌زمان فرضی لازم برای اینکه جسم باشتاب ثابت‌بسرعت حدبرسد که Relaxation time) نامیده‌میشود سرعت‌جسم به v_T میرسید واضح‌است که :



شکل ۵ـ۱۰ منحنی نمایش تغییرات سرعت جسمی‌که درسیال‌ویسکوزی سقوط میکند نسبت بزمان رسم شده است

$$t_R = \frac{v_T}{a_0} = \frac{(w-B)/k}{(w-B)/m} = \frac{m}{k}$$

اکنون فرمول ۵ـ۱۸ را میتوان بصورت ساده زیر نوشت

$$v = v_T\left(1 - e^{\frac{-t}{t_R}}\right) \qquad (۱۹-۵)$$

در لحظه‌ایکه $t = t_R$ است‌کسر $\frac{t}{t_R} = 1$ است وداریم:

$$v = v_T(1 - e^{-1}) = 0/63 v_T$$

یعنی درزمان t_R جسم به ۶۳٪ سرعت حد خود میرسد

مسائل

(برای جمیع مسائل دیاگرام نیرورسم‌کنید واندازه شتاب‌ثقل رابرابر $32 ft/sec^2$ یا $980 cm/sec^2$ یا $10 m/sec^2$ فرض‌کنید مگردرمواردیکه‌اندازه g مشخص‌شده‌باشد)

۵ـ۱ . (a)درنقطه‌ایکه $g = 9/80 m/sec^2$ است‌وزن‌جسمی‌یك نیوتون‌است. جرم آن‌چه اندازه‌است (b)درنقطه ایکه $g = 980 cm/sec^2$ است وزن جسمی یك دین است . جرم آنرا پیداکنید (c) جرم جسمی بوزن یك پوند چه اندازه است

۵ـ۲ درچه فاصله‌ای ازمرکززمین وزن‌جسمی بجرم یك‌کیلوگرم برابر یك‌نیوتون میشود. (b) درچه فاصله‌ای وزن جسمی بجرم یك‌گرم‌برابر یك‌دین و(c) درچه فاصله‌ای وزن جسمی بجرم یك slug برابریك پوند میشود .

۵ـ۳ هرگاه عمل و عکس‌العمل مساوی و مختلف‌العلامه‌اند چرا یکدیگر را خنثی نمی‌کنند تا نیروئی برای ایجاد شتاب باقی‌نماند ؟

۵ـ۴ جرم جسمی ده‌گرم است (a) جرم آن در کره مریخ چه اندازه است ؟ (b) آیا فرمول $F=ma$ درمریخ صادق است ؟ (c) گاهی اوقات $F=ma$ را بصورت $F=\frac{w}{g}a$ مینویسند. آیا اینکاردرمریخ مجازاست ؟ (d)هرگاه‌شخصی درمریخ جسمی‌بجرم یك پوند را به نیروسنجی‌آویزان‌کندآیا عقربه نیروسنج روی یك پوندمیایستد. (نیروسنج درزمین مدرج شده است)

۵ـ۵ نیروی ثابت وافقی ۵۰n بر جسمی‌که برسطح بدون اصطکاك قراردارد وارد میشود. جسم ازحالت سکون شروع بحرکت‌کرده درمدت پنج ثانیه ۷۵m راه طی میکند. هرگاه اثر نیروقطع شود درپنج ثانیه بعدی‌جسم چند متر راه را طی خواهدکرد. جرم جسم چقدر است ؟

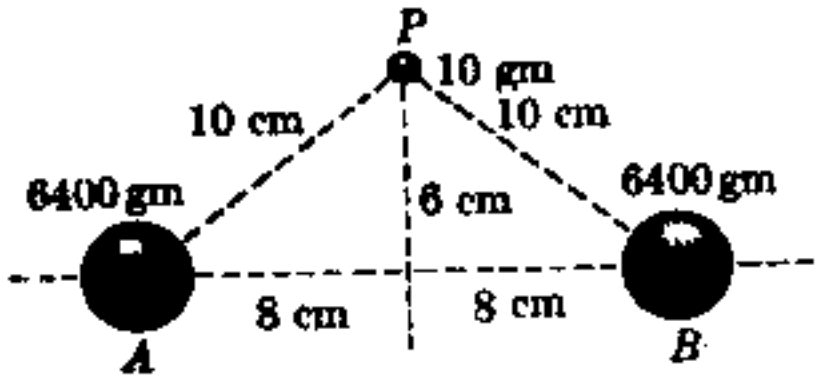
۵ـ۶ گلوله تفنگی باسرعت $36000\ cm/sec$ بچوب برخوردکرده ۱۰cm درآن فرومیرود. جرم‌گلوله ۱/۸ گرم است هرگاه شتاب ثابت فرض‌شود. (a) گلوله پس ازچه مدت متوقف میشود ؟ (b) نیروی مقاوم چنددین است .

۵ـ۷ الکترونی (که جرم آن $9\times10^{-28}gm$ است) بدون سرعت اولیه از کاتد لامپی جدامیشود ومسیرمستقیم‌الخط یك‌سانتیمیری بین‌آند وکاتد را می‌پیماید. پس ازرسیدن به‌آندسرعت‌آن‌به $6\times10^{8}cm/sec$ میرسد. هرگاه نیروی مؤثر ثابت فرض‌شودپیدا کنید. (a) اندازه این نیرو را برحسب‌دین (b)زمان‌رسیدن الکترون به‌آند. (c) واندازه شتاب را. ازاثر جاذبه زمین برالکترون صرفنظر شود.

۵ـ۸ هردلیلی دارید در رد یاقبول بیان‌زیر ابراز دارید: «علت اینکه سیب ازدرخت بزمین می‌افتد ولی زمین بطرف سیب‌حرکت نمی‌کند این است‌که زمین چون‌جرم بیشتری دارد سیب را بانیروی بیشتری جذب میکند»

۵ـ۹ دریك دستگاه کاوانديش جرم هریك ازگلوله های بزرگ ۸۰۰gm و جرم هرگلوله‌کوچك ۴ گرم‌وفاصله مراکزدوگلوله مجاور ازیکدیگر ۴cm است اندازه نیروی مؤثر بین دوکره $13\times10^{-6}dyncs$ است . هرگاه‌شتاب ثقل $980cm/sec^2$ وشعاع زمین ۶۴۰۰km باشد جرم زمین را حساب‌کنید .

۵ـ۱۰ مطابق شکل ۵ـ۱۱ دو کره که جرم هریك ۶۴۰۰gm است در نقطه A و B قراردارند. اندازه وجهت‌نیروئی را که از طرف این دوکره بر کره کوچکی بجرم ۱۰gm وواقع درنقطه P وارد میشود ونیزشتاب اولیه حاصل از این‌نیرو را بدست آورید.



شکل ۵ـ۱۱

۵ـ۱۱ جرم ماه $\frac{1}{81}$ وشعاع آن $\frac{1}{4}$ جرم و شعاع زمین است شتاب ثقل را درسطح ماه بدست آورید.

۵ـ۱۲ فاصله ماه تازمین ۴۰۰،۰۰۰وفاصله زمین تاخورشید ۱۵۰ ملیون‌کیلومتر و جرم زمین وخورشید بترتیب $6\times10^{27}gm$ و $2\times10^{33}gm$ است. نسبت تقریبی اثر جاذبه خورشید برماه وزمین برماه را بدست آورید.

۵ـ۱۳ جسمی بجرم۵ کیلوگرم باطنابی باشتاب $2m/sec^2$ بطرف‌بالاکشیده‌میشود. (a) کشش مؤثر ازطناب برآن به ۴۹n تقلیل مییابد.جسم چه نوع‌حرکتی را داراخواهد شد ؛ (c) هرگاه طناب را رهاکنند جسم ۲ متر بالارفته شروع‌به‌برگشت میکند سرعت‌آن چه اندازه بوده است

۵ـ۱۴ جسمی بوزن ۱۰۰n را میتوان باطنابی بالا یا پائین‌کشید. دراندازه وجهت شتاب وسرعت این جسم در موارد زیر بحث‌کنید.(a) نیروی مؤثر ۵۰n .(b) ۱۰۰n و(c) ۱۵۰n است .

۵ـ۱۵ جسمی به‌نیروسنجی که خود بسقف آسانسوری وصل است آویزان میباشد . وقتی شتاب آسانسوررو ببالا وبرابر $1m/sec^2$ است نیروسنج ۱۱۰n را نشان میدهد . (a) وزن واقعی جسم چقدر است؟ (b) درچه شرائطی نیروسنج ۹۰n را نشان میدهد؟ (c) هرگاه طناب حامل آسانسور پاره شود وآسانسور سقوط‌آزاد کند نیروسنج چه درجه ایرا نشان میدهد .

۵ـ۱۶ هواپیمای موتور داری بایددو هواپیمای بی موتور را که بدنبال هم بآن وصل‌اند، از روی باند حرکت دهد. جرم هرهواپیمای بی‌موتور ۱۲۰۰kg ونیروی‌اصطکاك مؤثر برهریك ازآنها ۲۰۰۰n است. کشش‌مؤثر برطنابی‌که هواپیمای موتوردار را به‌اولین هواپیمای بی‌موتور وصل میکند نبایداز ۱۰۰۰۰ n تجاوزکند هرگاه سرعت لازم برای حرکت دادن هواپیمای بی‌موتور $30m/sec$ باشد. (a)درچه‌مدت‌میتوان باین‌سرعت‌رسید. (b) کشش مؤثر بر طنابیکه دو هواپیمای بی‌موتور را بهم وصل میکند در این حال‌چه اندازه است ؟

۵ــ۱۷ هرگاه ضریب اصطکاك لغزشی بین لاستیك و جاده ۰/۵ و سرعت اتومبیلی ۹۰km/hr باشد درچه فاصله‌ای پس‌از شروع عمل ترمز اتومبیل متوقف میشود.

۵ــ۱۸ بسته‌ای‌بجرم۴۰kgm بر کف‌کامیونی قرار داردضریب اصطکاك لغزش ۰/۲ وضریب اصطکاك حالت سکون ۰/۳ است اندازه وجهت نیروی اصطکاك مؤثر بر بسته را . (a) وقتی‌کامیون باشتاب $1 m/sec^2$ و (b) باشتاب $2/5 m/sec^2$ در حرکت است بدست آورید .

۵ــ۱۹ بالنی باشتاب a که‌کمتراز g شتاب ثقل است پائین میآید . وزن بالن را w فرض‌کنید . چه وزنW ازمحتویات بالن ازآن بیرون ریخته شود تا بالن باشتاب a روبیالا حرکت‌کند .

۵ــ۲۰ جسمی‌بجرم ۱۰۰kg بانیروی افقی ۲۰۰۰n روی سطح شیب‌داری‌که با افق زاویه ۳۷° میسازد بیالا رانده میشود . ضریب اصطکاك لغزشی ۰/۳ است . (a) شتاب‌جسم و (b) سرعت‌آن‌پس‌از پیمودن فاصله ۰/۸m روی‌سطح و (c) نیروی قائمی‌راکه از طرف سطح برجسم وارد میشود بدست‌آورید . نیروها را مؤثر بر مرکز ثقل فرض‌کنید .

۵ــ۲۱ جسمی بر سطح شیب داری که با افق زاویهٔ θ میسازد قرار دارد . ضریب اصطکاك لغزشی بین جسم وسطح ۰/۵۰ وضریب اصطکاك استاتیکی ۰/۷۵ است وقتی θ از صفرشروع بافزایش‌کند، (a) بازاء چه مقدار θ جسم شروع بلغزیدن میکند . (b) جسم دراین‌حال با چه شتابی شروع بحرکت میکند . (c) چه زمانی لازم است تاجسم روی سطح ۴m بلغزد .

۵ــ۲۲ (a) چه نیروی افقی ثابتی برجسمی بجرم ۸kg واقع برسطحی افقی اثر کند تا آنرا با شتاب $2m/sec^2$ بحرکت درآورد. ضریب‌اصطکاك لغزشی ۰/۵ فرض شود (b) هرگاه این جسم را بطنابی بسته طنابرا از روی قرقره‌ای‌عبور دهیم‌چه وزنه‌ای‌بانتهای دیگرطناب وصل‌کنیم تا همین‌شتاب در دستگاه پیدا شود (وضع جسم درحالت اخیرشبیه‌شکل ۵ــ۶ است .)

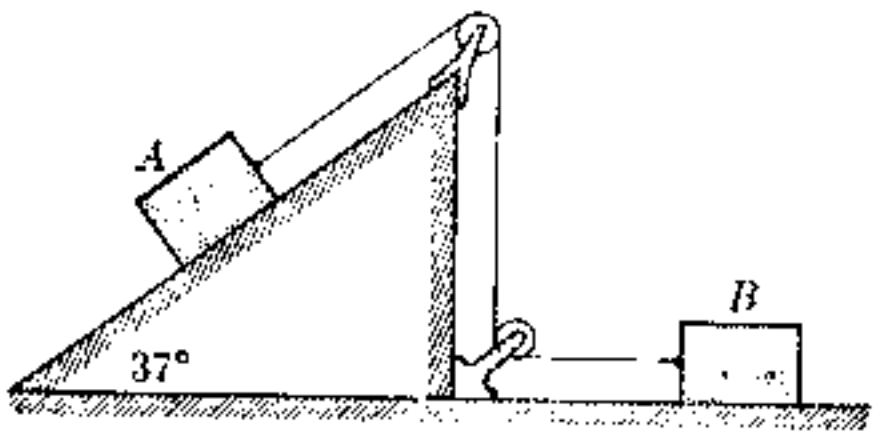
۵ــ۲۳ جسمی بجرم۴kgm روی‌سطح‌افقی‌قرار دارد. طنابی‌که ازروی قرقره بدون اصطکاکی‌عبورمیکنداین‌جسم را بجسم‌آویزانی‌بجرم ۴kgm وصل مینماید . ضریب اصطکاك لغزشی بین جسم‌متکی و سطح ۰/۵ است . (a) کشش‌طناب و (b) شتابرا بدست آورید.

۵ــ۲۴ جسمی‌بجرم ۲kgm را ازپائین‌سطح شیب‌داری‌که با افق‌زاویه ۳۰° میسازد باسرعت $22m/sec$ بطرف بالای سطح پرتاب میکنیم ضریب اصطکاك لغزشی ۰/۳ است . (a) نیروی اصطکاك مؤثر برجسم را وقتی بالا میرود بدست‌آورید . (b) جسم چه مدت‌روی سطح بالا میرود . (c) جسم تا چه فاصله‌ای روی‌سطح بالا میرود . (d) پس از چه مدت

ازنقطه اوج خود روی سطح مجدداً بنقطه شروع حرکت بـازمیگردد . (e) با چه سرعتی باین نقطه میرسد . (f) هرگاه جرم جسم۵kgm بود جوابها چه بود .

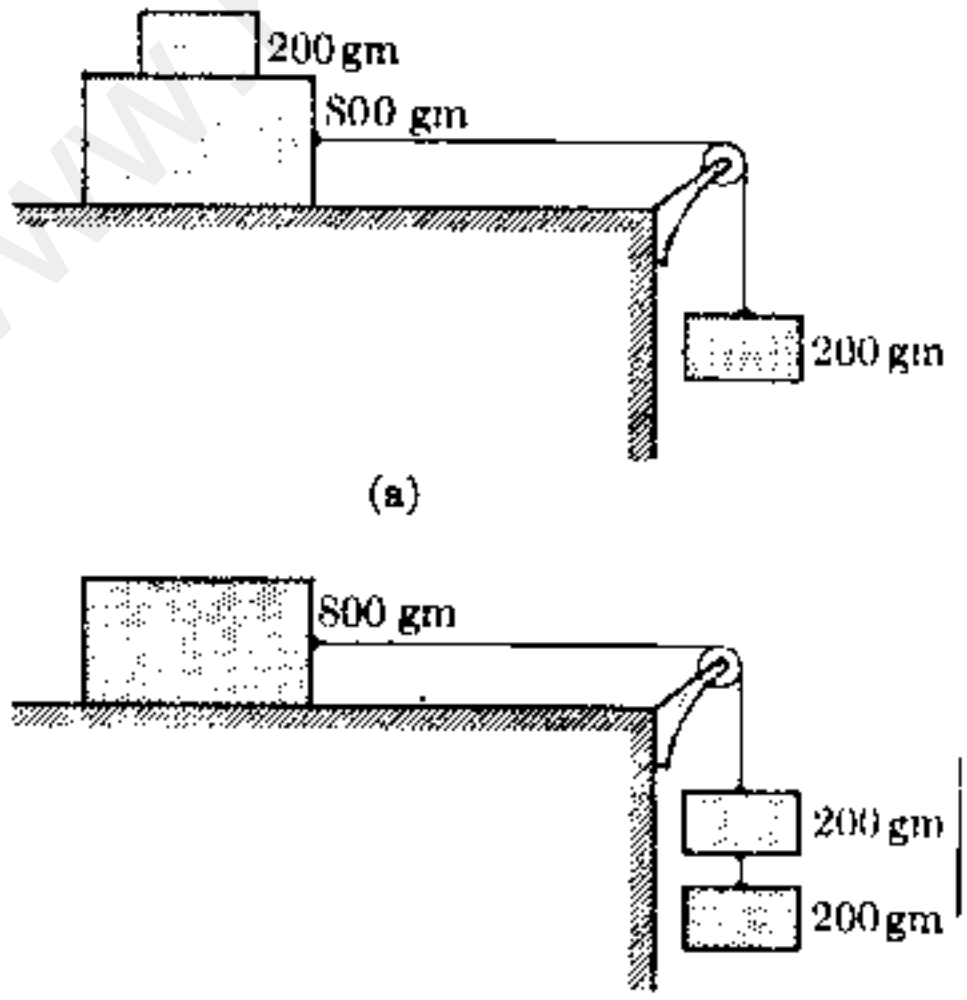
۲۵ـ۵ جسمی بجرم۱۹kgm برسطح افقی بدون اصطکاکی قراردارد وبکمك طنابی که از روی قرقره بدون اصطکاکی‌عبورمیکند بجسم‌آویزانی وصل‌است. هرگاه‌جسم‌آویزان را که ۱m بالای زمین قرار دارد بدون سرعت‌اولیه رها کنیم پس‌از دوثانیه‌بزمین‌میرسد (a) وزن جسم آویزان و(b) کشش مؤثر برطنابرا بدست‌آورید .

۲۶ـ۵ جرم‌هریك ازدوجرم A و B که درشکل۵ـ۱۲ نشان داده‌شده‌است۲۰kgm است. هرگاه قرقره‌ها سبك وبدون اصطکاك فرض شوند . (a) زمان لازم برای اینکه جسم A یك متر روی سطح پائین آید و (b) کشش مؤثر برطنابرا بدست آورید .



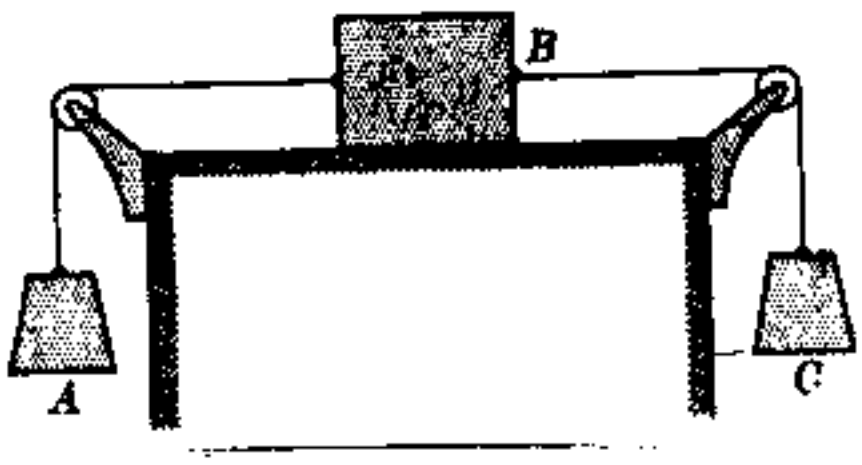
شکل ۵ـ۱۲

۲۷ـ۵ مطابق شکل ۵ـ۱۳ (a) جسمی بوزن ۲۰۰ گرم روی جسم دیگری بوزن ۸۰۰ گرم قرار دارد وطنابی جسم ۸۰۰ گرمی را به وزنه آویزان ۲۰۰ گرمـی دیگری وصل میکند . دستگاه در این‌حالت باسرعت ثابت حرکت میکند . اگر مطابق شکل۵ـ۱۳ (b) وزنه ۲۰۰ گرمی را از روی ۸۰۰ گرمی برداشته روی وزنه آویزان قراردهیم. (a) شتاب‌حرکت دستگاه را دراین‌حالت و (b) کشش مؤثـر برطنابرا در حالت اخیر بدست آورید.

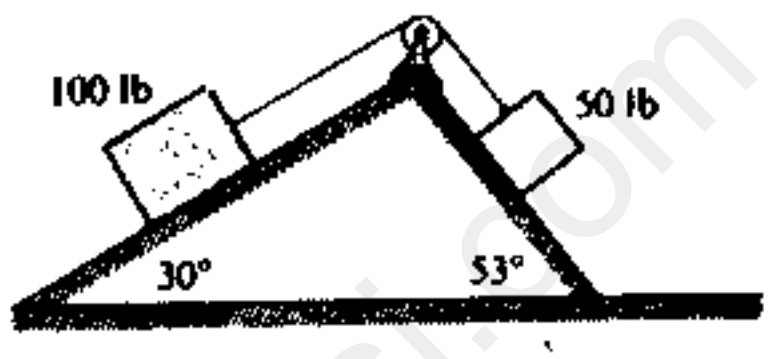


شکل ۵ـ۱۳

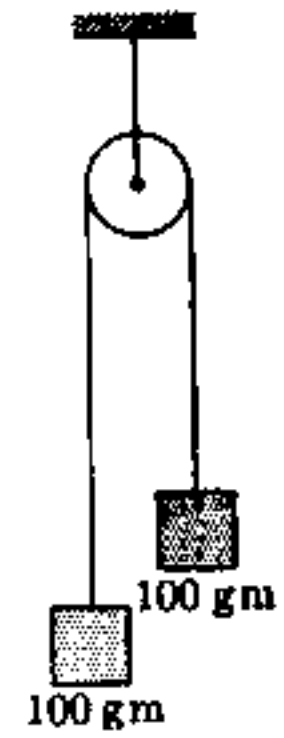
۲۸ــ۵ جرم جسم A در شکل ۵ــ۱۴ برابر ۱/۵kgm و جرم جسم B برابر ۱۵kgm است ضریب اصطکاك لغزشی بین B و تکیه‌گاه ۰/۱ است . (a) وزن جسم C چقدر باشد تا پائین آمده بدستگاه شتاب $2m/sec^2$ بدهد. (b) در اینحال کشش مؤثر بر طنابها چیست .



شکل۵ــ۱۴



شکل۵ــ۱۵



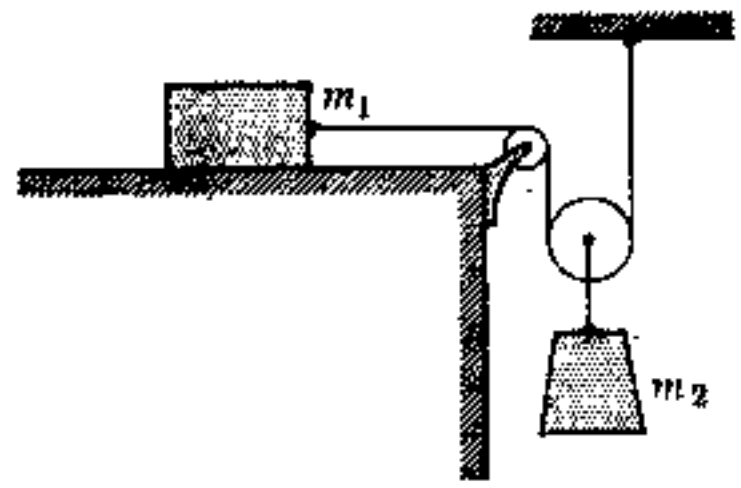
شکل ۵ــ۱۶

۲۹ــ۵ مطابق شکل ۵ــ۱۵ درجسم باطنابی که ازروی قرقره بیوزن وبدون اصطکاکی عبورمیکند بهم وصل‌اند . این دوجسم بردو سطح شیب‌دار بدون اصطکاك قرار دارند . (a) دستگاه بکدام طرف حرکت میکند (b) شتاب و (c) کشش مؤثر بر طناب چه اندازه هائی میباشند .

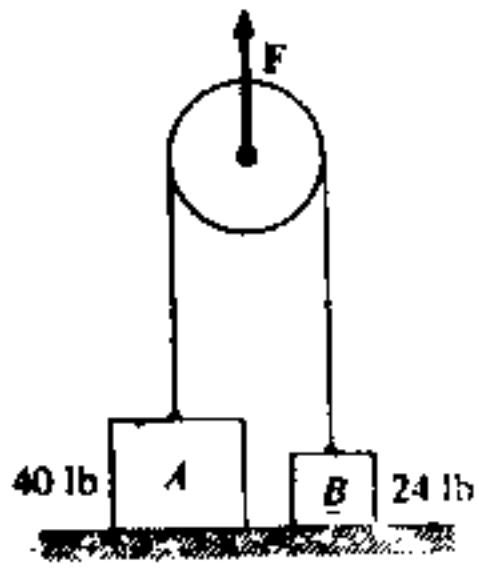
۳۰ــ۵ مطابق شکل ۵ــ۱۶ دوجسم ۱۰۰ گرمی بدو انتهای طنابی که از روی قرقره بدون اصطکاکی عبورمیکند آویزانند . وزنه ۴۰ گرمی روی جسم سمت راست قرار داده پس از دوثانیه آنرا برمیدارند . (a) پس از برداشتن وزنه ۴۰ گرمی هریك از دوجسم درمدت یك ثانیه چقدر راه طی میکنند . (b) پیش از برداشتن وزنه مذکور کشش مؤثر برطناب چه اندازه است . (c) پیش از برداشتن این وزنه کشش مؤثر برطناب حامل قرقره چه اندازه است از وزن قرقره صرفنظر شود .

۳۱ــ۵ دو وزنه ۱۰lb مطابق شکل ۵ــ۱۶ بدو انتهای طناب واقع بر قرقره‌ای وصل‌اند . چه وزنه‌ای برروی یکی از آنها قرار دهیم تا دستگاه درمدت دوثانیه ۴ فوت راه طی کند .

۳۲ــ۵ شتاب دوجسم را که درشکل ۵ــ۱۷ نشان داده شده‌اند برحسب m_1 و m_2 و g بدست آورید . مقاومت هوا ناچیز است .



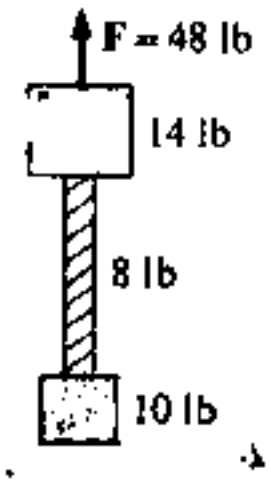
شکل ۵–۱۷



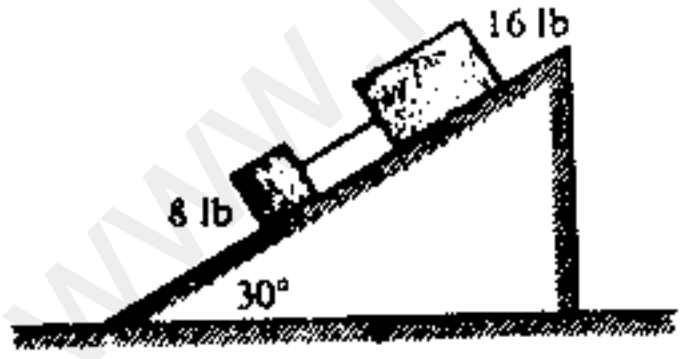
شکل ۵–۱۸

۵–۳۳ دو جسم ۴۰lb و ۲۰lb شکل ۵–۱۸ ابتدا بحال سکون روی سطح تکیه‌گاه قرار دارند . نیروی F رو بیالا برمحور قرقره اثر میکند شتاب هریك از دو وزنه را وقتی نیروی F مقادیر (a) ۲۴lb ، (b) ۴۰lb ، (c) ۷۲lb ، (d) ۹۰lb ، (e) ۱۲۰lb را داشته باشد بدست‌آورید .

۵–۳۴ دوجسمی که در شکل ۵–۱۹ نشان داده شده‌اند باطناب متشابهی بوزن ۸lb بهم وصل‌اند . (a) شتاب دستگاه (b) کشش دربالاترین مقطع طناب و (c) کشش درمقطع وسطی طنابرا بدست‌آورید .



شکل ۵–۱۹



شکل ۵–۲۰

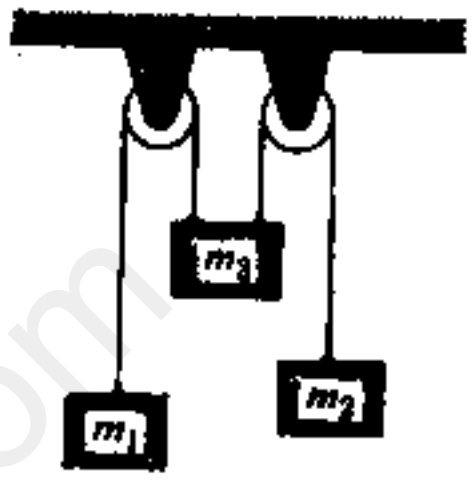
۵–۳۵ دوجسم بوزن‌های ۸lb و ۱۶lb مطابق شکل ۵–۲۰ بهم وصل‌وروی سطح شیب‌داری قرار دارند . ضریب اصطکاك لغزشی بین سطح اتکاء با وزنه ۸lb برابر ۰/۲۵ وبا وزنه ۱۶lb برابر ۰/۵ است . (a) شتاب هروزنه و (b) کشش‌طنابرا حساب‌کنید .

۵–۳۶ جرم‌دوجسمیکه بدوانتهای‌طنابی واقع بر قرقره ثابت‌وصل‌اند بترتیب ۵kg و ۳kg میباشد . هردو وزنه بحال سکون و در ارتفاع ۱/۲۵m بالای سطح زمین قرار دارند . هرگاه هردو را آزاد بگذاریم وزنه سبکتر حداکثر تا چه ارتفاعی بالا میرود .

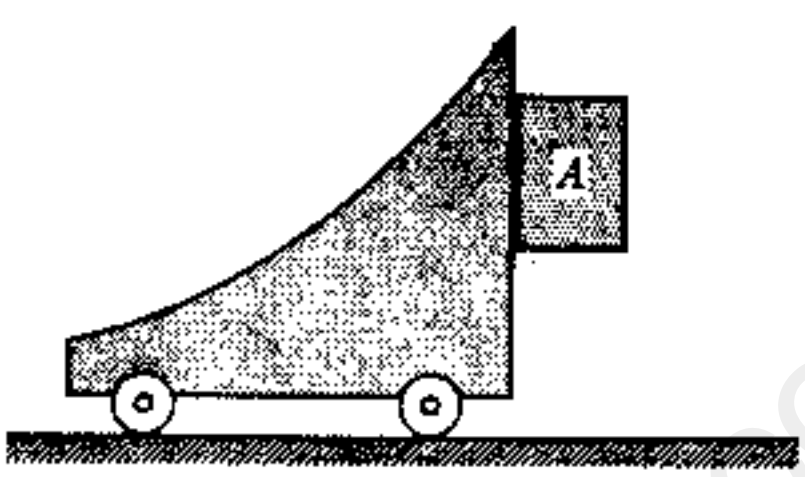
۵–۳۷ شخصی بجرم ۸۰kgm درون کفه‌ای بجرم ۴۰kgm نشسته‌است. یکطرف‌طنابی

بیالای کفه وصل وطرف دیگر آن پس‌از عبور از روی قرقره ثابت بدون اصطکاکی در دست شخص قرارمیگیرد . شخص طنابرا باچه نیروئی بکشد تا شتاب $0/5 m sec^2$ شود .

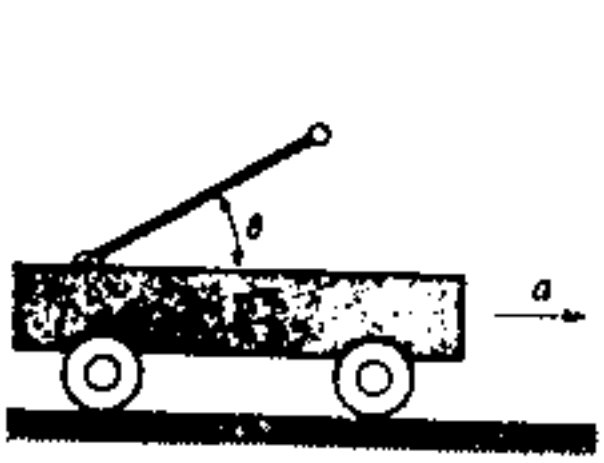
۳۸ـ۵ شکل ۵ـ۲۱ ماشین‌آتود مضاعفی‌رانشان میدهد . از اصطکاك ووزن قرقره‌ها صرفنظر کرده شتاب هریك از وزنه‌ها را حساب کنید .



شکل ۵ـ۲۱



شکل ۵ـ۲۲



شکل ۵ـ۲۳

۳۹ـ۵ ارابه شکل۵ـ۲۲ باچه شتابی‌حرکت‌کند تاوزنه A نیفتد . ضریب اصطکاك μ است . وضع وزنه درنظر ناظری که درون ارابه نشسته است چگونه میباشد .

۴۰ـ۵ انتهای چپ میله بیوزنی‌که در شکل ۵ـ۲۳ نشان داده شده است به ارابه لولا شده و بانتهای راست آن نقطه مادی‌سنگینی‌وصل است . هرگاه ارابه با شتاب a بطرف راست حرکت‌کند زاویه θ چقدر میشود . وضع در نظر ناظری‌که در ارابه نشسته چگونه است .

۴۱ـ۵ انحراف شتاب سنجی که در شکل ۵ـ۸ نشان داده شده درهریك از حالات زیرچگونه است ؟ (a) دستگاه حرکت تندشونده متوجه براست‌دارد . (b) دستگاه حرکت کند شونده بطرف چپ دارد . (c) دستگاه حرکت تند شونده بطرف راست دارد . (d) دستگاه حرکت‌کند شونده‌بطرف چپ دارد . (e) دستگاه روی سطح شیب داری بحال‌سکون ایستاده است . (f) دستگاه را روی‌سطح شیب‌داری بطرف بالا پرت میکنند ابتدا بطرف‌بالا حرکت میکند سپس می ایستد و بالاخره بطرف پائین حرکت میکند .

۴۲ـ۵ (a) باچه سرعتی جسمی را درامتدادقائم بطرف بالا پرتاب‌کنیم تا از زمین بینهایت دور شود . اندازه سرعت را برحسب g_0 شتاب ثقل در سطح زمین و R شعاع‌زمین بدست‌آورید . (b) برحسب همان مقادیر، سرعت جسمی را که ازبینهایت‌دور بزمین‌سقوط میکند درلحظه برخورد بزمین بدست آورید . (c) اندازه این سرعت‌ها را به km/hr تبدیل‌کنید (d) بگوئید چرا اندازه این‌سرعت‌ها بینهایت نیست ؟

۴۳ـ۵ جرم قایق مذکور درمسئله۴ـ۳۷ برابر ۱۶۰۰kg است. نیروی لازم‌برای کندکردن حرکت قایق را دردوحالت زیرحساب کنید . (a) سرعت آن 6m/sec است .

(b) سرعت آن $3m/sec$ است . (c) هرگاه قایق‌باسرعت $3m/sec$ یدك‌کشیده‌شودکشش درطناب یدك‌کش چه اندازه است ؛

۴۴ـ۵ جسمی بجرم $5kgm$ درون مایع ویسکوزی سقوط میکنـد نیروی ثابتی برابر $20n$ روبپائین برجسم وارد میشود و نیروی مقاوم وارد برآن‌برابر $5v$ است. v سرعت جسم برحسب متر برثانیه میباشد . (a) شتاب‌اولیه a_0 چه اندازه بوده است . (b) وقتی سرعت به $3m/sec$ میرسد شتاب چه‌اندازه است ؟ (c) وقتی شتاب به $0/1a_0$ رسید سرعت چه‌اندازه‌است ؟ (d) سرعت‌حد v_T را بدست‌آورید . (e) **relaxation time** یعنی t_R را بدست‌آورید . (f) وضع وسرعت شتاب جسم را در دوثانیه پس‌از شروع‌حرکت پیدا کنید . (g) زمان رسیدن به $0/9\,v_T$ را پیدا کنید . (h) منحنی‌تغییرات v برحسب t را درفاصله زمانی $3sec$ رسم‌کنید .

۴۵ـ۵ جسمی درون سیالی سقوط میکند و نیروی مقـاوم وارده از سیال برآن از رابطه $R=-kv^2$ بدست میآید . (a) دیاگرامی که جهت حرکت را نشـان دهد رسم کرده بکمك رسم بردارها نیروهای وارد برجسم را مشخص‌کنید . (b) با استفاده ازقانون دوم نیوتون وبدون‌کمك فرمول‌های حاصله طبیعت حرکت را مورد بحث‌قرار دهید . (c) نشان دهیدکه جسم به سرعت حدی خواهد رسید واندازه این سرعت‌را بدست‌آورید . (d) **relaxation time** را بدست آورید . (e) معادله سرعت برحسب زمان را بیابید .

۴۶ـ۵ جسم ساکنی بجرم m تحت تأثیر نیروئی با امتداد معین که اندازه آن با زمان بشکل‌زیر تغییر میکند قرار میگیرد $F=F_0\left[1-\left(\frac{t-T}{T}\right)^2\right]$ که درآن F_0 و T مقادیرثابت‌اند . نیرو فقط بمدت $2T$ برجسم‌اثرمیکند . (a) منحنیF را برحسب t رسم‌کنید . (b) ثابت‌کنیدکه سرعت v پس از زمان $2T$ برابر $\frac{4F_0T}{3m}$ میشود . (c) مقادیرعددی برای v و T و m طوری اختیار کنیدکه مسئله درمورد یك توپ تنیس صادق باشد و F_0 را حساب‌کنید بگوئید تا چه حد این مسئله باواقعیت وفق میدهد ؟

فصل ششم

حرکت درصفحه

۶ـ۱ ، حرکت درصفحه

تا اینجا بحث ما به حرکاتی اختصاص داشت که مسیر آن خط مستقیم بود و حرکات مستقیم‌الخط نامیده‌میشدند. دراین‌فصل‌درباره حرکت‌درصفحه صحبت‌خواهیم کرد که‌درآن‌مسیر حرکت‌یك منحنی‌است که تمام‌نقاط آن دریك‌صفحه قرار گرفته‌اند. حرکت‌ماه واقمارمصنوعی بدور زمین‌و سیارات بدورخورشید. حرکت گلوله‌های توپ وتفنگ وتوپ تنیس و یابطور کلی هرنوع پرتابه نمونه‌هائی ازحرکت درصفحه هستند.

هرگاه حرکت را تغییر پیوسته وضع جسم‌بدانیم، جسم متحرك درهرلحظه در صفحه مختصات دارای x و y معینی است . معادله مسیرعبارت از رابطه‌ای بین x و y جسم در لحظات مختلف وبصورت‌کلی $y=f(x)$ نمایش داده میشود . معمولا در نوشتن معادله حرکت ، وضع جسم را بصورت تابعی اززمان بیان میکنند . هرگاه s فاصله متحرك ازیك نقطه دلخواه واقع برمسیرحرکت باشد (که مبدء اختیار شده است) $s=f(t)$ صورت‌کلی معادله حرکت است ولی بهتراست‌که بجای رابطه زیر نوشته شود :

$$x=f_1(t) \qquad y=f_2(t) \qquad (۱-۶)$$

دو معادله فوق‌که مختصات جسم را درلحظات مختلف برحسب زمان مشخص میکنند **معادلات پارامتری** حرکت مینامند

مسائلی که‌دراین مبحث مطرح میشود بدو دسته تقسیم میشوند . در دسته اول حرکت جسم معلوم است و باید سرعت شتاب ونیروهای مؤثر برآن معلوم میشود. مثلا جسمی‌بطنابی بسته شده وبرمحیط دایره‌ای حرکت دورانی‌مشابه دارد . کشش مؤثر برطناب چه‌اندازه است ؟ در دسته دوم نیروی مؤثر بر جسم معلوم است میخواهیم وضع ، سرعت و شتاب جسم‌را

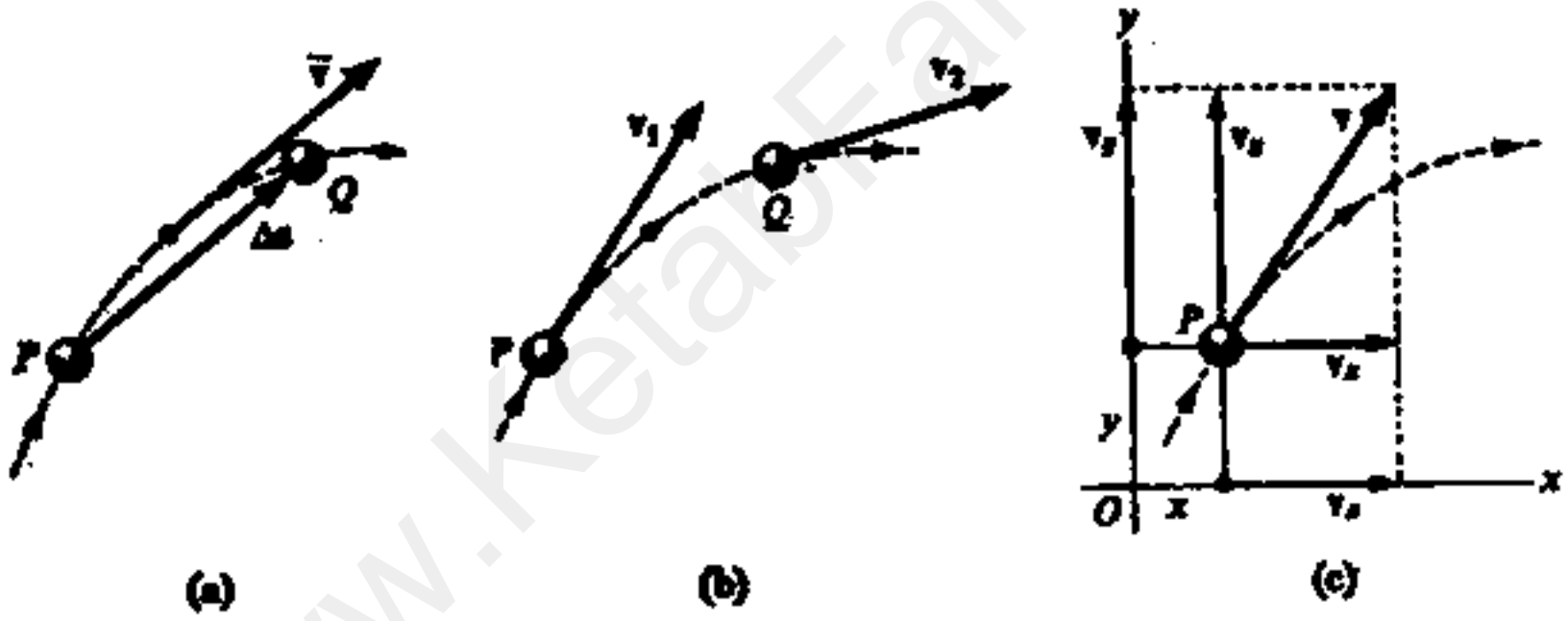
درهرلحظه پیداکنیم . حرکت سیارات بدور خـورشید و حرکت راکت نمونه‌هائی از دسته اخیر الذکرهستند .

۲-۶ ، سرعت متوسط و لحظه‌ای

جسمی را مطابق شکل ۶-۱ (a) درنظرگیریدکه برروی پـك منحنی در حرکت است . نقاط P و Q دو وضع جسم را نشان میدهند . $\overrightarrow{\Delta s}$ بردارتغییرمکان جسم در حین انتقال از P به Q است . نظیرحرکت مستقیم‌الخط ، $\overrightarrow{V}$ سرعت متوسط جسم بنابرتعریف خارج قسمت بردار Δs بر Δt است یعنی :

$$\overrightarrow{V} = \Delta s / \Delta t \quad \text{سرعت متوسط} \qquad (۶-۲)$$

سرعت متوسط جسم درفاصله P و Q چنانکه زمان انتقال Δt باشد برای تمام‌مسیر-های مختلف مقداریست ثابت .



(a) (b) (c)

شکل۶-۱، (a) بردار $\overrightarrow{V} = \Delta s / \Delta t$ سرعت متوسط جسم را درفاصله P و Q نشان میدهد .
(b) بردارهای v_1 و v_2 سرعت‌لحظه‌ای جسم درنقاط P و Q مشخص میکنند . (c) v_x و v_y سرعت جسم درP را دردستگاه مختصات متعامد نشان میدهند .

سرعت متوسط کمیتی است برداری که هم امتداد وهم‌جهت با بردار Δs است . چون سرعت متوسط $\overrightarrow{V}$ مربوط به تمام فاصله Δs است درشکل‌آنرا وسط PQ رسم کرده‌اند .

سرعت لحظه‌ای V درنقطه P حدسرعت متوسط درفاصله PQ است وقتی Q بینهایت نزدیك به P انتخاب شود .

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \quad V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \qquad (۶-۳)$$

وقتی Q بینهایت نزدیـك به P انتخاب شود امتداد بردار Δs بهمماس برمنحنی

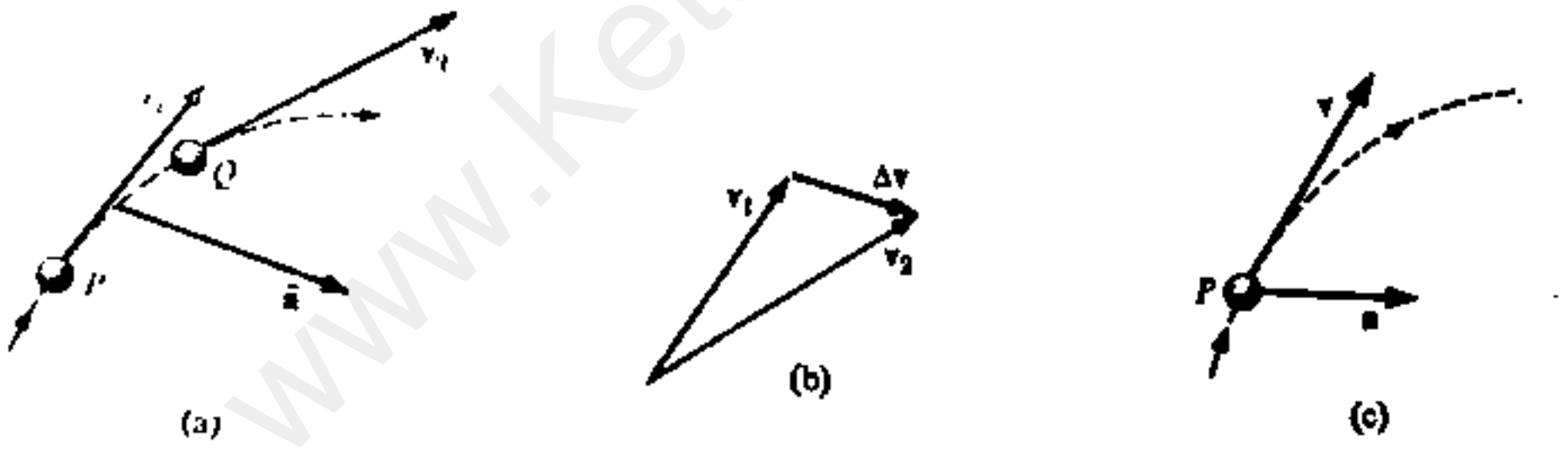
در P نزدیك و درحدبرآن منطبق میشود. بنابراین امتداد سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر است . درشکل ۶ـ۱ (b) سرعت لحظه‌ای درنقاط P و Q نشانداده شده است .

درشکل ۶ـ۱ (c) سرعت جسم را درنقطه P بمؤلفه‌های‌آن دردستگاه مختصات‌متعامد تجزیه‌کرده اند . وقتی جسم بر مسیرخود درحرکت است تصاویرآن بردومحور x و y درامتدادهای مذکور حرکات مستقیم‌الخطی خواهند داشت‌که سرعت‌های‌آنها عبارتند از :

$$v_x=\frac{dx}{dt} \qquad v_y=\frac{dy}{dt}$$

سرعت تصویـرجسم همان مؤلفه‌های سرعت جسم در دستگاه مختصات xy میباشد . بنابراین اگر x و y بصورت توابعی اززمان مشخص باشند با مشتق‌گرفتن ازاین توابع برحسب زمان v_x و v_y بدست میاید و سپس مطابق شکل ۶ـ۱ (c) اندازه ، امتـداد و جهت v را میتوان پیداکرد . امتداد مسیر نیز درهر نقطه همان امتداد سرعت است و لذا بآسانی مشخص میشود .

برعکس اگر v_x و v_y بصورت توابعی از زمان مشخص‌باشند با انتگراسیون میتوان x و y مختصات جسم را بدست‌آورد .



شکل۶ـ۲، (a) بردار $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط جسم را در فاصله PQ مشخص میکند (b) تعیین $\Delta v = v_2 - v_1$ازطریق(c)سرعت لحظه‌ای v وشتاب لحظه‌ای a درنقطهP بردارv مماس برمسیروبردارa در قسمت مقعرمنحنی بداخل ممتد است .

۶ـ۳ ، شتاب متوسط و لحظه‌ای

درشکل ۶ـ۲ (a) برادرهای v_1 و v_2 سرعت‌های لحظه‌ای جسم را درنقاط Pو Q مشخص میکنند . امتـداد ، جهت واندازه v_2 الزاماً با امتداد ، جهت واندازه v_1 متفاوت

است . با وجوداینکه درحالات خاص اندازه $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ میتوانند مساوی‌باشد دراین شکل برای نشاندادن حالت کلی‌آنها را نامساوی رسم کرده‌اند .

$\bar{\mathbf{a}}$ شتاب متوسط جسم وقتی‌از $\mathbf{P}$ به $\mathbf{Q}$ منتقل میشود، نظیرآنچه درحرکت مستقیم‌الخط دیدیم عبارتست ازنسبت $\Delta\mathbf{v}$ بردارتغییرسرعت بناصله زمانی Δt

$$\bar{\mathbf{a}}=\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \quad \text{شتاب متوسط} \qquad (۴-۶)$$

شتاب متوسط کمیتی است برداری هم امتداد و هم‌جهت با بردار تغییرسرعت $\Delta\mathbf{v}$. بردار تغییرسرعت تفاضل برداری دوبردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ است یعنی:

$$\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$$

ویا :

$$\mathbf{v}_2=\mathbf{v}_1+\Delta\mathbf{v}$$

همانطور که در قسمت ۱ـ۱۰ بیان شد میتوان $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ را از مبدء مشترکی [ش۶ـ۲(b)] رسم و دواتتهای دو بردار را بهم وصل نمود. جهت $\Delta\mathbf{v}$ باید طوری مشخص شودکه $\mathbf{v}_2$ جمع برداری دوبردار $\mathbf{v}_1$ و $\Delta\mathbf{v}$ باشد .

درشکل ۶ـ۲ (a) بردارشتاب متوسط در وسط فاصله $\mathbf{PQ}$ رسم شده است تاتعلق‌آن بتمام فاصله مذکورنشان داده شده باشد .

شتاب لحظه‌ای $\mathbf{a}$ در نقطه $\mathbf{P}$ حدشتاب‌متوسط وقتی $\mathbf{Q}$ به $\mathbf{P}$ بینهایت نزدیک‌انتخاب شود میباشد . در اینحال $\Delta\mathbf{v}$ و Δt هردو بسمت صفرمیل میکنند .

$$\text{شتاب لحظه‌ای } \mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

بردار شتاب لحظه‌ای درنقطه $\mathbf{P}$ درشکل ۶ـ۲ (c) نشانداده شده است . توجه‌داشته باشیدکه امتداد سرعت و شتاب برهم منطبق نیستند چنانکه در شکل ۶ـ۲ (b) نشانداده شده است این بردار همیشه درقسمت مقعرمسیرو بداخل‌ممتد است.

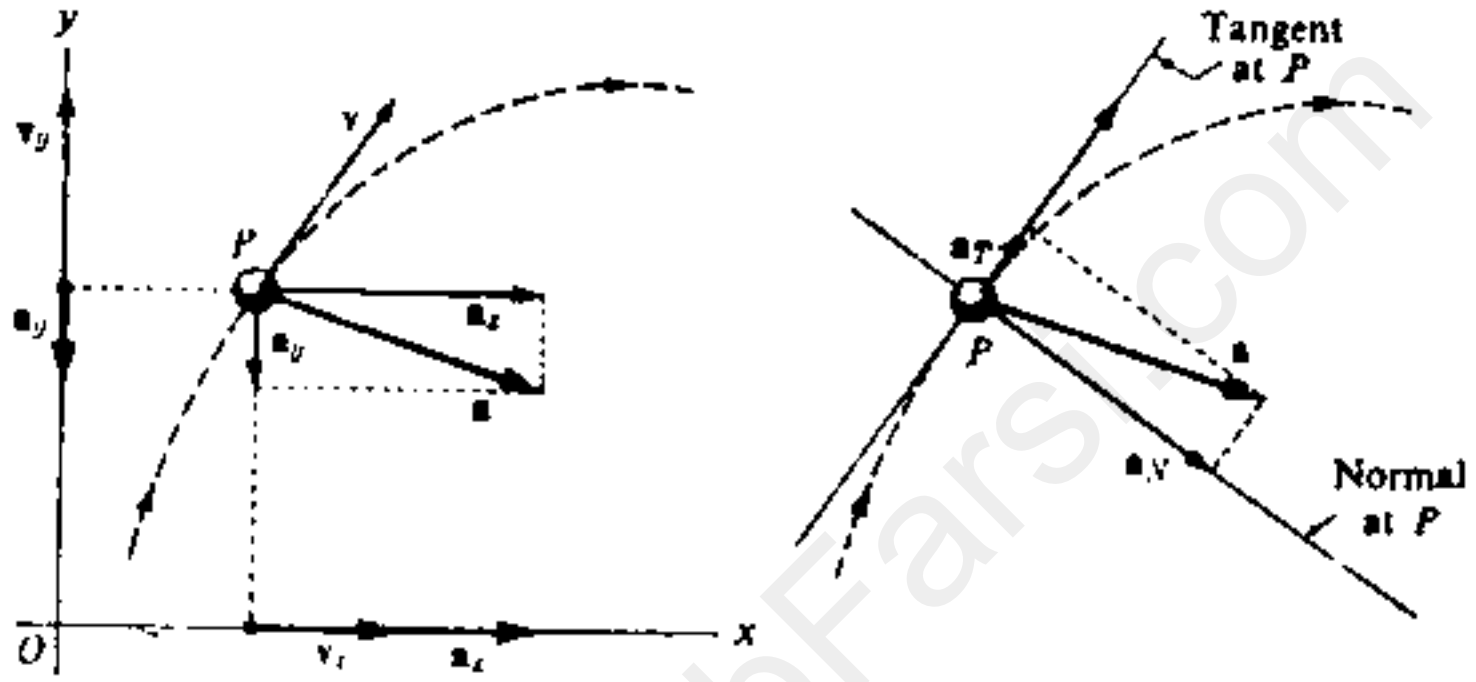
۶ـ۴ ، مؤلفه‌های شتاب

شکل ۶ـ۳ (a) حرکت جسم را نسبت بدستگاه مختصات متعامدی نشان میدهد . شتاب تصاویرجسم دراین دستگاه عبارتند از :

$$\mathbf{a}_x=\frac{d\mathbf{v}_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt_2} \qquad \mathbf{a}_y=\frac{d\mathbf{v}_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

این شتابها مؤلفه **a** شتاب جسم در دستگاه مختصات **xy** میباشند . بنابراین اگر اندازه **x** و **y** مختصات جسم بصورت توابعی از زمان دردست باشد، با دوبار مشتق گرفتن ازآن‌ها، مؤلفه‌های‌شتاب، یعنی a_x و a_y بدست میایدکه میتوان با ترکیب آنها [نظیرشکل ۶ـ۳ (a)] اندازه ، امتداد وجهت **a** بردار شتاب را مشخص نمود . وقتی شتاب معلوم‌باشد نیروی مؤثربرجسم را میتوان با استفاده ازقانون دوم نیوتون بدست‌آورد .

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

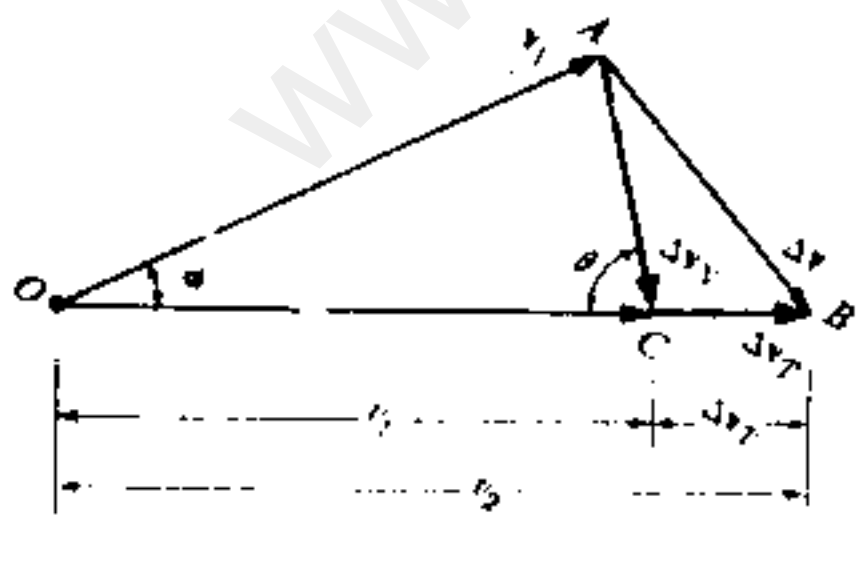


(a) (b)

شکل ۶ـ۳ (a)شتاب a بمؤلفه‌های a_x و a_y در دستگاه مختصات xoy تجزیه شده (b) همان شتاب بدو مؤلفه درامتداد مماس a_T و ازمال برمسیر a_N تجزیه شده‌است .

برعکس هرگاه **F** معلوم باشد **a** شتاب وسپس مؤلفه‌های‌آن a_x و a_y را میتوان با استفاده‌ازقانون‌دوم‌نیوتون‌بدست‌آورده بادوباراانتگراسیون، مختصات **x** و **y** راءشخص‌نمود.

شتاب متحرك را وقتی مسیر حرکت‌آن منحنی‌باشدمیتوان‌درروی دو امتداد عمودبرمسیرومماس برآن (بترتیب a_N و a_T) تجزیه نمود [ش ۶ـ۳ (b)] . برخلاف مؤلفه‌های شتاب دردستگاه متعامد **xoy** امتداد وجهت مؤلفه های a_N و a_T در فضا ثابت نیستند . مؤلفه a_T از تغییر اندازه بردار **v** ومؤلفه a_N از تغییرجهت بردار **v** حاصل میشود .



شکل ۶ـ۴ بردار $\Delta\mathbf{v}$ بدومؤلفه قائم $\Delta\mathbf{v}_N$ ومماس $\Delta\mathbf{v}_T$ تجزیه شده مؤلفه قائم تغییرسرعت ازتغییر امتداد v ومؤلفه مماس آن ازتغییردر اندازه v حاصل میشود .

این موضوع بطرز واضحی در شکل ۶ـ۴ نشانداده شده است . بردار **CA** یا $\mathbf{v}_1$

سرعت متحرك رادر نقطه P وبردار **OB** یا $\mathbf{v}_2$ سرعت را درنقطه Q نشان میدهد (درضمن بشکل ۶ـ۲ (a) نیزرجوع کنید) بردار **AB** تغییرسرعت یعنی $\Delta\mathbf{v}$ است .

چنانکه می‌بینید بردار $\Delta\mathbf{v}$ درشکل ۶ـ۲ (a) و ۶ـ۴ هم امتداد و هم جهت‌هستند. (فقط مقیاس رسم‌آنها باهم متفاوت است .) اندازه بردار **OC** در شکل ۶ـ۴ مساوی **OA** انتخاب‌شده‌است. میتوان بردار $\Delta\mathbf{v}$ راجمع برداری‌دوبردار **AC** و **CB** دانست. طول‌بردار **CB** اختلاف طول بردارهای **OA** و **OB** است یعنی برابر است با اختلاف اندازه های دوبردار $\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{v}_2$ یا **تغییرات اندازه سرعت** . هرگاه‌آنرا بر Δt تقسیم‌کنیم شتاب حاصل ازتغییر اندازه سرعت بدست میاید .

هرگاه اندازه سرعت تغییرنکند بازهم شتاب حرکت وجودخواهد داشت زیرا بردار سرعت تغییرکرده وتغییرات‌آن برابر **AC** است . این تغییر دراثر پیدایش تغییرجهت در بردار سرعت بوجودآمده است و هرگاه‌آنرا بر Δt تقسیم‌کنیم شتاب حاصل از تغییرجهت سرعت بوجود خواهدآمد . یعنی هرگاه جسمی با تندی ثابت برمسیر منحنی حرکت‌کند حرکت‌آن دارای شتاب است زیرا سرعت‌کمیتی‌است برداری. نه تنها تغییر در اندازه بلکه تغییر درجهت ویا امتدادآن بمعنی تغییرسرعت است. (شکل۶ـ۴)

حال فرض‌کنید نقطه Q درشکل ۶ـ۴ (a) به نقطه P نزدیك‌شود بردار **OB** شکل ۶ـ۴ بطرف **OA** چرخیده اندازه زاویه φ بسمت صفر و θ بسمت 90° میل میکند. یعنی امتدادبردار **AC** بخط‌عمودبرامتداد $\mathbf{v}_1$ نزدیکتروبردار **CB** به‌امتدادموازی $\mathbf{v}_1$ نزدیکتر میشود . درحد بردار **AC** عمود بر $\mathbf{v}_1$ (وبنابراین عمود برمسیر) وبردار **CB** موازی $\mathbf{v}_1$ (وبنابراین مماس برمسیر) میشود و با وجود اینکه درشکل ۶ـ۴ امتدادهای $\Delta\mathbf{v}_N$ و $\Delta\mathbf{v}_T$ عمود و موازی $\mathbf{v}_1$ نیستند درحد وقتی Q و P بینهایت نزدیك بهم انتخاب شوند به عمود و موازی $\mathbf{v}_1$ تبدیل میشوند . حد $\frac{\Delta\mathbf{v}_N}{\Delta t}$ برابر $\mathbf{a}_N$ و حد $\frac{\Delta\mathbf{v}_T}{\Delta t}$ برابر $\mathbf{a}_T$ خواهد بود .

آیا «درواقع» دراثر تغییر امتداد سرعت جسم شتاب بوجود می‌آید ؟ جواب مثبت است. زیرا بنابر تعریف نسبت تغییر بردار سرعت بزمان شتاب نامیده می‌شود ولی جواب قانع‌کننده‌تری نیزوجود دارد که ذیلا آنرا بیان میکنیم: همانطورکه برای کم یا زیادکردن اندازه سرعت لازم است نیروئی به متحرك اثرکند برای تغییرامتداد وجهت‌سرعت نیزباید نیروئی بر آن وارد شود . وقتی بر جسمی نیروئی وارد نشود علاوه براینکه سرعت ثابت میماند امتداد حرکت نیز خط مستقیم است‌حال اگر بخواهیم جسم برمسیرمنحنی بحرکت درآید باید نیروئی عمود برامتداد حرکت برآن واردکنیم تاجهت آنرا تغییردهد (یالااقل نیروعمود بر امتداد حرکت دارای مؤلفه باشد) مؤلفه‌قائم برمسیر نیرو دراین امتدادشتاب

بجسم میدهد ونیزمؤلفه مماس برمسیر نیرو درامتداد اخیرالذکر شتابی درجسم ایجادمیکند ومیتوان نوشت:

$$F_N = ma_N \qquad F_T = ma_T$$

روش تجربی اندازه گیری‌جرم یك یون این است که‌آنرا باسرعت معینی‌درمیدان مغناطیسی پرتاب‌میکنند. میدان، نیروئی درامتداد عرضی‌بریون واردمیکند. پس‌ازآنکه شتاب عرضی یون معلوم شد جرم آنرا بآسانی میتوان حساب کرد.

ازبحث فوق نتیجه میشودکه اگر نیروی عرضی کاملا عمود برسرعت‌نقطه مادی باشد $F_T = 0$ ودرنتیجه $a_T = 0$ خواهد بود یعنی‌نقطه مادی‌شتاب مماسی ندارد. اندازه سرعت ثابت میماند وفقط امتداد آن تغییرمیکند.

هرگاه نیرو مؤلفه‌نرمال نداشته‌باشد $F_N = 0$ درنتیجه $a_N = 0$ یعنی تغییری در جهت سرعت ایجاد نمی‌شود ومسیر خطمستقیم‌است.

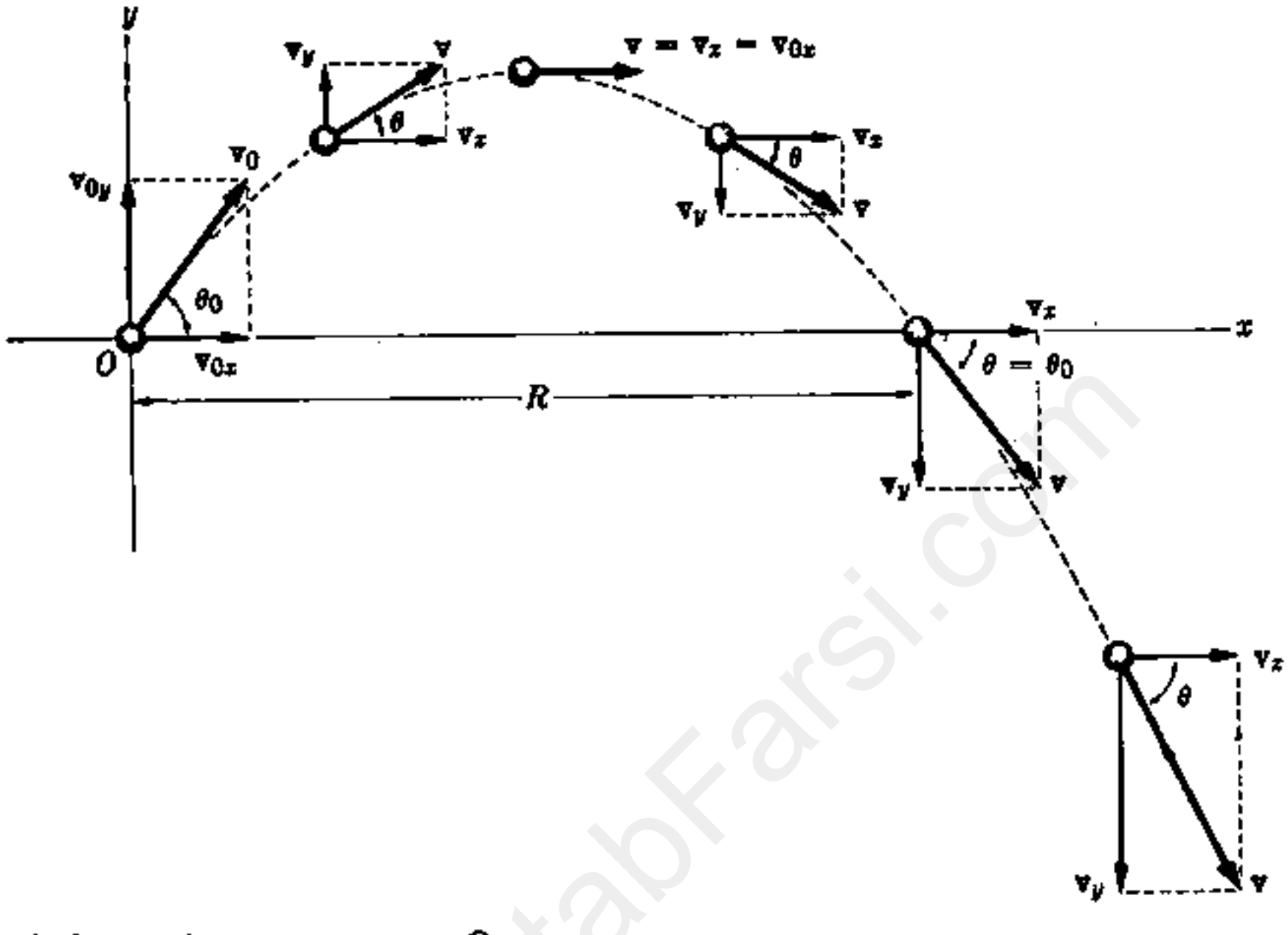
۶ـ۵ ، حرکت پرتابه

هرگاه بجسمی سرعت اولیه‌ای داده شود و شتاب حرکت جسم پس از آن منحصراً دراثرنیروی وزن ومقاومت هوا بوجودآید حرکت جسم را حرکت پرتابی مینامند. شلیك گلوله تفنك ، پرتاب توپ تنیس ، رها شدن بمب ازهواپیما وامثالهم نمونه‌هائی از حرکت پرتابی هستند .

نیروی جاذبه مؤثر برپرتابه متوجه بطرف مرکززمین است وبا مجذور فاصله جسم ازمرکز زمین نسبت معکوس دارد. بحث‌ما محدود به پرتابه هائی است‌که بعلت کمی طول مسیر،میتوان نیروی جاذبه مؤثربرآنها را ثابت‌فرض نمود.حرکت جسم دردستگاه مختصات متصل بزمین مورد بحث قرارمیگیرد. چون این دستگاه ، دستگاه مختصات اینرسی نیست بنابراین بکاربردن اصل دوم نیوتون درمورد پرتابه دراین دستگاه صددرصد صحیح نیست ولی هرگاه مسیر پرتابه‌محدود باشد، خطای محاسبه‌ازاین جهت بسیارکم است. ازمقاومت هوا نیز صرفنظر کرده فرض میکنیم جسم در خلاء حرکت میکند و زمین نیز بدور خود نمی‌چرخد .

چون تحت‌این شرائط ایده‌آلی ، تنها نیروی مؤثر بر پرتابه وزن آن‌است‌که آنهم ثابت فرض شده‌است ،حرکت جسم را دردستگاه مختصات متعامد xy مورد مطالعه قرار میدهیم. x را محور افقی و y را محور قائم ونقطه پرتاب را مبدأ مختصات فرض میکنیم (مثلا دهانه لوله تفنگ‌یاتوپ) در امتداد افقی نیروئی بجسم وارد نمیشود و در امتداد قائم نیروی مؤثر آن $-mg$ است. بنابرقانون دوم نیوتون میتوان‌نوشت:

$$a_x = \frac{F_x}{m} = 0 \qquad a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{-mg}{m} = -g$$



شکل۶ـ۵، مسیر پرتابه‌ایکه با سرعت اولیه v_0 وتحت زاویه θ_0 پرتاب شده‌است. فاصله افقی R را تعیین یا پیدامینامند

یعنی مؤلفه افقی شتاب صفر ومؤلفه قائم آن برابر g شتاب سقوط‌آزاد اجسام است. وقتی شتاب صفر است سرعت ثابت‌میماند. بنابراین مؤلفه سرعت درامتدادافقی ثابت است. ما حرکت جسم را نسبت به دومحور بطورجداگانه درنظر میگیریم و حرکت کلی جسم را ترکیبی ازاین دوحرکت میدانیم. **حرکت متشابه افقی** باسرعت ثابت **وحرکت‌متشابه‌التغییر** درامتداد قائم با شتاب ثابت.

اکنون سرعت جسم را درنظر میگیریم. درشکل ۶ـ۵ محورهای مختصات افقی و قائم بترتیب x و y ومبدأ مختصات نقطه پرتاب جسم فرض شده است. درلحظه $t = 0$ جسم‌در مبدأ مختصات است. سرعت جسم را در مبدأ مختصات **سرعت اولیه** نامیده، آنرا با v_0 نشان میدهیم (سرعتی‌که گلوله تفنگ درحین خروج ازلوله داراست.) سرعت اولیه را بدو مؤلفه v_{0x} که برابر $v_0\cos\theta_0$ است و v_{0y} که برابر $v_0\sin\theta_0$ میباشد تجزیه میکنیم.

چون مؤلفه افقی سرعت ثابت است، بنابراین اندازه آن درهر زمان دلخواه t برابر است‌با:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$$

شتاب قائم برابر است با $-g$ بنابراین مؤلفه قائم سرعت درلحظه دلخواه t برابر است با :

$$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\theta_0 - gt$$

هرگاه این دومؤلفه را بصورت برداری ترکیب کنیم v بردار سرعت بدست میآیدکه‌اندازه آن برابراست با:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

واندازه زاویه θ که بردار سرعت با امتداد قائم میسازد ازرابطه زیربدست میآید

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

بردار سرعت v مماس برمسیراست. بنابراین امتدادآن‌درهرنقطه با امتداد مسیر یکی است .

مختصات x و y جسم را درهرزمان دلخواه t میتوان بکمك‌معادلات‌حرکت متشابه وحرکت متشابه‌التغیر بدست‌آورد بدینطریق:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos\theta_0)t$$

و :

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

(ومعادله فوق‌معادلات پارامتری حرکت برحسب t هستند) هرگاه t را بین آندوحذف کنیم معادله‌مسیر بصورت‌زیربدست میآید :

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}x^2 \qquad (۶-۶)$$

چون v_0 و θ_0 و g مقادیرثابت‌اند معادله بصورت زیراست:

$$y = ax - bx^2$$

که معادله سهمی است .

مثال ۱ـ جسمی باسرعت اولیه $2/5 m/sec$ درامتدادافق پرتاب میشود پس‌از $\frac{1}{4}$ ثانیه وضع جسم را مشخص‌کنید (شکل ۶ـ۶) دراین حالت زاویه‌پرتاب اولیه صفرودرنتیجه