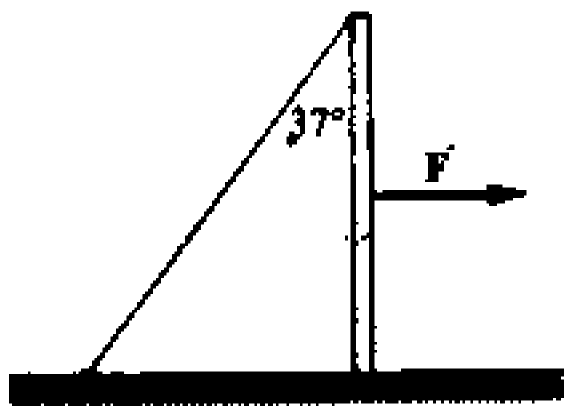
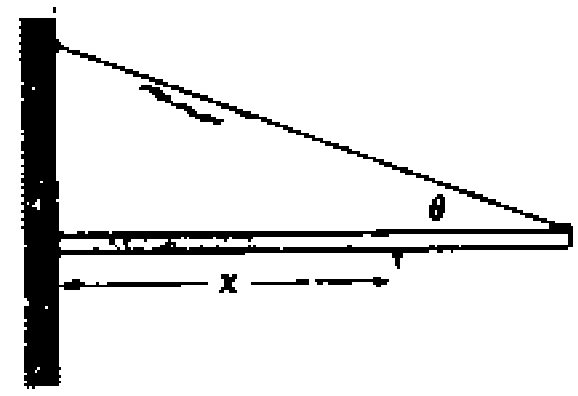
ستون اثر کند حداکثر مقدار آن چقدر باشد که میله نلغزد . (b) هرگاه نیرو درارتفاع ۰/۹



شکل ۳-۲۵

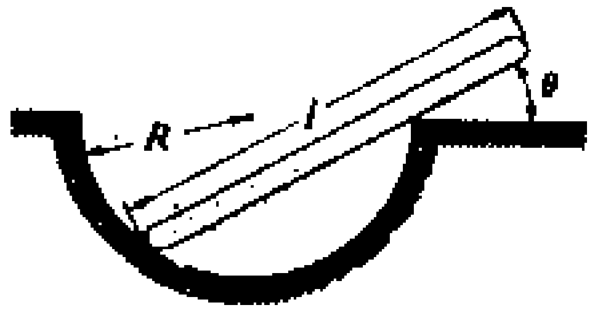


شکل ۳-۲۴

طول ستون بر آن اثر کند اندازه آن چقدر باشد تا میله نلغزد .

۳-۱۵ میله صافی بطول l و بوزن **w** برسطح کروی صاف وبدون اصطکاکی بشعاع R مطابق شکل ۳-۲۶ بحال تعادل متکی است . درحالیکه $R < \frac{l}{2} < 2R$ و θ زاویه میله باسطح افق (در حال تعادل) و P نیروی وارده از گوشه سطح برمیله باشد ثابت کنید که

$$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \frac{l}{4R} \quad \text{(b)}\ P = \frac{l}{4R} \times w \quad \text{(a)}$$

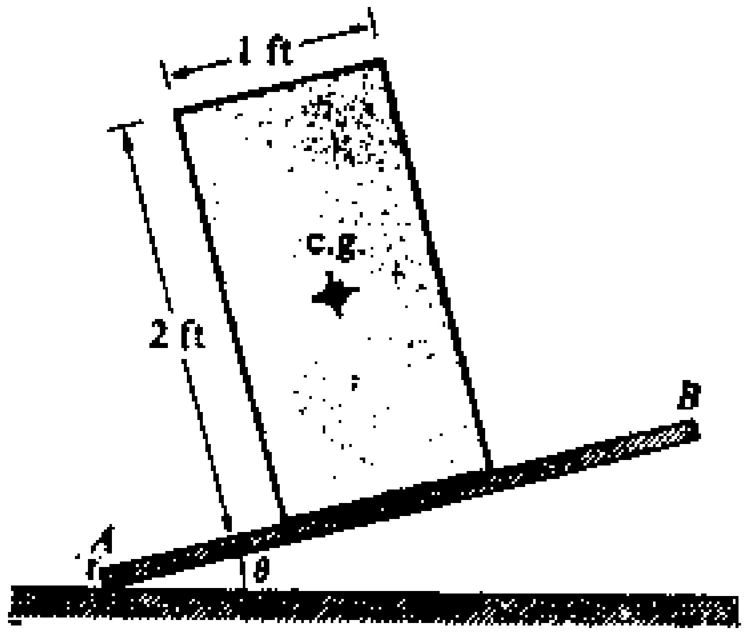


شکل ۳-۲۶

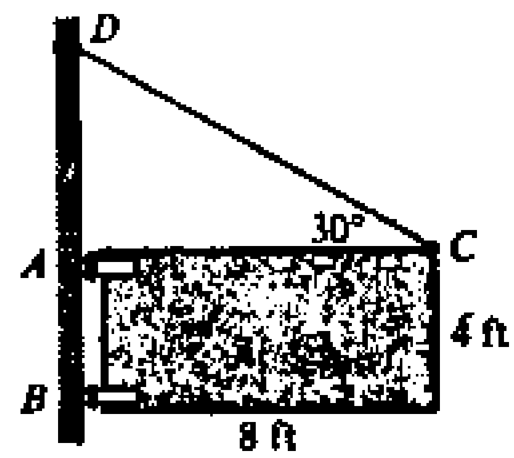
۳-۱۶ دربی بارتفاع ۷ft وعرض ۳ft و بوزن ۶۰lb با دولولا که بفاصله ۶ft ازیکدیگر واقع‌اند وفاصله هرلولا از بالا وپائین درب ۶in میباشد بچهارچوب وصل است. مرکز ثقل در وسط درب قرار دارد وفرض براین است که هرلولا نیمی ازوزن درب را تحمل میکند مؤلفه‌های افقی نیروهای وارده ازهرلولا بردرب را بدست آورید .

۳-۱۷ دربی مطابق شکل ۳-۲۷ با دولولا بدیوار وصل وبا طنابی که با افق زاویه ۳۰° دارد مهارشده است ارتفاع درب ۴ft وعرض آن ۸ft و وزن آن ۸۰lb است ومرکز ثقل دروسط درب واقع است . کشش را در CD آنقدر زیاد میکنیم تا مؤلفه افقی نیروی وارده ازلولای A بردرب برابر صفرشود . (a) کشش مؤثر بر CD را دراینحالت حساب کنید . (b) مؤلفه افقی نیروی مؤثر ازلولای B بردرب را بدست آورید . (c) مجموعه نیروهای قائمی که ازدولولا روببالا بردرب وارد میشود چه اندازه است ؟

۳-۱۸ جسم مکعب مستطیل شکلی بارتفاع ۲ فوت و بعرض یک فوت برروی سطح شیب‌دار AB که θ زاویه شیب آن قابل تغییراست قرار دارد (شکل ۳-۲۸). (a) هرگاه $\theta = 15°$ باشد امتداد نیروی عمود برسطح راکه ازسطح برجسم وارد میشود بدست آورید. (b) هرگاه انتهای B رابتدریج بالابرده زاویه θ را زیادکنیم آیا جسم شروع بلغزیدن روی سطح میکند یا میافتد ؟ ضریب اصطکاک سطح ۰/۴۰ است . زاویه θ راکه بازاء آن جسم



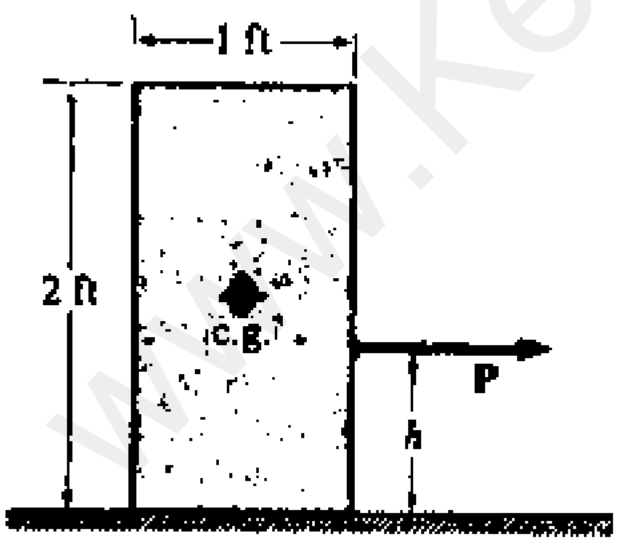
شکل ۳ـ۲۸



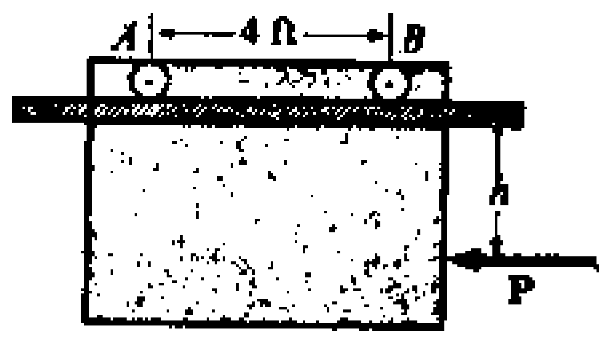
شکل ۳ـ۲۷

میافتد یامی‌لغزد بدست‌آورید . (c) جواب قسمت (b) را یکبار وقتی ضریب اصطکاک‌حالت سکون ۰/۶ وبار دیگر ۰/۵ باشد حساب کنید .

۳ـ۱۹ جسمی بشکل‌مکعب‌مستطیل‌را با نیروی‌افقی P برروی سطح افقی‌بطرف راست میکشیم. [شکل ۳ـ۲۹] ضریب اصطکاک لغزشی ۰/۴ است. وزن‌جسم ۵۰lb ومرکز ثقل در وسط آن قرار گرفته است . (a) اندازه نیروی P راپیدا کنید (b) خط اثر نیروی قائم **N** وارده‌ازسطح‌اتکاه‌برجسم‌راوقتی‌h = ۶in است‌بدست‌آورید. (c) h‌را طوری‌پیدا کنید که‌جسم شروع به افتادن کند .



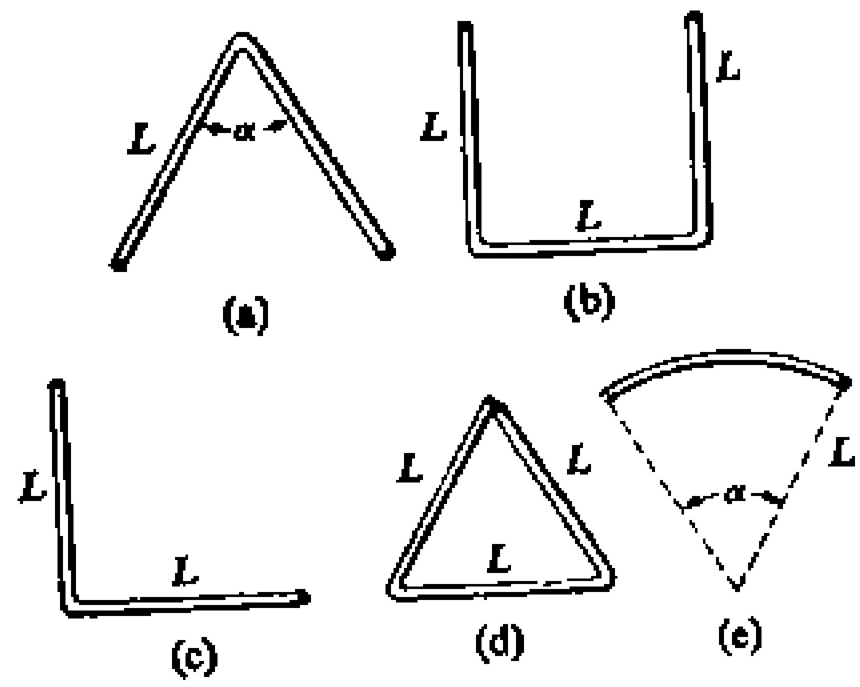
شکل ۳ـ۲۹



شکل ۳ـ۳۰

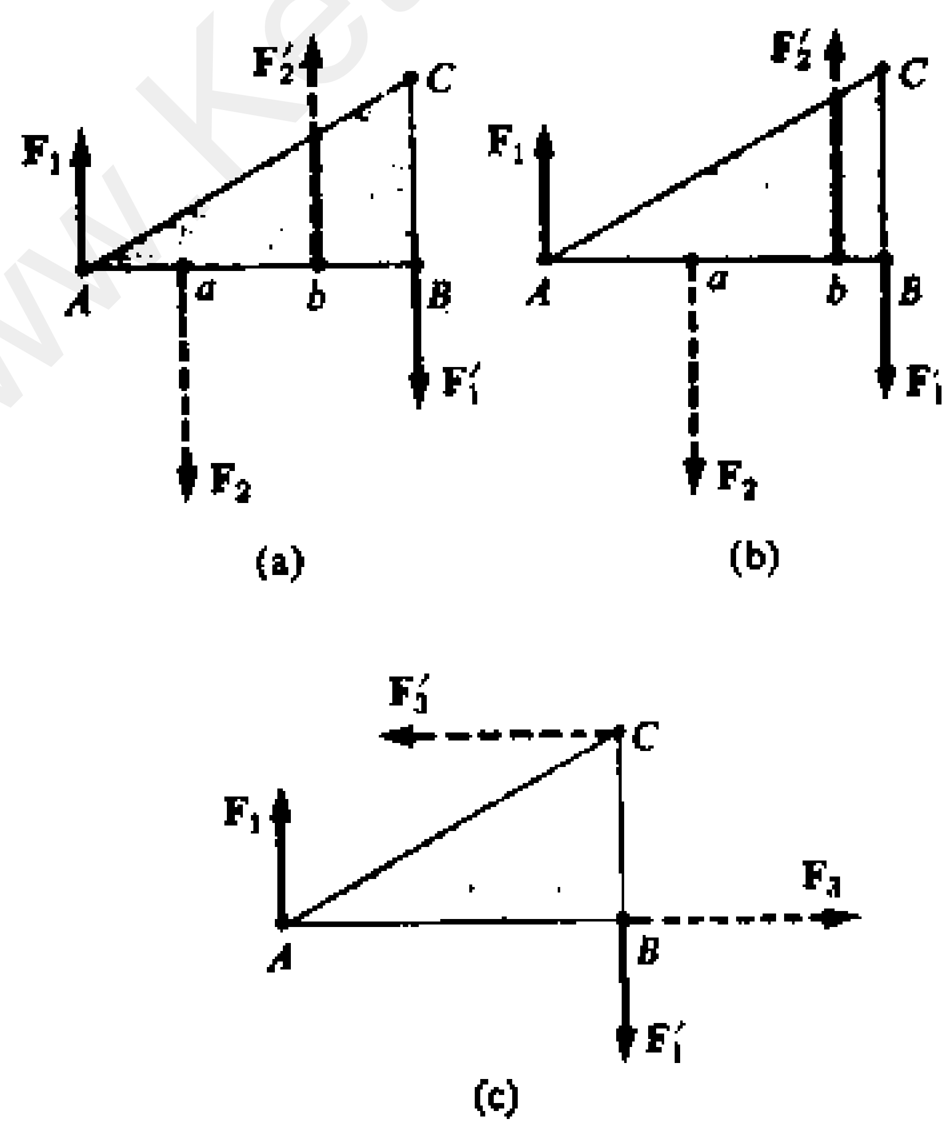
۳ـ۲۰ درب گاراژی مطابق شکل ۳ـ۳۰ دارای دوچرخ است که نمیتوانند بچرخند بلکه فقط برتکیه‌گاه‌خود می‌لغزند . ضریب‌اصطکاک لغزشی ۰/۵ فاصله دوچرخ ازیکدیگر ۴ft است وهریک ازکناره سمت‌خود یک‌فوت فاصله دارند . وزن‌درب ۱۶۰lb ومرکز ثقل آن دروسط قراردارد . بانیروی P درب را با سرعت ثابت بطرف چپ‌میرانیم. (a) هرگاه طول h برابر ۲ft باشد مؤلفه قائم نیروهای وارده ازتکیه‌گاه برچرخها را بدست‌آورید. (b) اندازه h راطوری تعیین کنید که یکی‌ازچرخها درحال بلند شدن‌ازروی تکیه‌گاه‌باشد.

۳-۲۱ اشکال فوق همگی از سیم متحدالشکل ساخته شده‌اند مرکز ثقل هریك ازآنها راپیدا کنید .



شکل ۳-۲۱

۳-۲۲ درشکل ۳-۲۲ ورقه‌ای بشکل مثلث قائم‌الزاویه نشانداده شده است که درآن $BA = ۲۰ cm$ و $CB = ۱۵cm$ است. زوج نیروی افقی F_2 و F'_2 که هریك برابر ۱۵۰ واحد هستند برجسم اثرمیکنند. (a) درقسمت (a) شکل جسم تحت اثر زوجهای F_2 و F'_2 بحال تعادل درآمده است هرگاه ab برابر ۱۰cm باشد اندازه هریك ازدونیروی F_2 و F'_2 رابدست آورید . (b) نشان دهید که هرگاه F_2 و F'_2 بطرف راست جابجا شوند ولی فاصله‌آندو از یکدیگر تغییرنکند بازهم جسم بحال تعادل است (یعنی شرط اول و دوم تعادل درآن صادق میباشد). (c) آیا تعادل را میتوان با واردآوردن زوج F_3 و F'_3 [قسمت (c)شکل] ایجادنمود، اگرممکن است اندازه هریك از F_3 و F'_3 را بدست‌آورید . (d) بارسم‌شکل نشان دهید که هرگاه دونیروی کوپل دوم بر A و C و عمود برضلع AC برجسم اثر کنند بازهم جسم بحال تعادل درمیاید و دراین حال اندازه هریك ازاین نیروها را حساب کنید.



شکل ۳-۲۲

۳-۲۳ مرکزثقل مشترك زمین وماه راپیدا کنید .

فصل چهارم

حرکت مستقیم‌الخط - نسبیت‌خاص

۴-۱ ، حرکت

درابتدای‌فصل‌اول گفتیم که‌مکانیك درباره‌رابطه بین نیرو ، ماده وحرکت بحث‌میکند. درفصول قبل‌درباره نیروهامبحث‌کافی بعمل‌آمد. اکنون باید به‌بحث درباره حرکت و روش های ریاضی‌معمول دراین مبحث بپردازیم. این مقوله‌را سینماتیك **kinematics** مینامند .

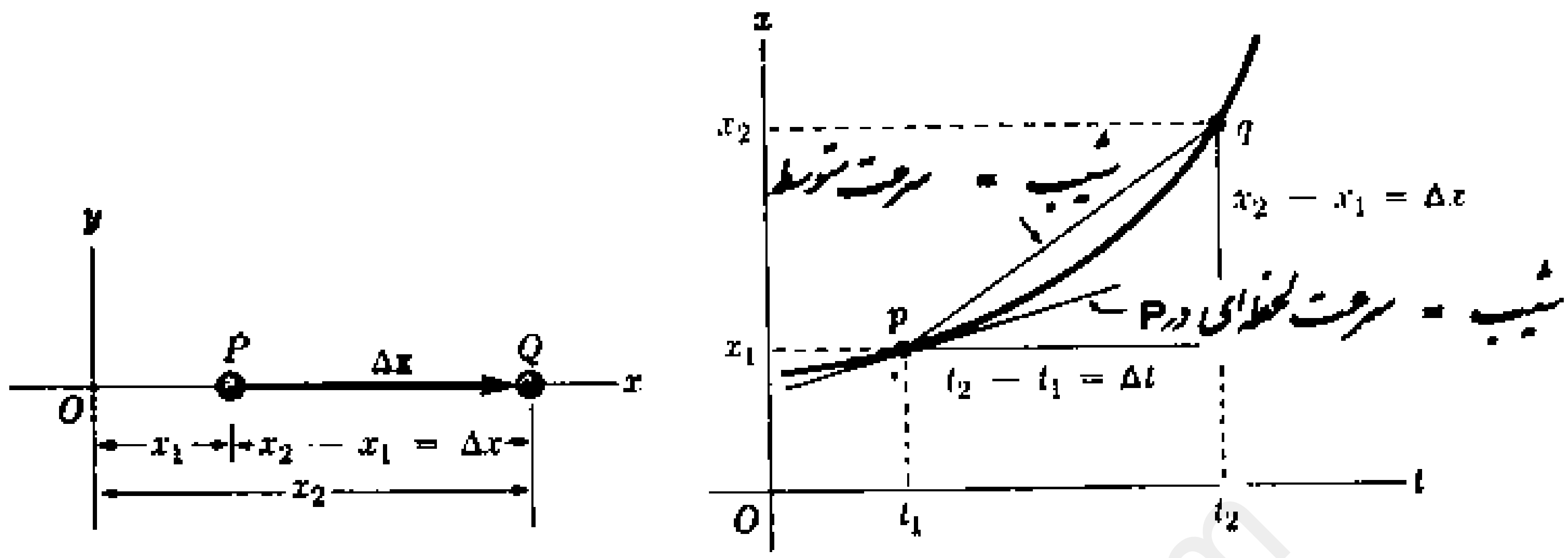
حرکت یك جسم را میتوان **تغییر پیوسته وضع‌آن جسم** دانست . در اغلب اوقات نقاط مختلف یك جسم متحرك مسیر های مختلفی دارند. برای فهم حرکت کلی جسم باید حرکت هریك از نقاط آن معلوم باشد پس لازم است درابتدا حرکت نقطه‌مادی را مورد بحث قراردهیم .

وضع یك نقطه مادی درفضا بکمك مختصات سه‌گانه‌آن تعیین میشود. وقتی وضع‌جسم تغییر کند اندازه مختصات‌آن نیز تغییر خواهد کرد . میتوانید فرض‌کنیدکه نقطه مادی متحرك درهرلحظه برهریك ازسه محورتصویری دارد وقتی جسم حرکت دلخواهی (بامسیر نامشخص) درفضا داشته باشد تصویرآن برهریك از سه محورحرکت مستقیم الخطی خواهد داشت. پس لازم است قبل‌ازهرچیزحرکت مستقیم‌الخط نقطه مادی را موردبحث قراردهیم.

۴-۲ ، سرعت متوسط

فرض‌کنید یك نقطه مادی مطابق شکل ۴-۱ (a) بر روی خط مستقیمی در حرکت است. درمنحنی شکل ۴-۱(b) مختصات x جسم را تابعی از زمان گرفته منحنی تغییرات آنرا نسبت بزمان رسم‌کرده‌اند. درزمان t_1 جسم در نقطه P [شکل ۴-۱ (a)] است‌که فاصله آنرا ازمبدء x_1 مینامیم . در زمان t_2 جسم به نقطه Q رسیده‌که فاصله‌اش از مبدء

x_2 است. نقاط p و q روی منحنی شکل ۴ـ۱(b) نظیر P و Q درشکل ۴ـ۱(a) میباشند.



(a)

(b)

شکل ۴ـ۱ (a)، نقطه مادی در امتداد محور x ها حرکت می‌کند. (b) منحنی تغییرات وضع یك جسم برحسب زمان . سرعت متوسط در فاصله t_1 و t_2 برابر شیب وتر pq است. سرعت لحظه‌ای‌در p تانژانت زاویه مماس برمنحنی در p است .

تغییر مکان جسم را وقتی از P به Q میرود با بردار Δx نشان میدهند . (که همان بردار PQ است) داریم: $x_2 - x_1 = \Delta x$. بنابرتعریف سرعت متوسط نقطه مادی برابر نسبت بردار تغییرمکان بهزمان این تغییرمکان یعنی $\Delta t = t_2 - t_1$ ماسرعت متوسطرا با $\bar{v}$ نشان میدهیم (ـ بالای حرف علامت مقدار متوسط است) دراینصورت خواهیم داشت :

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

سرعت متوسط برداراست، زیرا ازتقسیم یك بردار بریك عددبدست آمده‌است. امتداد و جهت سرعت همان امتداد و جهت تغییر مکان است، اندازه سرعت متوسط از رابطه زیر بدست میآید :

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱-۴)$$

درشکل ۴ـ۱(b) سرعت متوسط باشیب وتر pq مشخص میشود (چه دراین شکل منحنی تغییرات x نسبت به t رسم شده‌است) زیرا شیب درمنحنی نسبت نمو تابع $x_2 - x_1$ به نمو متغیر $t_2 - t_1$ میباشد . میتوان فرمول ۴ـ۱ را بصورت زیر نوشت :

$$x_2 - x_1 = \bar{v}(t_2 - t_1) \qquad (۲-۴)$$

ازآنجاکه انتخاب مبدء زمان‌اختیاری است میتوانیم t_1 را مساوی صفر و t_2 رامقدار دلخواه t فرض‌کنیم درچنین صورتی داریم :

$$x - x_0 = \bar{v}t \qquad (۳-۴)$$

هرگاه متحرك‌درمبدء زمان ، درمبدء مکان باشد بازاء $t = ۰$ داریم $x_0 = ۰$ وفرمول ۴-۳ چنین فرض میشود :

$$x = \bar{v}t \qquad (۴-۴)$$

۴-۳ ، سرعت لحظه‌ای

سرعت متحرك را درلحظه‌ای خاص یا درنقطه‌ای معین از مسیرآن **سرعت لحظه ای** جسم مینامند باید درتعریف سرعت لحظه‌ای دقت خاص مبذول شود .

فرض‌کنیم بخواهیم سرعت لحظه‌ای‌متحرکی راکه درشکل ۴-۱ نشانداده شده‌است در نقطه P بدست‌آوریم‌سرعت متوسط درفاصله P و Q بااندازه های Δx و Δt مربوطاست. فرض‌کنیم نقطه Q بتدریج نزدیکتر ونزدیکتر به P انتخاب ودرهرنوبت سرعت متوسط در فاصله PQ حساب شود.سرعت لحظه‌ای را میتوان حد سرعت متوسط وقتی Q بسیارنزدیك به P انتخاب شود دانست. باوجود اینکه‌تغییرمکان Δx وزمان Δt هردوبینهایت‌کوچك‌اند لازم نیست سرعت لحظه‌ای بینهایت‌کوچك باشد .

بنابرقرارداد Liebnitz ریاضی دان شهیرآلمانی وقتی Δx و Δt بسمت صفر میل‌کنند خارج قسمت‌آنها را بصورت $\frac{dx}{dt}$ نوشته‌کسررا مشتق x نسبت به t مینامند. پس اگر v سرعت لحظه‌ای باشد اندازه‌آن v ازرابطه زیر بدست میآید :

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}} \qquad (۵-۴)$$

یعنی سرعت مشتق مسافت نسبت بزمان است .

سرعت لحظه‌ای نیز بردار است و امتدادآن ، امتداد حد Δx است زیرا Δt کمیت سکالر است و چون همیشه مثبت است نتیجه میگیریم‌که جهت v و Δx یکی است. بنابراین وقتی جسمی درامتداد محور افقی بطرف راست حرکت‌کند سرعت‌آن مثبت است.

وقتی نقطه Q درشکل۴-۱(a) به P بینهایت نزدیك انتخاب شود نقطه q از منحنی

۴-۱(b) به نقطه p از همین منحنی (که منحنی تغییرات x برحسب t است) **بینهایت** نزدیك میشود. شیب وتر pq (که بنابرآنچه قبلا دیدیم‌سرعت متوسط است) **برابرتانژانت** زاویه مماس برمنحنی در نقطه p میشود. نتیجه میگیریم که **سرعت‌لحظه‌ای درهر نقطه واقع برمنحنی تغییرات مسافت برحسب زمان، برابر شیب مماس برمنحنی در این نقطه است** هرگاه مماس برمنحنی بطرف راست ورو ببالا امتداد داشته باشد شیب مثبت و سرعت مثبت وجهت حرکت جسم بطرف راست است. هرگاه مماس رو بپائین وبطرف راست ممتد باشد سرعت منفی است . هرگاه مماس افقی باشد سرعت صفراست.

هرگاه واحد طول متر وواحد زمان ثانیه باشد واحد سرعت متر برثانیه است . (m/sec) دردستگاه آحاد صنعتی واحد سرعت ft/sec است. واحد های دیگری از قبیل cm/sec میل بر ساعت mile/hr و knot (یك میل دریائی برساعت که برابر است با ۶۰۸۰ft/hr) نیز معمول است.

بنابرقرارداد تندی را قدر مطلق سرعت فرض میکنیم . پس اگر اتومبیلی با سرعت ۵۰mi/hr روبشمال ودیگری باسرعت ۵۰mi/hr روبجنوب حرکت‌کند تندی هردو یکی است ولی‌سرعت‌آنهاقرینه یکدیگراست. تندی متوسط عبارت ازخارج قسمت راه‌طی‌شده بر زمان است. اگراتومبیلی ۹۰mile راه را درمدت سه‌ساعت طی‌کند ودوباره بجای‌اول برگردد تندی‌آن ۳۰mile/hr است وحال آنکه **سرعت‌متوسط آن برابر صفراست .**

مثال ــ فرض‌کنیم حرکت جسمی‌که در شکل ۴ـ۱ نشان داده شده است با معادله زیر مشخص شود :

$$x = a + bt^{2}$$

که درآن $a = ۲۰\,cm$ و $b = ۴\,cm/sec^{2}$ است. اگر $t_1 = ۲\,sec$ و $t_2 = ۳\,sec$ باشد دراینصورت $t_2 - t_1 = \Delta t = ۱\,sec$ وضع جسم درزمان t_1 چنین مشخص میشود :

$$x_1 = ۲۰\,cm + ۴\,\frac{cm}{sec^{2}}\,(۲\,sec)^{2} = ۳۶\,cm$$

درزمان t_2 وضع جسم چنین است :

$$x_2 = ۲۰\,cm + ۴\,\frac{cm}{sec^{2}}(۳\,sec)^{2} = ۵۶\,cm$$

وتغییرمکان دراین فاصله زمانی برابر خواهد بود با :

$$x_2 - x_1 = \Delta x = ۵۶\,cm - ۳۶\,cm = ۲۰\,cm$$

وسرعت متوسط دراین فاصله زمانی برابر است با :

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۰\mathrm{cm}}{۱\mathit{sec}}=۲۰\mathrm{cm}/\mathit{sec}$$

واین برابر شیب وتر pq درشکل ۴-۱ (b) است .

هر گاه فاصله زمانی از ۱sec به ۰/۱sec تقلیل داده شود یعنی t_1 و t_2 بترتیب ۲ و ۲/۱ ثانیه انتخاب شوند خواهیم داشت :

$$x_۲=۲۰\mathrm{cm}+۴\mathrm{cm}/\mathrm{sec}^۲(۲/۱\mathrm{sec}^۲)=۳۷/۶۴\mathrm{cm}$$

$$x_۲-x_۱=\Delta x=۱/۶۴\mathrm{cm}$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱/۶۴\mathrm{cm}}{۰/۱\mathrm{sec}}=۱۶/۴\mathrm{cm}/\mathrm{sec}$$

هر گاه فاصله زمانی را به ۰/۰۱sec تقلیل دهیم یعنی $t_۲$ را برابر ۲/۰۱ ثانیه انتخاب کنیم داریم :

$$x_۲=۳۶/۱۶۰۴\mathrm{cm}\qquad \Delta x=۰/۱۶۰۴\mathrm{cm}$$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱/۶۴\mathrm{cm}}{۰/۰۱\mathrm{sec}}=۱۶/۰۴\mathrm{cm}/\mathrm{sec}$$

وقتی‌فاصله زمانی کوچکتر و کوچکتر شده بسمت‌صفر میل کند سرعت به ۱۶cm/sec نزدیك میشود . کافی است سرعت لحظه‌ای را درلحظه $t=۲\mathrm{sec}$ حساب کنیم :

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(a+bt^۲)=۲bt$$

ووقتی $t=۲\mathit{sec}$ باشد :

$$v=۲\times۴\mathrm{cm}/\mathrm{sec}^۲\times۲\mathrm{sec}=۱۶\mathrm{cm}/\mathrm{sec}$$

که برابر است باشیب مماس برمنحنی ۴-۱(b) درنقطه p .

ازنظر ریاضی‌برای t درفرمول $x=a+bt^۲$ حدی وجود ندارد ولی ازنظرفیزیکی این فرمول فقط درحدود معینی از t صحیح است. مثلا توپی را بهوا پرتاب میکنیم پس‌از ده ثانیه بزمین برمیگردد . هر گاه امتداد پرتاب قائم و مبدء زمان لحظه پرتاب فرض شود فرمول فوق درفاصله $t=۰$ تا $t=۱۰\mathrm{sec}$ برای حرکت توپ‌صادق‌است .

۴-۴ ، شتاب متوسط و لحظه‌ای

جز درموارد خاص سرعت متحرك درحین حرکت تغییرمیکند. حرکت جسم را دراین حالت **شتابدار** یا متغیر گویند .

درشکل ۴-۲(a) جسمی نشانداده شده‌است که درامتداد محور x ها درحرکت‌است $\mathbf{v}_1$ بردارسرعت‌در نقطه P و $\mathbf{v}_2$ بردارسرعت درنقطه Q است. درشکل۴-۲ (b) يك‌منحنی رسم شده است که تغییرات سرعت‌لحظه‌ای را نسبت بزمان نشان میدهد. طولهای‌نقاط p و q براین منحنی برابر اندازه سرعت جسم در نقاط P و Q درقسمت (a) شکل میباشند .

بنابرتعریف شتاب متوسط جسم درفاصله P وQ برابراست با نسبت تغییرات سرعت بزمان یعنی :

$$\bar{a}=\frac{\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \qquad (۴-۶)$$

سرعت در زمانهای t_1 و t_2 بترتیب $\mathbf{V}_1$ و$\mathbf{V}_2$ است. چون $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ برداراند $\mathbf{V}_2-\mathbf{V}_1$ نیز **تفاضل برداری** خواهد بود وباید باروش‌هائی‌که درقسمت۱-۱۰ بیان‌شد بدست‌آید. درحرکت مستقیم‌الخط امتداد هردو بردار برهم منطبق است لذا تفاضل برداری دو سرعت برابر تفاضل‌اندازه های‌آنان میباشد. درفصل ششم بحالتی برخورد خواهیم‌کرد که امتداد های $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$ برهم منطبق نیستند .

درشکل ۴-۲(b) اندازه شتاب متوسط برابراست باشیب وتر pq .

شتاب لحظه‌ای يك‌جسم، یعنی‌شتاب جسم درنقطه‌معینی ازمسیر یا درلحظه‌معین‌و نظیر سرعت لحظه‌ای تعریف میشود. فرض‌کنیم نقطه Q بتدریج نزدیکتر به P انتخاب‌شده تغییر سرعت‌درفاصله زمانی‌کوتاهترمحاسبه شودشتاب لحظه‌ای برابراست‌باحد شتاب متوسط وقتی نقطهQ بینهایت نزديك به P انتخاب شود . یعنی :

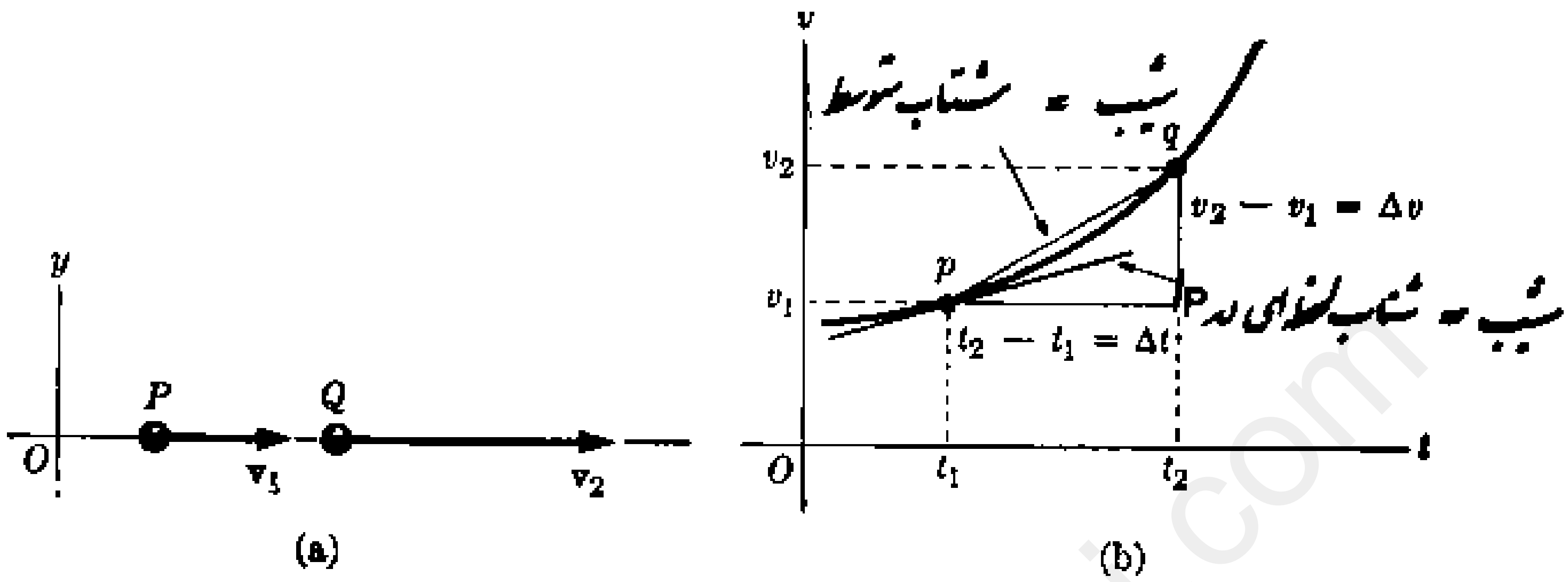
$$\boxed{a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}} \qquad (۴-۷)$$

یعنی‌شتاب، مشتق سرعت نسبت بزمان است.

شتاب را بطریقی‌که دربالا تعریف‌کردیم برای هر نوع حرکت با هر مسیر دلخواه خواه مستقیم‌الخط وخواه منحنی‌الخط میتوان بکار برد . وقتی نقطه مادی برمسیر منحنی حرکت میکند جهت سرعت متحرك نیز تغییر خواهدکرد واین تغییر جهت نیزشتاب بوجود

میاورد ودرفصل ششم دراین باره صحبت خواهیم کرد .

شتاب لحظه‌ای در فیزیك دارای اهمیت خاصی است ولـی شتاب متوسط نقش چندان مهمی ندارد . ازاین‌جهت هرگاه درفیزیك از « شتاب » صحبت شد منظور شتاب لحظه‌ایست نه شتـاب متوسط .



شکل۴-۲، (a) جسمی‌که درامتداد محور x ها حرکت میکند. (b) منحنی تغییرات سرعت نسبت‌بزمان. شتاب‌متوسط درفاصله زمانی t_1 و t_2 برابر شیب وتر pq است. شتاب لحظه‌ای در p برابر تانژانت زاویه مماس برمنحنی دراین نقطه است .

وقتی‌نقطه Q درشکل ۴-۲(a) به نقطه P نزدیك شود درشکل ۴-۲(b) نیز p به p نزدیك شده وتر pq برمنحنی مماس خواهد شد . یعنی **شتاب لحظه‌ای دریك نقطه معین ازمنحنی شکل ۴-۲ (b) برابر تانژانت زاویه مماس برمنحنی در این نقطه است .**

چون $v = \dfrac{dx}{dt}$ نتیجه میشود :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

یعنی شتاب مشتق دوم مسافت نسبت به زمان است .

هرگاه واحد سرعت متربرثانیه وواحد زمان ثانیه باشد واحدشتاب $m/sec/sec$ است که بصورت m/sec^2 نوشته میشود (ومتر برمجذور ثانیه خوانده میشود) سایرواحد های شتاب عبارتند از ft/sec^2 و cm/sec^2.

وقتی قدرمطلق سرعت متحرك کم میشود (یعنی‌حرکت کند میشود) شتاب جسم منفی است و آنرا شتاب کند شونده مینامند.

مثال ـ فرض کنید سرعت جسمی که درشکل ۴ـ۲(a) نشانداده شده است بامعادله زیر مشخص میشود :

$$v=m+nt^2$$

که درآن $m=10\,cm/sec$ و $n=2m/sec^2$ است. $t_1=2sec$ و $t_2=5sec$ فرض میشود. درزمان t_1 داریم:

$$v_1=10\frac{cm}{sec}+2\frac{cm}{sec^2}\times(2sec)^2=18\frac{cm}{sec}$$

وسرعت درزمان t_2 برابراست با :

$$v_2=10\frac{cm}{sec}+2\frac{cm}{sec^2}(5sec)^2=60\frac{cm}{sec}$$

شتاب متوسط دراین فاصله زمانی عبارت است از :

$$\bar{a}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{42cm/sec}{3sec}=14cm/sec^2$$

این مقدار باشیب وتر pq درشکل ۴ـ۲(b) برابر است .

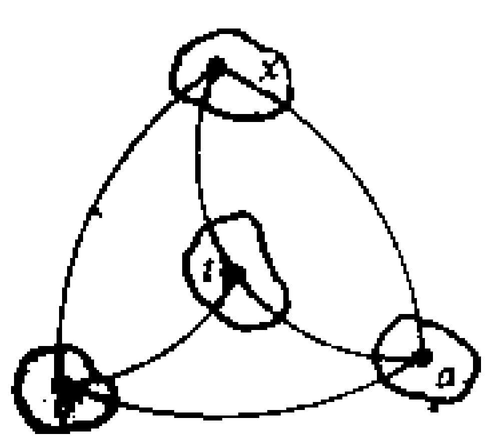
شتاب لحظه‌ای در زمان t برابراست با :

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(m+nt^2)=2nt$$

ووقتی $t_1=2sec$ باشد خواهیم داشت :

$$a=2\times2\frac{cm}{sec^2}\times2sec=8\frac{cm}{sec^2}$$

این مقدار باتانژانت خط مماس برمنحنی درنقطه p برابر است.



شکل ۴ـ۳ هر یك از مقادیر x و v و a و t توابعی‌ازیکدیگرند

در بحث قبلی گفتیم که مختصات x، سرعت v و شتاب a توابعی از زمان هستند. همانطور که درشکل ۴ـ۳ بطور شماتیك نشانداده‌شده‌است بازاء هرمقدار t درفاصله معین‌ومحدود، مقادیر نظیری از x و v و a وجود دارد. یعنی میتوانیم بجای اینکه سرعت وشتاب راتابعی اززمان‌فرض کنیم آنها را تابعی از x فرض نمائیم (و در بعضی از حالات خاص ؛ شکل این توابع متفاوت است.) بنابراین هریك از مقادیر چهارگانه نسبت به سه تای

دیگردارای مشتق هستند. فقط‌مشتقات $\frac{dx}{dt}$ (سرعت) و $\frac{dx}{dt}$ (شتاب) دارای نام مخصوص هستند. میتوان رابطه‌زیررا که دارای اهمیت خاص است نوشت :

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

چون $v=\frac{dx}{dt}$ استپس داریم :

$$\boxed{a=v\frac{dv}{dx}} \quad (۸-۴)$$

که شتاب را برحسب سرعت v و گرادیان سرعت $\frac{dv}{dx}$ بیان میکند .

مثال - فرض‌کنیم سرعت جسمی که درامتداد محور xها حرکت میکند ازرابطه $v=k\ln x$ که درآن k مقداریست‌ثابت، بدست‌آید . داریم :

$$\frac{dv}{dx}=\frac{k}{x}$$

وشتاب بصورت‌زیرکه تابعی‌که از x است درمیآید:

$$a=v\frac{dv}{dx}=k^{2}\frac{\ln x}{x}$$

۴-۵ ، محاسبه سرعت ومسافت ازطریق انتگراسیون

وقتی x برحسب t معلوم باشد میتوان با مشتق‌گرفتن ازآن سرعت $(v=\frac{dx}{dt})$ و با محاسبه مشتق دوم شتاب را بدست آورد $(a=\frac{dv}{dt})$ اکنون فرض‌کنیم‌شتاب‌معلوم باشد ونخواهیم x و v را پیداکنیم. اینکار ازطریق‌محاسبه بکمك انتگرال ممکن‌است. باید ابتدا درباره انتگرال نامحدود وسپس درباره انتگرال محدود بحث‌کنیم. بنابر روش Leibnitz

$$\frac{dv}{dt}=a(t)$$

$$dv=a(t)dt$$

$$v = \int a(t)dt + C_1 \qquad (۹-۴)$$

C_1 مقداری ثابت ودلخواه است .

وقتی انتگرال فوق حساب شد سرعت v بصورت تابعی اززمان بدست میآید ، v خود مشتق مسافت نسبت به زمان است پس‌میتوان‌نوشت :

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

$$dx = v(t)dt$$

$$x = \int v(t)dt + C_2 \qquad (۱۰-۴)$$

که درآن C_2 مقداریست‌ثابت. ازمحاسبه‌این‌انتگرال x بصورت تابعی از زمان $x = x(t)$ بدست میآید[1] .

هرگاه شتاب بصورت تابعی از x بیان شده باشد میتوان از فرمول ۴-۸ استفاده کرده نوشت :

$$v\frac{dv}{dx} = a(x)$$

$$\int vdv = \int a(x)dx$$

$$\frac{v^2}{2} = \int a(x)dx + C_3 \qquad (۱۱-۴)$$

وقتی شتاب بصورت تابعی ازسرعت بیان شده‌باشد بیکی ازدوطریق زیرعمل میکنیم :

$$\frac{dv}{dt} = a(v) \qquad (۱)$$

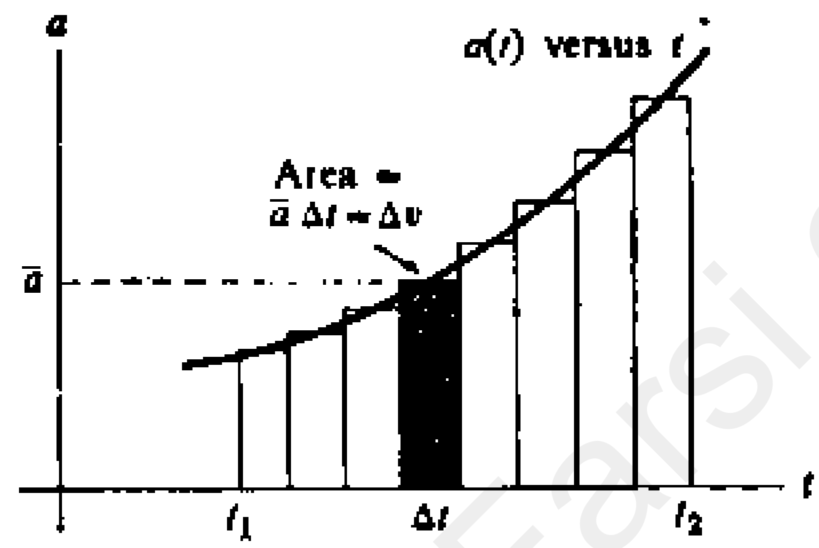
۱ـ درریاضیات معمولا تابع‌را بصورت $a = f(t)$ مینویسند نه $a = a(t)$ اماچون دراینجا چندتابع وجود داردکه همگی تابع یك متغیرهستند پس اگر بنویسیم $a = f(t)$ و $v = f(t)$ و $x = f(t)$ برای ما مشخص نمیشود که این توابع باهم فرقی دارند یانه. همچنین داریم: $a = f(t)$ و $a = f(x)$ بازهم معلوم نیست‌که این‌دوباهم فرق‌دارند یانه. بعضی اوقات بجای $\int a(t)dt$ برای‌اختصارمینویسیم $\int adt$، درحالیکه اگرتابع‌را بصورت $a = f(t)$ بنویسیم‌نمیتوان‌چنین اختصاری بعمل‌آورد . بایددانست که‌بجای $a(t)$ یا a و نیز $v(t)$ و $x(t)$ یا v و x بایدتوابعی‌برحسب t قرارگیرندکه معادل a و v و x باشند .

$$\int \frac{dv}{a(v)} = t + C_4 \qquad (۱۲-۴)$$

ویا (۲)

$$\frac{v\,dv}{dx} = a(v) \qquad \text{ویا(۲)}$$

$$\int \frac{v\,dv}{a(v)} = x + C_5 \qquad (۱۳-۴)$$



شکل۴-۴ فاصله t_1 و t_2 را بفواصل کوچك Δt تقسیم‌کرده تابع پلکانی بوجود میآوریم که در آن ارتفاع هرپله برابر شتاب متوسط $\bar{a}$ دراین فاصله است .

اکنون درباره انتگرال محدود صحبت میکنیم . فرض‌کنیم شتاب a تابعی اززمان و شکل ۴-۴ منحنی نمایش تغییرات شتاب برحسب زمان است . فاصله زمانی بین t_1 و t_2 را به فواصل‌کوچك Δt تقسیم میکنیم . چنانکه از شکل پیداست یك تابع پلکانی بوجـود میآید که ارتفاع هرپله درآن اندازه شتاب متوسطه $\bar{a}$ درفاصله‌زمانی Δt است . تغییرسرعت Δv در هر فاصله زمانی برابر است با حاصلضرب شتاب متوسط $\bar{a}$ در فاصله زمانی Δt است یعنی:

$$\Delta v = \bar{a}\,\Delta t$$

این‌حاصلضرب ازطرفی‌مساوی سطح مستطیل‌هائی است‌که یکی ازآنها درشکل هاشور خورده است .

هرگاه v_1 سرعت درزمان t_1 و v_2 سرعت درزمان t_2 باشد تغییر سرعت کل در فاصله t_1 و t_2 برابرجمع تغییرات سرعت درفواصل Δt است پس داریم :

$$v_2 - v_1 = \Sigma \Delta v = \Sigma \bar{a}\,\Delta t$$

حاصل‌جمع $\Sigma \bar{a}\,\Delta t$ برابرسطح‌کل نوارها (سطح‌کل‌زیرمنحنی تابع‌پلکانی) است.

حال اگر Δt را کوچکتر وبازهم کوچکتر انتخاب کنیم بطوریکه $\Delta t \to 0$ تغییر سرعت برابر جمع اندازه‌های Δv است پس

$$v_2 - v_1 = \int_{t_2}^{t_1} a\,dt \qquad (۱۴-۴)$$

یعنی تغییر سرعت درهرفاصله زمانی برابرسطح محصور بین منحنی شتاب ـ زمان و محور زمان است که بین خطوط قائم معرف زمان ابتدائی وانتهائی محصور باشد .

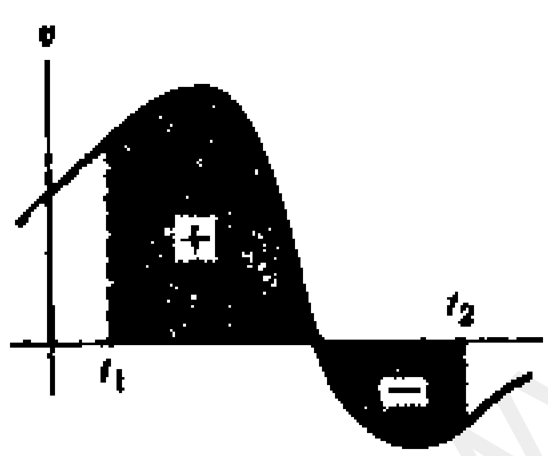
بهمین ترتیب هرگاه منحنی تغییرات سرعت را نسبت بزمان رسم کنیم وفاصله زمانی بین t_1 و t_2 را به نوارهائی بعرض Δt تقسیم کنیم تابع پلکانی دیگری تشکیل میشود که ارتفاع هرنواربرابر سرعت متوسط v درآن فاصله است. تغییر مکان Δx در هرفاصله برابر حاصلضرب سرعت متوسط v درفاصله زمانی Δt است وتغییرمکان کل $x_2 - x_1$ در فاصله t_1 و t_2 برابر مجموع تغییرمکانها درهرفاصله Δt است یعنی

$$x_2 - x_1 = \Sigma \Delta x = \Sigma v \Delta t$$

ووقتی $\Delta t \to 0$ این مجموعه برابرانتگرال vdt درفاصله t_1 و t_2 است و برابر است باسطح زیرمنحنی سرعت ـ زمان لذا خواهیم‌داشت:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_2}^{t_1} v\,dt \qquad (۱۵-۴)$$

تغییر مکان در فاصله زمانی برابر سطح محصور بین منحنی‌سرعت ـ زمان ومحور زمان‌است که بین‌دوخط قائم‌معرف‌زمان ابتدائی وانتهائی‌محدود است .



شکل ۴ـ۵ تغییرمکان کل درفاصله t_1 و t_2 برابر جمع جبری قسمت هاشور خورده بین منحنی و محور t هاست

این روش پیداکردن تغییر مکان بیشتر در مواردیکه جسم باسرعت کاملا نامشخصی حرکت میکند (شکل ۴ـ۵) مفیداست. جابجائی کل برابر جمع جبری سطح هاشورخورده واقع درفاصله t_1 و t_2 است. سطح‌واقع دربالای محور t مثبت وسطح واقع درپائین آن منفی است. (وقتی منحنی سرعت بالای محور t است جسم بطرف راست ووقتی زیرمحور واقع است بطرف چپ حرکت میکند) ممکن است نتوانیم برای سرعت تابع جبری مشخص نوشته انتگرال‌آنرا حساب‌کنیم ولی میتوانیم منحنی‌را با دقت کافی روی‌کاغذ میلی‌متری رسم‌کرده سطح زیرمنحنی را با شمردن مربع های کامل و برآورد اندازه مربع‌های ناقص واقع‌درزیر منحنی بدست آوریم.

براین اساس دستگاههائی میسازندکه سرعت هواپیما وزیردریائی را اندازه‌میگیرد.

با دستگاهی بنام شتاب سنج accelerometer شتاب لحظه‌ای هواپیما یا زیر دریائی را بااستفاده‌ازاصل‌جبرا اندازه‌میگیرند عدد حاصل ازاین اندازه‌گیری را به Computer (ماشین حساب) میدهند واین دستگاه سرعت را درهرلحظه حساب‌کرده نشان میدهد اساس کار این ماشین حساب (که‌معمولا الکترونیکی است) محاسبه سطح زیر منحنی a-t است. ماشین حساب دیگری اعدادحاصل ازماشین حساب اول را دریافت کرده **مسافت را** که‌سطح زیر منحنی v-t است اندازه میگیرد .

هرگاه شتاب بصورت تابعی از x مشخص باشد بطریق زیرعمل میکنیم : تغییرسرعت درفاصله Δt برابراست با :

$$\Delta v = \bar{a}\Delta t$$

اما چون $\Delta x = \bar{v}\Delta t$ پس خواهیم داشت $\Delta t = \frac{\Delta x}{\bar{v}}$ وازآنجاخواهیم‌داشت:

$$\Delta v = \bar{a}\frac{\Delta x}{\bar{v}} \qquad \text{ویا :} \qquad \bar{v}\Delta v = \bar{a}\Delta x$$

هرگاه‌مجموعه‌طرفین رابطه‌فوق‌رادرفاصله معینی حساب کنیم‌داریم $\Sigma\bar{v}\Delta v = \Sigma\bar{a}\Delta x$

هرگاه Δv و Δx بسمت‌صفرمیل کنند مجموعه فوق‌را بصورت انتگرال درآمده فرمول‌زیر بدست میآید :

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \int_{x_1}^{x_2} a\,dx \qquad (۱۶-۴)$$

همین فرمول را ازفرمول ۴-۸ که قبلا بیان شد نیزمیتوان بصورت زیر نتیجه گرفت

$$v\,dv = a\,dx$$

واگرازطرفین انتگرال بگیریم همان فرمول ۴-۱۶ بدست میآید:

انتگرال فرمول ۴-۱۶ بشرطی قابل حل است که a بصورت تابعی از x مشخص باشد. انتگرال سمت چپ‌همیشه قابل حل است ومیتوان فرمول ۴-۱۶ را بصورت‌زیر نوشت:

$$\frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 = \int_{x_2}^{x_1} a\,dx \qquad (۱۷-۴)$$

۴-۶ ، حرکت متشابه‌التغییر .

ساده‌ترین حرکت متغیرحرکتی است‌که شتاب آن‌ثابت باشد وحرکت متشابه‌التغییر نامیده میشود. وقتی مقاومت هوا ناچیز باشد جسمی‌که درنزدیکی زمین آزادانه ساقط شود

شتاب تقریباً ثابتی دارد . همچنین وقتی سرعت اتومبیلی زیاد یا کم میشود شتاب آن تقریباً ثابت ویالااقل باتقریب اول ثابت است. هرگاه $a=a(t)=ct$ باشد از فرمول ۴-۹ نتیجه میشود

$$v=\int a(t)dt+C_1=a\int dt+C_1=at+C_1$$

باآنکه درانتگراسیون‌درریاضیات مقدار C_1 کاملا اختیاری است درفیزیك باید C_1 را طوری انتخاب نمودکه بامسئله موردنظرما تطبیق کند. معمول براین است که بجای C_1 سرعت اولیه یعنی v_0 (سرعت درلحظه $t=0$) قرارمیدهند. v_0 را ازاین‌جهت سرعت‌اولیه مینامند که وقتی $t=0$ یعنی لحظه شروع حرکت است $v=v_0$ خواهد بود . هرگاه $C_1=v_0$ اختیارشود خواهیم داشت:

$$v=v_0+at \qquad (۱۸-۴)$$

حال سرعت بصورت تابع $v=v(t)=at+v_0$ مشخص شده است . بنابر فرمول ۴-۱۰ داریم

$$x=\int v(t)dt+C_2=\int(v_0+at)dt+C_2=v_0\int dt+a\int tdt+C_2$$

$$=v_0t+\frac{1}{2}at^2+C_2$$

C_2 مقدارثابت انتگراسیون دوم‌است. هرگاه درلحظه $t=0$ مختصات متحرك x_0 باشد میتوان نوشت :

$$x=x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \qquad (۱۹-۴)$$

میتوان شتاب را بصورت تابع $a=a(x)=ct$ نوشت در این صورت بنابر فرمول ۴-۱۱ داریم:

$$\int vdv=\int a(x)dx+C_3=a\int dx+C_3 \quad \text{و} \quad \frac{v^2}{2}=ax+C_3$$

هرگاه v_0 سرعت جسم‌دروضع $x=x_0$ باشد خواهیم داشت:

$$C_3=\frac{v_0^2}{2}-ax_0$$

و

$$\frac{v^2}{2}=ax+\frac{v_0^2}{2}-ax_0$$

$$v^2=v_0^2+2a(x-x_0) \qquad (۲۰-۴)$$

چنانکه دیده میشود v بصورت تابعی از x بیان شده است. فرمول اخیر رامیتوان از حذف t بین فرمول‌های ۴-۱۸ و ۴-۱۹ نیز بدست‌آورد .

پس‌وقتی داشته‌باشیم :

$$a = a(t) = a(x) = ct$$

خواهیم‌داشت:

$$v = v(t) = v_0 + at \qquad (۱۸-۴)$$

$$x = x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \qquad (۱۹-۴)$$

$$v = v(x) = \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

ویا:

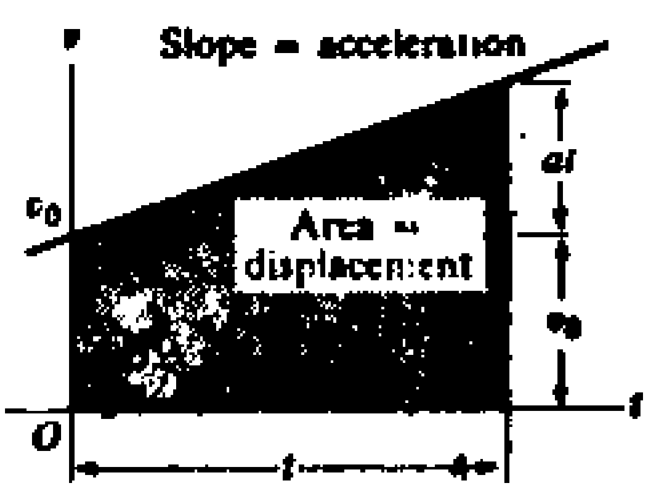
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad (۲۰-۴)$$

این معادلات را معادلات حرکت متشابه‌التغییرمینامند و میتوان آنها را با استفاده ازانتگرال محدود نیز بدست‌آورد هرگاه درفرمول۴-۱۴ فرض‌کنیم $t_1 = 0$ و $t_2 = t$ و $v_1 = v_0$ و $v_2 = v$ و a ثابت باشدخواهیم داشت:

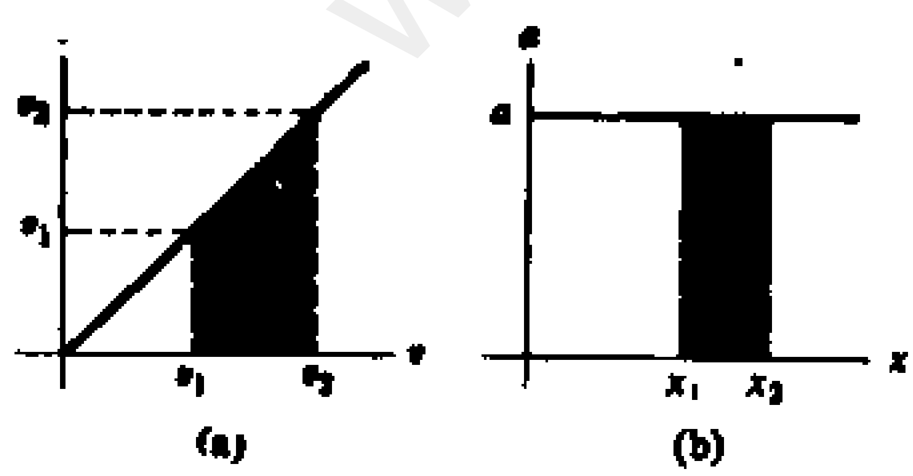
$$v - v_0 = at$$

که همان فرمول ۴-۱۸ است. همچنین ازفرمول ۴-۱۸ نتیجه میشود

$$x - x_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$



شکل ۴-۶ منحنی سرعت ـ زمان حرکت متشابه التغییر



شکل ۴-۷ سطح زیرمنحنی (a) یعنی $\int_{v_1}^{v_2} v\,dv$ برابر است با سطح زیرمنحنی (b) یعنی $\int_{x_1}^{x_2} a\,dx$

که همان فرمول ۴ـ۱۹ است. ازفرمول ۴ـ۱۶ نتیجه میشود ،

$$\frac{۱}{۲}v^{۲}-\frac{۱}{۲}v_{\circ}^{۲}=a(x-x_{\circ})$$

که همان‌فرمول ۴ـ۲۰ است .

میتوان بکمك منحنی نیزمعادلات حرکت متشابه‌التغییر را بدست‌آورد. ابتدا منحنی سرعت ـ زمان رامطابق‌شکل ۴ـ۶ رسم میکنیم $v_{\circ}$ سرعت درلحظه $t=\circ$ است. شتاب‌برابر شیب منحنی $v-t$ است واگرشتاب ثابت باشد پس شیب منحنی ، ثابت‌ومنحنی، خط‌مستقیمی خواهد بودکه شیب آن a است. صورت کلی معادله خط مستقیم $y=mx+b$ است که در این حالت بصورت زیردرمیآید:

$$v=at+v_{\circ}$$

تغییرمکان جسم برابرسطح زیرمنحنی سرعت است. درشکل ۴ـ۶ این سطح برابـر مجموع سطح یك مستطیل ویك مثلث است. سطح مستطیل $v_{\circ}t$ وسطح مثلث $\frac{۱}{۲}\times t\times at=\frac{۱}{۲}at^{۲}$ است. پس تغییرمکان برابراست با:

$$x-x_{\circ}=v_{\circ}t-\frac{۱}{۲}at^{۲}$$

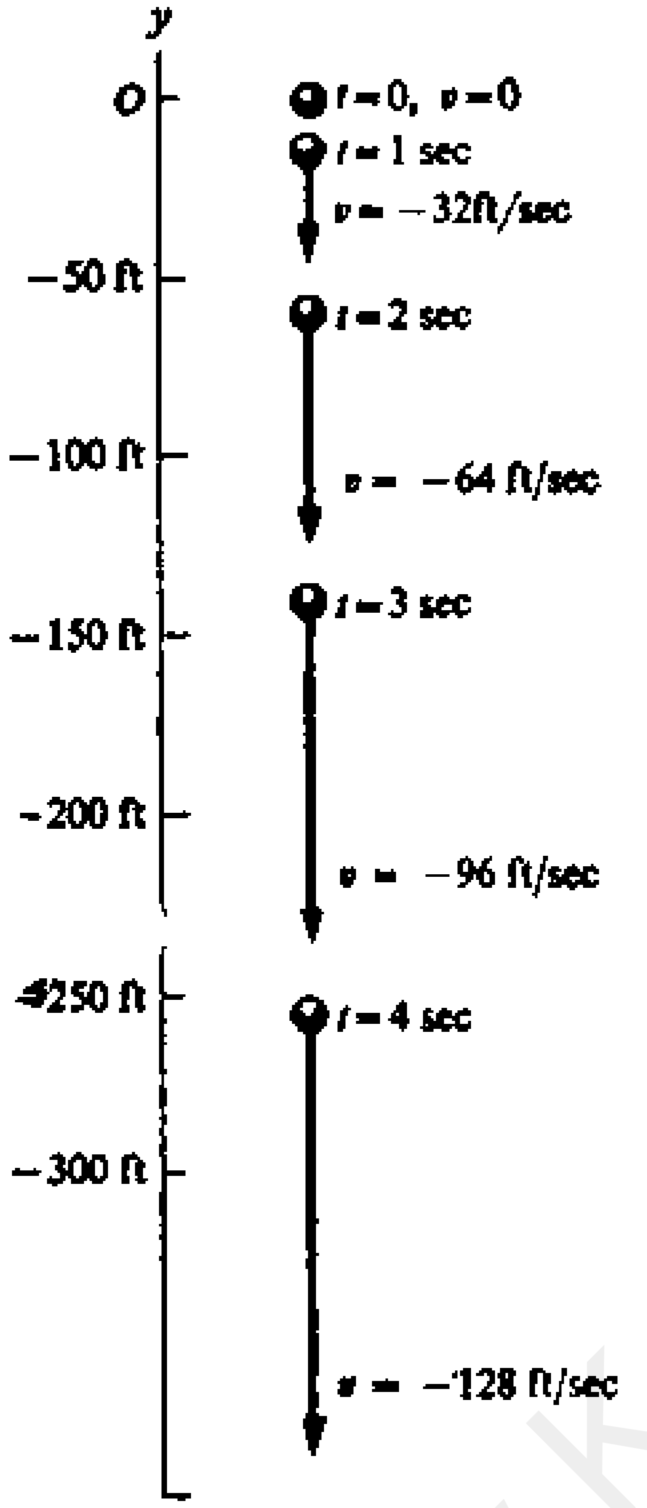
بنابر فرمول ۴ـ۱۶ سطح زیر منحنی $v-v$ برابر سطح زیر منحنی $x-a$ است چنانکه درشکل۴ـ۷ نشانداده شده است سطح‌زیرمنحنی (a) برابر $\frac{۱}{۲}v_{۲}^{۲}-\frac{۱}{۲}v_{۱}^{۲}$ وسطح زیرمنحنی (b) وقتی $a=ct$ باشد. برابر $a(x_{۲}-x_{۱})$ است پس خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}v_{۲}^{۲}-\frac{۱}{۲}v_{۱}^{۲}=a(x_{۲}-x_{۱})$$

۴ـ۷ ، سقوط آزاد

بهترین مثال برای حرکتی که شتاب آن تقریباً ثـابت باشد شتاب جسمی است‌کـه آزادانه‌ساقط میشود. وقتی مقاومت هوا وجود نداشته‌باشدمشاهده میشودکه‌تمام اجسام‌سرفنظر از وزن وابعاد باشتاب مساوی بزمین‌سقوط‌می‌کنند وهرگاه مسافت سقوط خیلی زیاد نباشد اندازه شتاب درسراسر مدت سقوط ثابت میماند. دراین مورد ازمقاومت‌هوا وازتغییر شتاب ثقل برحسب ارتفاع صرفنظر شده است. چنین‌حرکت ایده‌آلی‌رااصطلاحاً سقوط آزاد گویند درحالیکه ممکن است جسم درقسمتی ازمسیر خود سقوط نکرده بلکه بالارود .

شتاب جسمی را که سقوط آزاد میکند شتاب ثقل مینامند و آنرا باحرف g نشان میدهند درنزدیکی سطح زمین اندازه آن برابر: $۳۲ ft/sec^{۲}$ یا $۹/۸ m/sec^{۲}$ یا $۹۸۰ cm/sec^{۲}$ است. اندازه دقیق‌تر آن و نیز تغییرات جزئی آن برحسب تغییر ارتفاع و عرض جغرافیائی بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت.



شکل ۴-۸ وضعیت و سرعت جسمیکه سقوط آزاد میکند

مقدار g را گاهی اوقات بغلط «نیروی ثقل» ویا «ثقل» مینامند. «ثقل» پدیده‌است نه کمیت و «نیروی ثقل» نیروئی است که ازطرف زمین براجسام وارد میشود و «وزن» نامیده میشود. «g» شتابی است که دراثر نیروی جاذبه دراجسام ایجاد میشود.

مثال ۱ــ جسمی ازحالت سکون آزادانه ساقط میشود. وضع و سرعت آنرا پس از گذشت ۱ و ۲ و ۳ و ۴ ثانیه حساب کنید. O نقطه شروع حرکت را مبدأ، محورقائم را محور y ها و روبیالا را جهت مثبت فرض میکنیم:

مختصات اولیه y_0 وسرعت اولیه v_0 هردو صفراند شتاب روبپائین و بنابر این منفی است پس داریم:

$$a = -g = -۳۲ ft/sec^{۲}$$

ازفرمول های ۴-۱۹ و ۴-۱۸ نتیجه میشود

$$y = v_0 t + \frac{۱}{۲}at^{۲} = ۰ - \frac{۱}{۲}g^{۲} = -۱۶\frac{ft}{sec^{۲}} \times t^{۲}$$

$$v = v_0 + at = ۰ - gt = -۳۲\frac{ft}{sec^{۲}} \times t$$

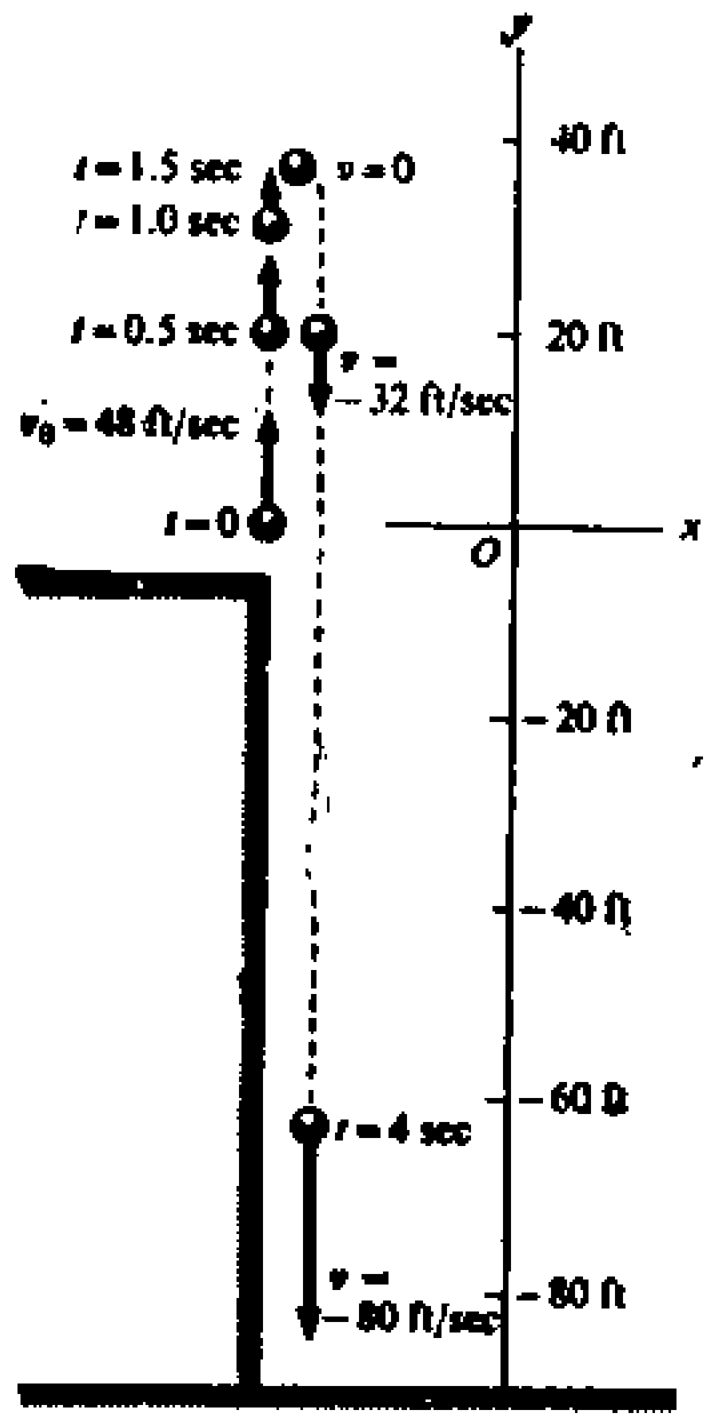
هر گاه $t = ۱ sec$ باشد داریم:

$$y = -۱۶\frac{ft}{sec^{۲}} \times ۱ sec^{۲} = -۱۶ft$$

$$v = -۳۲\frac{ft}{sec^{۲}} \times ۱ sec = -۳۲ ft/sec$$

بنابر این جسم ۱۶ft پائین‌تر از مبدأ اشت (y منفی است) وسرعت آن روبپائین (v منفی است) وبرابر ۳۲ft/sec است .

مختصات جسم وسرعت آن درزمانهای ۲ و ۳ و ۴ ثانیه نیز بهمین طریق محاسبه میشوند نتایج ایـن محاسبات در شکل ۴ـ۸ نشانـداده شده است .



شکل ۴ـ۹ وضع وسرعت جسمیکه‌روببالاپرتاب شده است

مثال ۴ـ ازبالای ساختمان مرتفعی توپی باسرعت ۴۸ft/sec بطرف بالا ودر امتداد قائم پرتاب میشود. توپ بالارفته وسپس روبپائین شروع به سقوط میکند . (ش ۴ـ۹ خط نقطه‌چین مسیر واقعی جسم‌نیست) پیداکنید . (a) وضع وسرعت توپ را یك ثانیه وچهارثانیه پس ازپرتاب. (b) سرعت آنرا وقتی ۲۰ft بالاتر از نقطه پرتاب واقع است . (c) توپ حـداکثر تـاچه ارتفاعی بالا میرود وزمان‌رسیدن به‌این ارتفاع چه اندازه است. نقطه پرتاب را مبدأ، امتداد قائم را محور y ها وجهت مثبت را روبیالا انتخاب‌کنید .

مختصات‌اولیه $y_0 = 0$ سرعت اولیه $v_0 = +۴۸ft/sec$ وشتاب $-۳۲ft/sec^۲$ است

بنابراین سرعت درهرلحظه برابراست با :

$$v = v_0 + at = ۴۸ft/sec - ۳۲ft/sec^۲ \times t \qquad (۴-۲۱)$$

و مختصات جسم‌درهرزمان برابر است با:

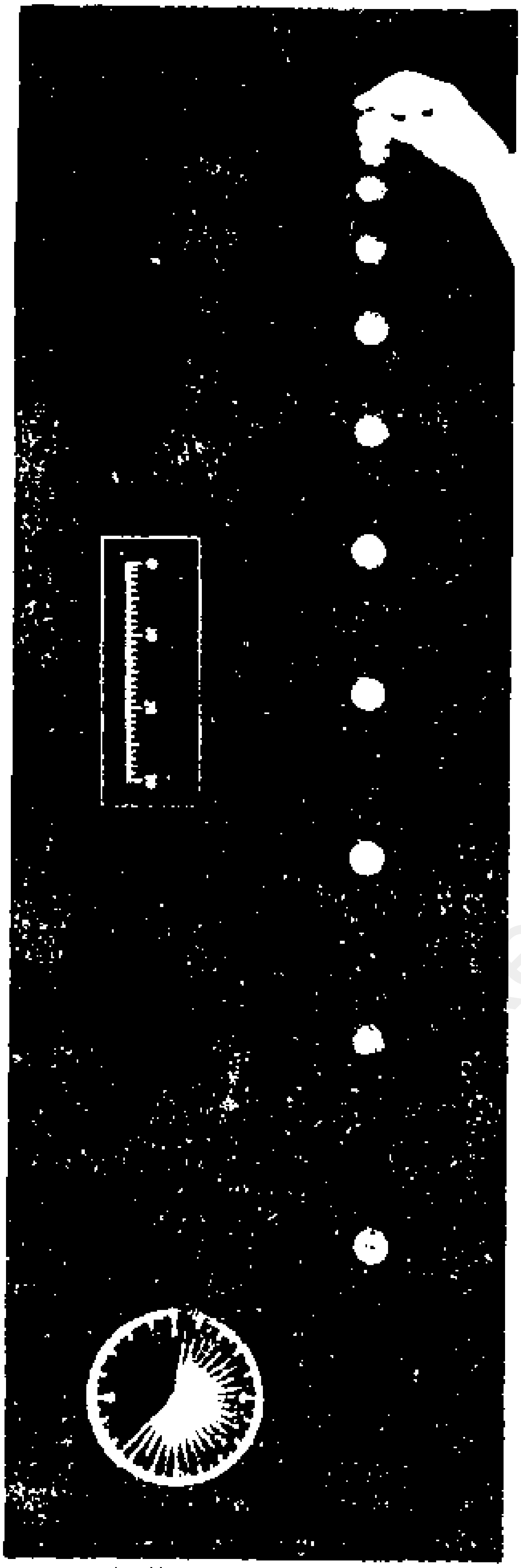
$$y = v_0 t + \frac{۱}{۲}at^۲ = ۴۸ft/sec \times t - ۱۶ft/sec^۲ \times t^۲$$

وسرعت‌درهروضع عبارتست از:

$$v^۲ = v_0^۲ + ۲ay = (۴۸ft/sec)^۲ - ۶۴ft/sec^۲ \times y \qquad (۴-۲۲)$$

(a) وقتی $t = ۱sec$ باشد داریم:

$$y = +۳۲ft \quad v = +۱۶ft/sec$$



شکل ۴-۱۰ عکس‌برداری‌های‌متوالی از جسمی که درحال سقوط است

توپ ۳۲ فوت بالای نقطه پرتاب است (y مثبت است) وسرعت آن روبه‌بالا وبرابر $16\,ft/sec$ است (سرعت مثبت است) وقتی $t=4\,sec$ باشد

$y = -64\,ft$ و $v = -80\,ft/sec$ است

دراینحال توپ $64\,ft$ زیر نقطه پرتاب است (y منفی است) وسرعت آن روبپائین (سرعت منفی است) وبرابر است با $80\,ft/sec$ توجه کنید که لازم نیست حتماً ابتدا ارتفاع ماکزیموم و زمان رسیدن باین ارتفاع را بدست آوریم . معادله حرکت وضع وسرعت جسم را مستقیماً ودرهرحال مشخص میکند خواه جسم بطرف بالا حرکت کند و خواه بطرف پائین. (d) وقتی توپ در ارتفاع $20\,ft$ بالای مبدأ پرتاب است داریم:

$$y = +20\,ft$$

و $v^2 = 1024\,ft^2/sec^2$ ، $v = \pm 32\,ft/sec$

توپ ازاین نقطه دوبار عبورمیکند یکی موقع بالارفتن ودیگری هنگام پائین آمدن وچنانکه می‌بینید جواب سرعت $\pm 32\,ft/sec$ است. سرعت در موقع بالارفتن مثبت و درموقع پائین آمدن منفی است . (e) در بالاترین نقطه سرعت برابر صفرمیشود وازآنجا:

$$y = +36\,ft$$

اکنون میتوان زمان را از فرمول ۴-۲۱ باقراردادن $v=0$ در فرمول بدست آورد ویا درفرمول ۴-۲۲ مقدار y را برابر $36\,ft$ قرار داد. ازحل‌دو معادله خواهیم داشت:

$$t = 1/5\,sec$$

شکل۴-۱۰ ازعکس‌برداری‌سریع ومتوالی

ازجسمی که درحال سقوط است بدست آمده است . این عکس بادستگاهی که توسط Dr. Harold E. Edgerton ساخته شده برداشته شده است. تعداد دفعاتی که منبع خاموش وروشن میشودقابل کنترل وزمان روشن شدن جسم بسیار کوتاه (چندملیونیم ثانیه) است بطوریکه عکس، مات ومبهم نیست. درتمام مدت حرکت دهانه دوربین بازاست وهروقت منبع روشن میشود گلوله را درهر وضعی که هست روشن میکند واثرآن برفیلم برجای میماند . فواصل زمانی خاموش وروشن‌شدن منبع‌مساوی است ومیتوان هریك‌ازآنها را Δt فرض‌نمود. فواصل اوضاع مختلف تصویر برروی فیلم متناسب باسرعت گلوله است زیرا زمان رسیدن گلوله ازیکوضع بوضع بعدی ثابت بوده است. چنانکه سرعت ثابت بود،میبایست فواصل اوضاع مختلف‌تصویر گلوله مساوی باشد وازدیاد دائمی‌آن دلیل براین است‌که سرعت گلوله دائماً درحال افزایش بوده است. هرگاه دوفاصله متوالی را باهم مقایسه‌کنیم ملاحظه میکنیم که ازدیاد سرعت در دوفاصله زمانی متوالی تقریباً ثابت مانده‌است. یعنی گلوله باسرعت‌ثابت سقوط کرده است

۴ـ۸ ، حرکت مستقیم‌الخط باشتاب متغیر

حرکت اتومبیل وهواپیما درلحظات اول شروع حرکت و نیز سقوط آزاد اجسام نمونه‌هائی ازحرکت باشتاب‌ثابت هستند اما موارد مهمی وجود داردکه‌شتاب‌حرکت،متغیر است وباید بتوان این نوع حرکات را موردمطالعه قرارداد. مثلا فرض کنید جسمی درجهت مثبت محور x ها درحرکت است وشتاب آن متناسب ولی مختلف‌العلامه با سرعت‌آن است. درچنین حرکتی داریم :

$$a = -kv$$

که درآن k ضریبی است ثابت. هرگاه تندی اولیه v_0 باشد، فاصله وتندی چه نوع‌تغییری نسبت بزمان‌دارند. چون $a = \frac{dv}{dt}$ است پس‌داریم:

$$\frac{dv}{dt} = -kv \quad \text{ویا} \quad \frac{dv}{v} = kdt$$

چون وقتی $t = 0$ است $v = v_0$ است پس

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt$$

نتیجه محاسبه این انتگرال بصورت زیراست :

$$\ln \frac{v}{v_0} = -kt$$

که ممکن است بصورت زیر نوشته شود :

$$v = v_0 e^{-kt} \qquad (۲۳-۴)$$

دیده میشود که سرعت تابع نمائی ونزولی زمان است . منحنی‌های نمائی در فیزیك زیاد دیده میشوند. کاهش‌عمل‌رادیواکتیویته اجسام رادیواکتیو، خالی شدن خازن واستهلاك امواج صوتی و نوسانهای الکتریکی همه توابع نمائی زمان هستند. برطبق‌فرمول ۴-۲۳ پس اززمان بینهایت سرعت جسم بصفرمیرسد .

برای پیداکردن راه طی شده بجای v اندازه آن $\frac{dx}{dt}$ را قرارمیدهیم‌یعنی‌خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt}$$

چون بازاء $t = 0$ داریم $x = 0$ لذاخواهیم داشت :

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-kt} dt$$

و :

$$x = -\frac{v_0}{k}\left[e^{-kt}\right]_0^t$$

$$x = \frac{v_0}{k}\left[1 - e^{-kt}\right] \qquad (۲۴-۴)$$

ازفرمول اخیرپیداست‌که باوجودآنکه پس اززمان بینهایت سرعت جسم‌بصفرمیرسد ولی درهمین فاصله زمان بینهایت. جسم فقط‌مسافت محدود $\frac{v_0}{k}$ راطی خواهدکرد .

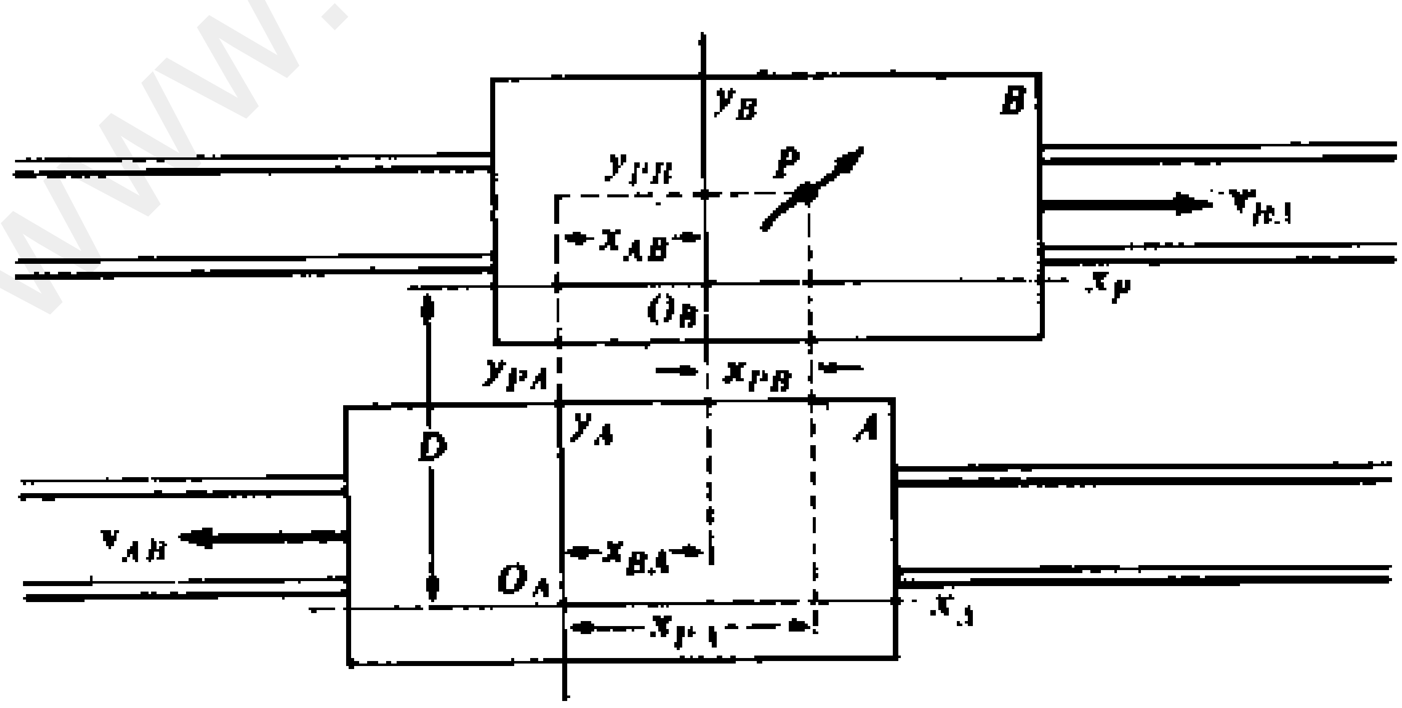
درانتهای همین فصل و فصل پنجم نمونه های دیگری ازحرکت باشتاب متغیر مورد بحث قرار خواهدگرفت .

۴ـ۹ ، سرعت نسبی

وضع،سرعت وشتاب یك جسم را فقط میتوان نسبت به نقطه معینی مشخص نمود . ممکن است مبدء نیز خود نسبت بهمبدء دیگر درحرکت باشدوقس علیهذا. وقتی میگوئیم «سرعت اتومبیل»منظورماسرعت اتومبیل‌نسبت به‌دستگاه مختصاتی‌است که‌بسطح زمین چسبیده وبا زمین درحرکت است. امامیدانیم زمین نسبت به خورشید و خورشید نیز نسبت به سایر ستارگان درحرکت است.

اصول نسبیت که توسط اینشتین و دیگران بیان وکامل شده‌است بیشتر باین مطلب توجه دارد که حرکت یك نقطه مادی را نسبت به دودستگاه مختصات که خود نسبت بهم در حرکت‌اند مورد بحث قراردهد . دامنه این بحث وسیع‌تر از آن است که به گفتار « همه حرکت ها نسبی هستند » محدود شود چه نسبی بودن حرکت مطلب بسیار ساده ایست که بامطالعه بسیار مختصری درمقدمات مکانیك بسادگی قابل فهم است .

برای سهولت فهم، فرض کنیم دواتومبیل‌شکل ۴ـ۱۱ روی مسیرهای موازی حرکت کنند و بهریك از آنها دستگاه مختصات متعامد x و y وصل باشد اتومبیل B نسبت به A بطرف راست واتومبیل A نسبت به B بطرف چپ حرکت میکند درلحظه $t=0$ مبدء های O_A و O_B مقابل یکدیگراند. پس اززمان t همانطورکه درشکل‌نشانداده شده است O_B در طرف راست O_A و O_A درطرف سمت چپ O_B قراردارد. واضح است که فاصله O_A از O_B همان فاصله O_B از O_A است .



شکل ۴ـ۱۱ دو اتومبیل A و B باسرعت‌های نسبی $V_{AB}=V_{BA}$ درحرکت‌اند

مختصات مبدء O_B نسبت بدستگاه مختصات متصل به اتومبیل A را به x_{BA} نشان داده مختصات O_A را نسبت بدستگاه مختصات متصل به B به x_{AB} نشان می‌دهیم واضح

است که :

$$x_{AB} = -x_{BA}$$

سرعت جسم B نسبت به A نسبت تغییرات x_{AB} به زمان وسرعت جسم A نسبت به B نسبت تغییرات x_{BA} بزمان است یعنی :

$$v_{BA} = \frac{dx_{BA}}{dt} \quad \text{و} \quad {}_{BA}v = \frac{dx_{AB}}{dt}$$

چون داریم $x_{AB} = -x_{AB}$ بنابراین داریم :

$$v_{BA} = -v_{AB}$$

سرعت های نسبی v_{AB} و v_{BA} بابردارهای مساوی ومختلف‌الجهت درشکل ۴-۱۱ نشانداده شده است.

توجه داشته باشید که مادرباره سرعت های A و B نسبت بزمین صحبتی نمی‌کنیم . فاصله x_{AB} درکلیه حالات زیر افزایش می‌یابد. A نسبت بزمین ثابت و B بطرف راست حرکت میکند. B نسبت بزمین ثابت و A بطرف‌چپ حرکت میکند. A وB نسبت بزمین در دوجهت مخالف حرکت میکند. A و B هردو بطرف راست حرکت میکند ولی سرعت B نسبت بزمین بیشترازسرعت A نسبت بزمین‌است. میتوان A و B را دو ایستگاه فضائی فرض نمود که از همه دستگاه های مختصات معمولی بینهایت دور باشند . در همه احوال آنچه مورد نظرماست سرعت نسبی دوجسم است .

اکنون جسم p درشکل۴-۱۱را درنظر گیرید مختصات x آن دردستگاه B برابر x_{PB} است. مختصات‌آن دردستگاه متصل به A برابر است با :

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA} \qquad (۴-۲۶)$$

هرگاه بجای x_{BA} اندازه‌مساوی‌آن یعنی $-x_{AB}$ قرارداده x_{PB} را بدست آوردیم :

$$x_{PB} = x_{PA} + x_{AB}$$

دیده میشود که هرگاه جای اندیس A و B را عوض‌کنیم فرمول ۴-۲۶ بفرمول فوق تبدیل میشود وباید همچنین باشد زیرا اساساً فرقی بین A و B نیست .

هرگاه سرعت v_{BA} ثابت باشد دراینصورت داریم :

$$x_{BA}=v_{BA}\times t$$

و :

$$x_{PA}=x_{PB}+v_{BA}\times t \qquad (۲۷-۴)$$

درشکل ۴-۱۱ برای واضح شدن محورهای xها در دو سیستم بفاصله D از یکدیگر رسم شده‌اند. برای سهولت فرض کنیم محورهای x ها وابسته بهردو اتومبیل درسطح بالائی این اتومبیل‌ها دریك سطح و منطبق برهم قرار گرفته باشند در اینصورت مختصات y نقطه مادی p در هردو دستگاه یکی است وهر گاه این نقطه بالای سطح xy قرار داشته باشد z آن نیز درهردوسیستم یکی خواهد بود .

معادلاتی که بتواند رابطه‌ای بین مختصات یك حادثه دردو دستگاه مختصات مذکور بیان کند بنام معادلات انتقال گالیله - نیوتون نامیده میشوند زیرا دو دستگاه مختصات A و B باسرعت ثابت نسبت بهم درحرکت‌اند. درچنین دستگاهی :

$$t_A=t_B \qquad (۲۸-۴)$$

خواهد بود زیرا نیوتون معتقد بود که گذشت زمان برای کلیه دستگاههای مختصات یکسان است واین اولین اختلاف اساسی بین نظریه نسبی عمومی ومکانیك کلاسیك است.

حال فرض کنیم P نسبت به‌اتومبیل B درحرکت است مؤلـفه سرعت آن درامتداد محور x ها نسبت به B برابر $\frac{dx_{PB}}{dt}$ است هر گـاه از فرمول ۴-۲۶ نسبت به t مشتق بگیریم سرعت نسبت به A یا $\frac{dx_{PA}}{dt}$ چنین بدست میآید :

$$\frac{dx_{PA}}{dt}=\frac{dx_{PB}}{dt}+\frac{dx_{BA}}{dt}$$

$$(v_{PA})_x=(v_{PB})_x+v_{BA} \qquad (۲۹-۴)$$

چون مختصات y و z درهردو دستگـاه یکی هستند مؤلفه سرعت در امتـداد محور y ها و z ها درهردستگاه یکی است .

نحوه اندیس گذاری کمی مشکل است ولی چاره‌ای نیست زیرا ناچاریم سرعت جسمی را (نقطه مادی P) نسبت بهمبدء مختصاتی (A یا B) و درجهت معینی (x یا y یا z) مشخص کنیم بنابراین ناچاریم سه اندیس برای v بگذاریم .

درآنچه گفتیم حرکت نسبی دستگاه فقط درامتداد محور x ها صورت میگیرد .

سرعت‌نسبی v_{BA} درفرمول۴ـ۲۹ نیزمؤلفه‌سرعت درامتدادهمین محوراست. هرگاه سرعت نسبی دستگاه نسبت به‌محورها (امتداد محورها همیشه موازی یکدیگر باقی می‌مانند) در جهت دلخواه باشند، سرعت نسبی v_{BA} سه مؤلفه درامتداد سه‌محور x و y و z خواهدداشت وسه معادله نظیر فرمول ۴ـ۲۹ برای سه‌مؤلفه سرعت وجوددارد. میتوان یك معادله‌برداری نوشت که هرسه فرمول مذکور سه مؤلفه‌آن باشند این معادله چنین است.

$$\boxed{\mathbf{v}_{PA} = \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA}} \qquad (۴-۳۰)$$

این‌معادله،معادله برداری سرعت‌نقطه مادی A است‌و بموجب‌آن‌سرعت‌نقطه p نسبت به A برابر جمع برداری سرعت‌این نقطه نسبت بدستگاه B وسرعت دستگاه B نسبت‌بدستگاه A است.

ترتیب قرارگرفتن اندیس‌ها درفرمول ۴ـ۳۰را باروشی‌که به «قاعده domino» مشهوراست در ذهن خود جایگزین میکنیم بدین ترتیب‌که میگوئیم اندیس دوم جزء اول بااندیس اول جزء دوم (درسمت راست فرمول) یکی است . اولین اندیس جزء اول سمت راست وآخرین اندیس جزء آخر این سمت بترتیب اندیس هـای اول ودوم سمت چپ را تشکیل میدهند. هرگاه تعداد دستگاه‌های مختصات بیش‌ازدو باشد نیزمیتوان ازاین قاعده استفاده نمود. فرض‌کنیم درشکل ۴ـ۱۱، P جسمی باشدکه برسطح‌اتومبیل B می‌لغزد و F حشره‌کوچکی باشدکه برروی جسم P درحرکت است. سرعت حشره‌نسبت به A ازرابطهٔ زیر بدست میآید :

$$\mathbf{v}_{FA} = \mathbf{v}_{FP} + \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{BA}$$

و هرگـاه سرعت جسم A نسبت بزمین v_{AE} باشد، سرعت حشره نسبت بـه زمین چنین است .

$$\mathbf{v}_{FE} = \mathbf{v}_{FP} + \mathbf{v}_{PB} + \mathbf{v}_{BA} + \mathbf{v}_{AE}$$

مثال ۱ـ اتومبیل A با سرعت ۶۵mi/hr نسبت بزمین در حرکت است مسیر حرکت افقی‌ومستقیم‌الخطاست موتورسیکلت B درهمین‌امتداد وجهت باسرعت ۸۰mi/hr حرکت میکند. سرعت B نسبت به A چقدراست. هرگاه اندیس E سرعت نسبت بزمین‌را مشخص‌کند داریم :

$$v_{AE} = ۶۵\,\text{mi/hr} \qquad v_{BE} = ۸۰\,\text{mi/hr}$$

ما میخواهیم v_{BA} را حساب کنیم .

ازقاعده ترکیب سرعت‌ها نتیجه میشود :

$$v_{BA}=v_{BE}+v_{EA}$$

اما :

$$v_{EA}=-v_{AE}$$

بنابراین :

$$v_{BA}=v_{BE}-v_{AE}=۸۰\,mi/hr-۶۵mi/hr=۱۵mi/hr$$

موتورسیکلت باسرعت ۱۵ میل برساعت ازاتومبیل جلومی‌افتد.

مثال ۲ـ هرگاه B جلو A میبود سرعت چه تغییری میکرد ؟

بطورکلی توجه داشته باشیدکه **وضع نسبی** دراندازه سرعت نسبی دو جسم بی‌تأثیر است . سرعت جسم B نسبت به A بازهم $+۱۵mi/hr$ است ولی اینك او جلو A قراردارد.

مثال ۳ـ قطب‌نمای یك هواپیما نشان میدهدکه امتدادآن روبشمال‌ممنداست وسرعت سنج‌آن سرعت $۱۲۰mi/hr$ را نسبت بهوانشان میدهد.هرگاه‌باد باسرعت $۵۰mi/hr$ ازغرب بشرق بوزد سرعت هواپیما را نسبت بزمین بدست‌آورید .

اندیس A مربوط به هواپیما و اندیس B مربوط به باد واندیس E مربوط به‌زمین است خواهیم داشت :

$$v_{AB}=۱۲۰\,mi/hr$$

$v_{BE}=۵۰\,mi/hr$ بطرف شرق

میخواهیم اندازه وجهت v_{AE} را بدست آوریم.

$$v_{AE}=v_{AB}+v_{BE}$$

درشکل ۴ـ۱۲ سه سرعت فوق نشانداده شده‌است . از این‌شکل معلوم میشودکه:

$v_{AE}=۱۳۰\,mi/hr$ (بطرف‌شمال‌شرق °۲۲/۵)

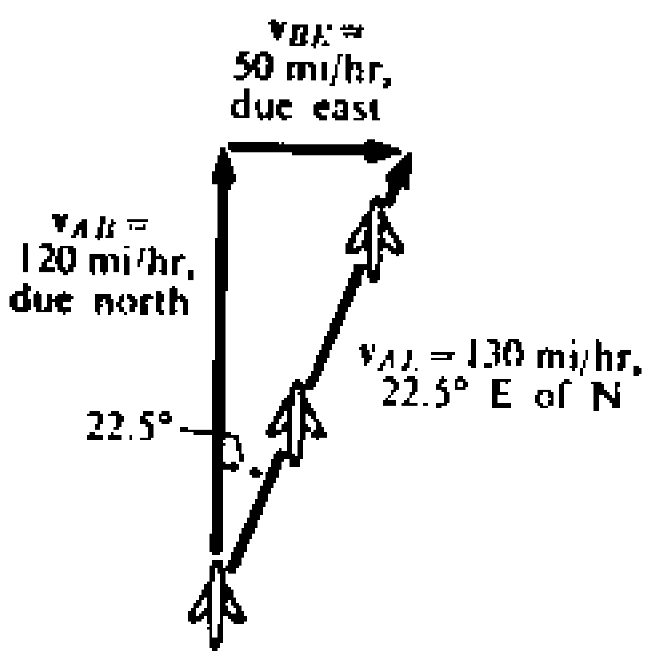
مثال ۴ـ هواپیما روبه‌چه جهت سمت بگیرد تاجهت حرکت آن رو بشمال باشد . دراینحال سرعت‌آن نسبت بزمین چه‌اندازه است ؟ سرعت باد و سرعت نسبی هواپیما همان مقادیر مذکور درمثال قبل را دارا میباشند.

اکنون داریم :

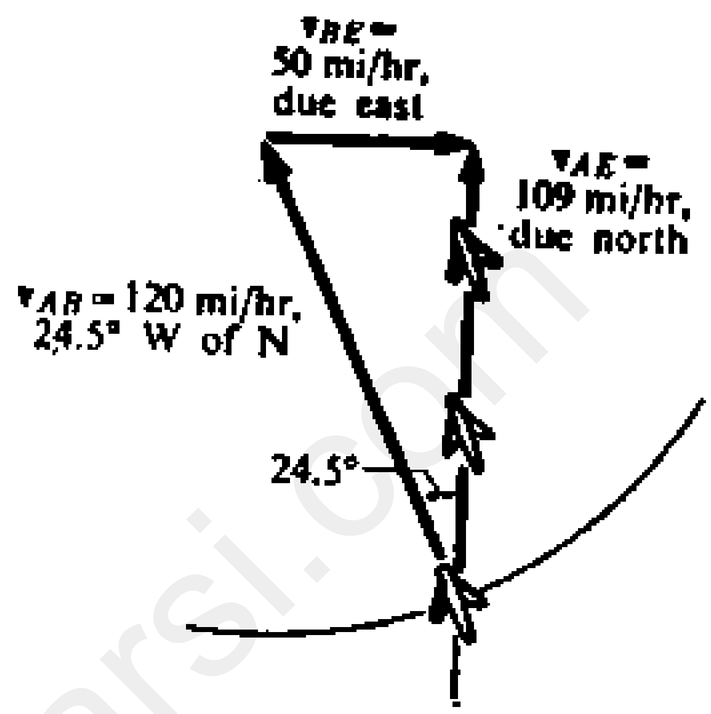
$v_{AB}=۱۲۰\,mi/hr$ (جهت‌آن نامعلوم است)

$\mathbf{v}_{BE}=50\ \mathrm{mi/hr}$ بطرف شرق

میخواهیم $\mathbf{v}_{AE}$ را که اندازه‌آن نامعلوم وجهت‌آن روبشمال است تعیین‌کنیم (توجه داشته باشید که دراین‌مثال ومثال قبل‌دومجهول وجود دارد در مثال‌قبل دومجهول عبارت بودند ازاندازه وجهت $\mathbf{v}_{AE}$ دراین مثال جهت $\mathbf{v}_{AB}$ واندازه $\mathbf{v}_{AE}$ نامعلوم است .)



شکل ۴-۱۲



شکل ۴-۱۳

سه سرعت نسبی باید درمعادله برداری زیر صدق کند :

$$\mathbf{v}_{AE}=\mathbf{v}_{AB}+\mathbf{v}_{BE}$$

مسئله را بطریق زیر باروش‌ترسیم حل میکنیم. (شکل۴-۱۳) ابتدا بردار $\mathbf{v}_{BE}$ را که اندازه و امتداد و جهت‌آن معلوم است رسم میکنیم و سپس از انتهای این بردارخط نامحدودی در امتداد $\mathbf{v}_{AE}$ رسم‌میکنیم. مبدأ $\mathbf{v}_{BE}$ را مرکز قرار داده بشعاع $\mathbf{v}_{AB}$ قوسی رسم میکنیم‌تاخط منطبق برامتداد $\mathbf{v}_{AE}$ را قطع‌کند. ازمحل‌برخورد خط وقوس بردارهای $\mathbf{v}_{AB}$ و $\mathbf{v}_{AE}$ را رسم‌میکنیم . ازحل مثلث قائم‌الزاویه بدست میآید $\mathbf{v}_{AE}=109\ \mathrm{mi/hr}$ و امتداد $\mathbf{v}_{AB}$ درامتداد $24/5°$ بطرف شمال غرب ممتد است . یعنی باید امتداد حرکت هواپیما $24/5°$ بطرف‌شمال‌الغرب واندازه سرعت‌آن برابر $109\ \mathrm{mi/hr}$ باشد.

۴-۱۰، نمایش ترسیمی حوادث نسبت بدستگاه‌های متحرك

میتوان حرکت یك نقطه مادی‌را نسبت بدودستگاه مختصات‌که باسرعت ثابت نسبت بیکدیگردرحرکت‌انددریك دیاگرام نشانداد. فرض‌کنیم سرعت‌ها فقط در امتدادمحورهای x ها وجود دارند . فهم این دیاگرام در بیان مقدمات نسبیت خاص Special relativity مورد استفاده قرارمیگیرد .