$$f_s=\mu_s.N$$ (آستانه حرکت)

ودر نتیجه :

$$\mu_s=\frac{f_s}{N}=\frac{\text{۸lb}}{\text{۲۰lb}}=\text{۰/۴۰}$$

ازشکل ۲ـ۱۱d نتیجه میشود :

$$\Sigma F_y=N-w=N-\text{۲۰lb}=\text{۰}$$

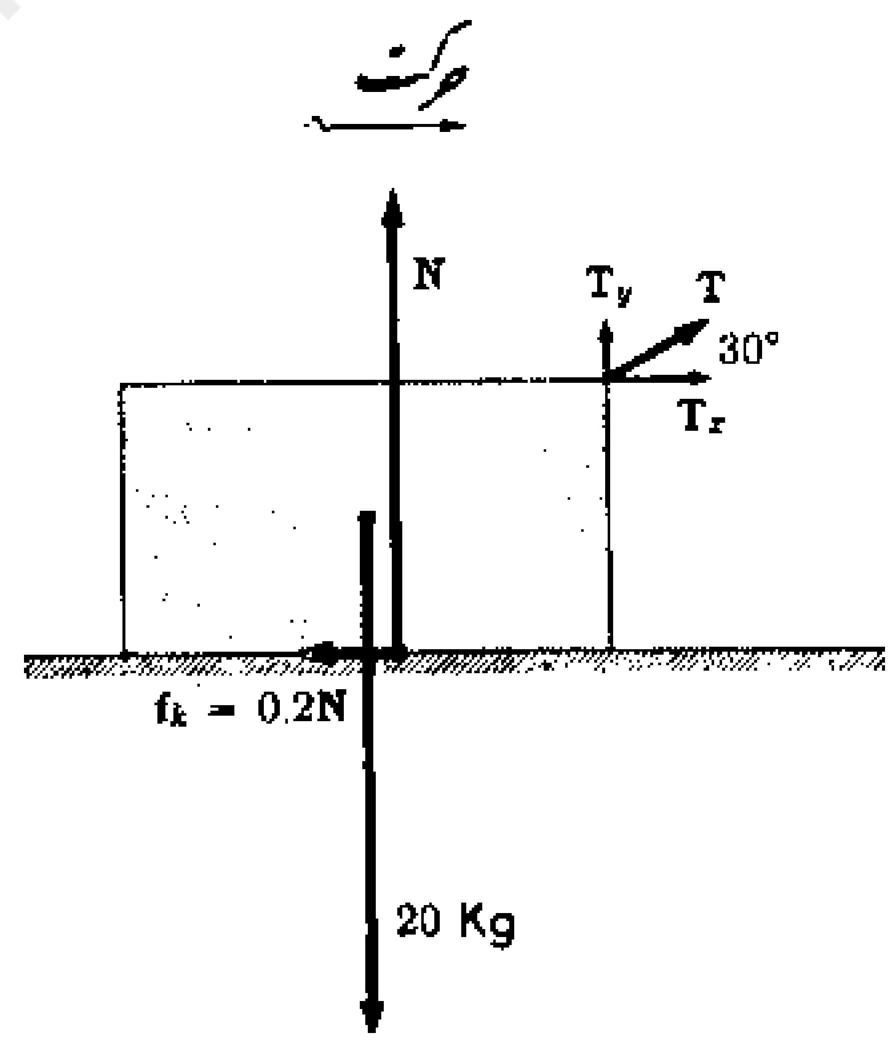
$$\Sigma F_x=T-f_k=\text{۴lb}-f_k=\text{۰}$$

$$f_k=\mu_k$$ (درحال حرکت)

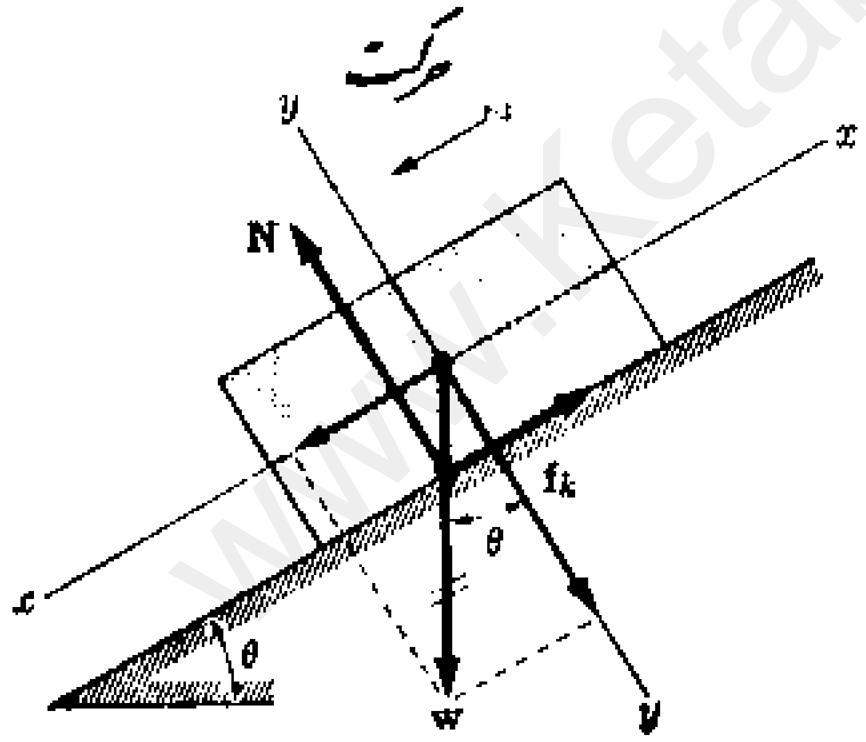
لذا :

$$\mu_k=\frac{f_k}{N}=\frac{\text{۴lb}}{\text{۲۰lb}}=\text{۰/۲۰}$$

مثال ۲ـ وقتی نیروی افقی مؤثرجسم شکل ۲ـ۱۱(b) درحال سکون برابر ۵lb



شکل ۲ـ۱۳ نیروهای مؤثر برجسمی‌که بطرف راست کشیده میشود و با سرعت ثابت برروی سطح میلغزد .



شکل ۲ـ۱۴ نیروهای مؤثر برجسمی‌که باسرعت ثابت‌روی سطح شیب داربپائین‌میلغزد(با اصطکاک)

است نیروی اصطکاک چه اندازه است ؛ داریم :

$$\Sigma F_x = T - f_s = 5lb - f_s = 0$$ (اصل اول)

$$f_s = 5lb$$

دقت کنید دراین که حالت‌داریم:

$$f_s < \mu_s . N$$

مثال ۳ـ چه‌نیروی T درامتداد °۳۰ بالای افق‌برجسمی بوزن $20lb$ بطرف‌راست اثر کند تاآنرا باسرعت ثابت برروی سطح بکشد (ش۲ـ۱۳) ضریب اصطکاك لغزشی برابر ۰/۲۰ است نیروهای مؤثر برجسم‌درشکل‌نشانداده شده‌است ازشرط اول‌تعادل نتیجه میشود:

$$\Sigma F_x = T\cos 30^\circ - 0/2N = 0$$

$$\Sigma F_y = T\sin 30^\circ + N - 20lb = 0$$

ازحل این دومعادله $T = 4/15lb$ و $N = 17/9lb$ بدست میاید.

مثال ۴ـ درشکل ۲ـ۱۴ جسمی‌نشان داده شده است‌که برسطح شیب داری بزاویه شیب θ قراردارد . زاویه شیب‌طوری تنظیم شده‌است‌که اگر جسم بحرکت درآید باسرعت ثابت بپائین‌میلغزد.زاویه‌θ را پیداکنید .

نیروهای مؤثر بر جسم عبارتند از وزن آن w و N مؤلفه قائم و f_k مؤلفه افقی (اصطکاك) نیروی وارد ازسطح برجسم . خواهیم داشت :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= \mu_k . N - w\sin\theta = 0 \\ \Sigma F_y &= N - w\cos\theta = 0 \end{aligned}\right\}$$ (اصل اول)

لذا داریم :

$$\mu_k . N = w\sin\theta \quad \text{و} \quad N = w\cos\theta$$

از تقسیم روابط قبلی بریکدیگر نتیجه میشود :

$$\mu_k = \tan\theta$$

نتیجه میشودکه جسمی واقع برسطح شیب‌دار (باهر وزن دلخواه) موقعی شروع به لغزش میکندکه $\tan$ زاویه شیب‌آن باضریب اصطکاك برابر باشد. اندازه‌گیری این زاویه یکی ازطرق تعیین ضریب اصطکاك است.

مسائل

پیش ازشروع بحل این مسائل قسمت ۲ـ۷ را بدقت بخوانید . هر گاه اشکالی درحل مسائل پیش‌آمد دراثر کمی اطلاعات ریاضی شما یا دلیل ندانستن «فرمول» لازم برای حل مسئله نیست . تنهافرمول موردنیاز شما $\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ است. اشکالات‌شماممکن است بعلل‌زیر باشد. (۱) جسمی راکه باید نیروهای وارد بر آن رسم شود درست انتخاب نکرده‌اید. (۲) نیروهائی‌راکه برجسم اثرمیکنند بدقت‌مشخص نکرده‌اید. وقتی این‌نیروها را مشخص کنید حل فیزیکی مسئله تمام است بقیه حل مسئله محاسبات معمولی‌ریاضی‌است.

۲ـ۱ فرض‌کنیدکتابی بوزن ۴lb بحال سکون بر کف دست‌شما متکی است. جملات زیررا کامل کنید .

(a) نیروئی‌برابر۴lb ازبالا به‌پائین توسط .... بر کتاب اثرمیکند.

(b) نیروئی برابر .... روببالا توسط دست شما بر ...... اثرمیکند.

(c) آیا نیروی مذکور در (b) عکس‌العمل نیروی مذکور در (a) است ؟

(d) عکس‌العمل نیروی مذکور در (a) نیروئی است برابر ...... که توسط ...... بر .... اثرمیکند .

(e) عکس‌العمل نیروی مذکور در (b) نیروئی است برابر ...... که توسط ...... بر ...... اثر میکند .

(f) تساوی دو نیروی مذکور در (a) و (b) از اصل ...... نیوتون نتیجه میشود .

(g) تساوی دونیروی مذکور در (e) و (h) ازاصل .... نیوتون نتیجه میشود .

اکنون فرض‌کنید نیروی وارده ازدست شما بر کتاب به۵lb افزایش یابد.

(h) آیا کتاب بحال تعادل باقی می‌ماند یا نه ؟

(i) نیروی‌وارده از دست‌شما بر کتاب با نیروی وارده از زمین بر کتاب مساوی هستند یانه ؟

(j) آیا نیروی وارده اززمین برکتاب مساوی ومختلف‌الجهت با نیروی وارده از کتاب برزمین است یانه ؟

(k) آیا نیروی وارده ازدست شما برکتاب بانیروی وارده ازکتاب بـردست شما برابرانديانه؟

وبالاخره فرض‌کنید وقتی‌کتاب ببالا میرود دست خود را بیکباره عقب بکشید

(l) چند نیرو برکتاب‌اثرمیکند ؟

(m) آیاکتاب بحال‌تعادل است؟

(n) نیروی وارده‌اززمین برکتاب باچه‌نیروئی متعادل میشود.

۲ـ۲ جسمی ازحاشیه میزی پرت میشود و پائین می‌افتد . (a) وقتی جسم در حال افتادن است چه نیرو یا نیروهائی برآن اثرمیکند ؟

(b) عکس‌العمل این نیرو یا نیروها چیست برچه جسم یا اجسامی اثر میکنند ؟ ازمقاومت هوا صرفنظر کنید .

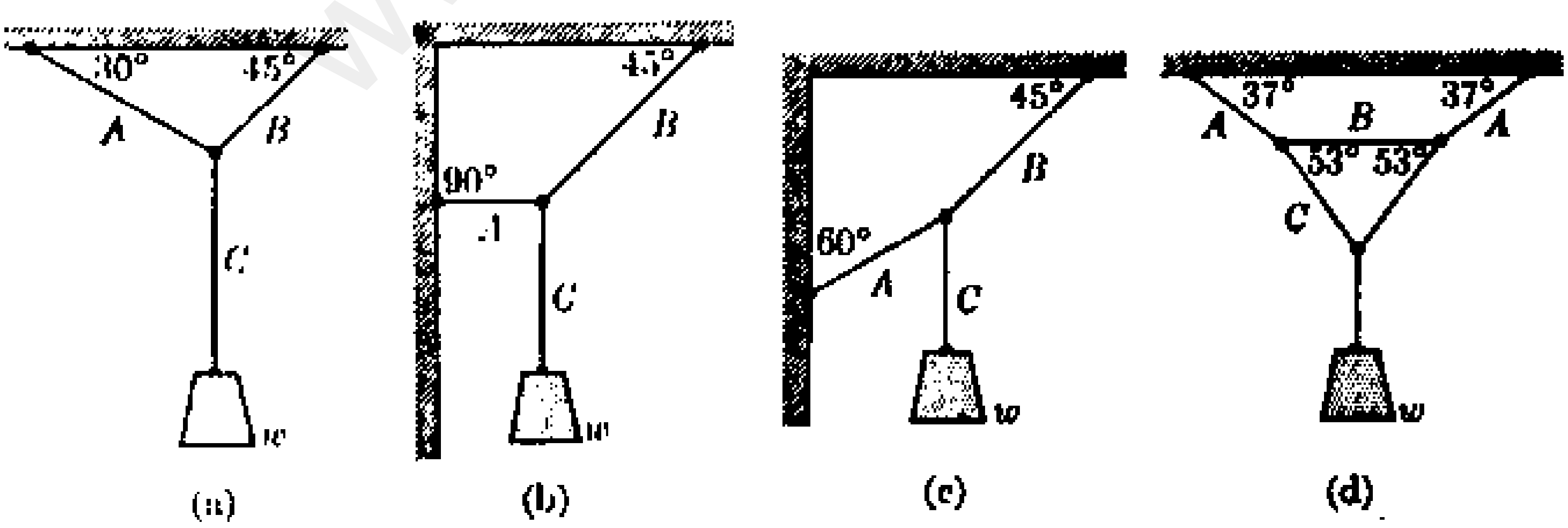
۲ـ۳ دو وزنه ۱۰ پوندی بدوسرطنابی که برقرقره ثابت بدون اصطکاکی قراردارد وصل‌اند . محور قرقره بکمك زنجیری بسقف آویزان است.

(a) کشش مؤثر برطناب چه اندازه است. (b) کشش مؤثر برزنجیر چه‌اندازه‌است؟

۲ـ۴ فرض‌کنید وزن وزنه درشکل ۲ـ۶ برابر ۵۰ lb باشدکشش‌های $T_۲$ و $T_۳$ را حساب‌کنید اگر (a) $\theta_۲=\theta_۳=۶۰^\circ$ باشد .

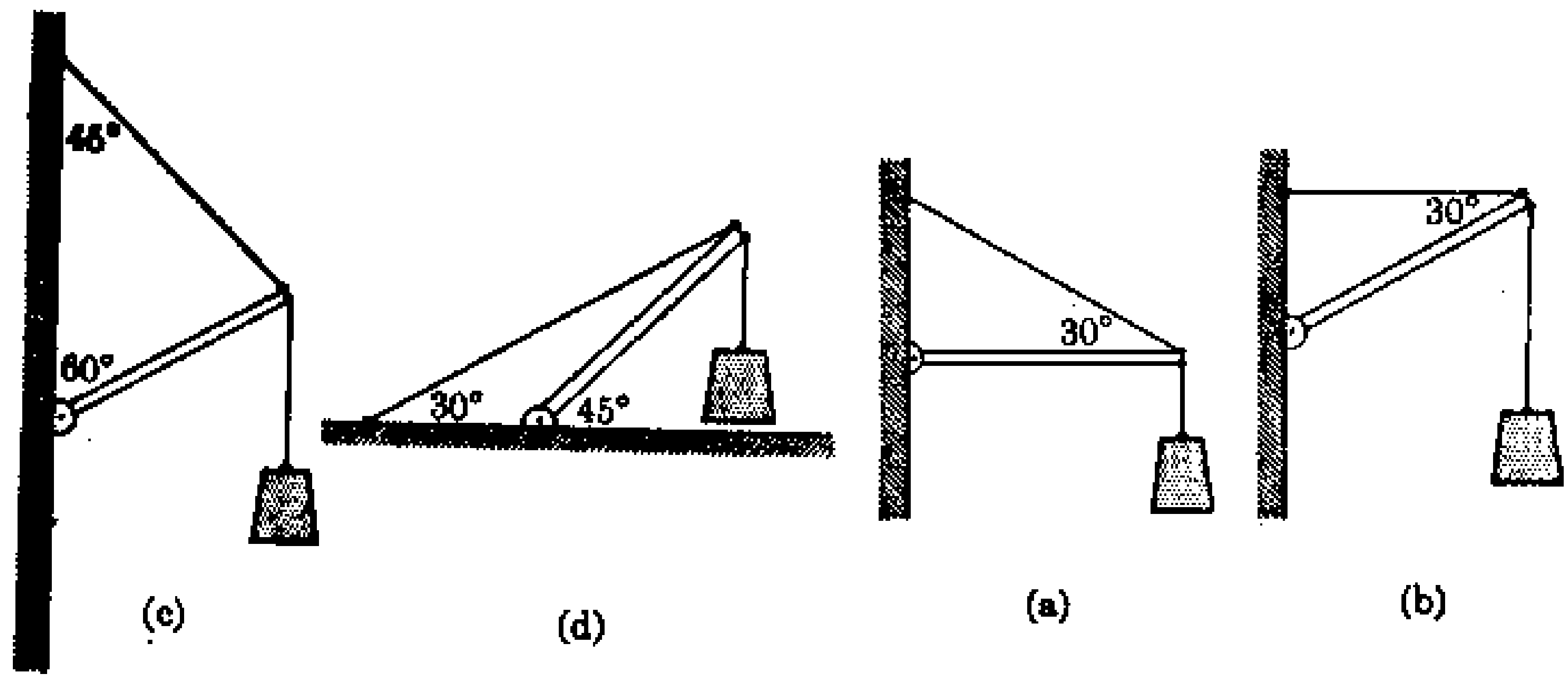
(b) $\theta_۲=\theta_۳=۱۰^\circ$ باشد (c) $\theta_۳=۰^\circ$ و $\theta_۲=۶۰^\circ$ باشد (d) اگر $AB=۱۰ft$ و $AO=۶ft$ و $OB=۸ft$ باشد .

۲ـ۵ هرگاه وزن وزنه درشکل های ۲ـ۱۵ برابر ۲۰۰lb باشدکشش مؤثر برهر طناب را بدست آورید .



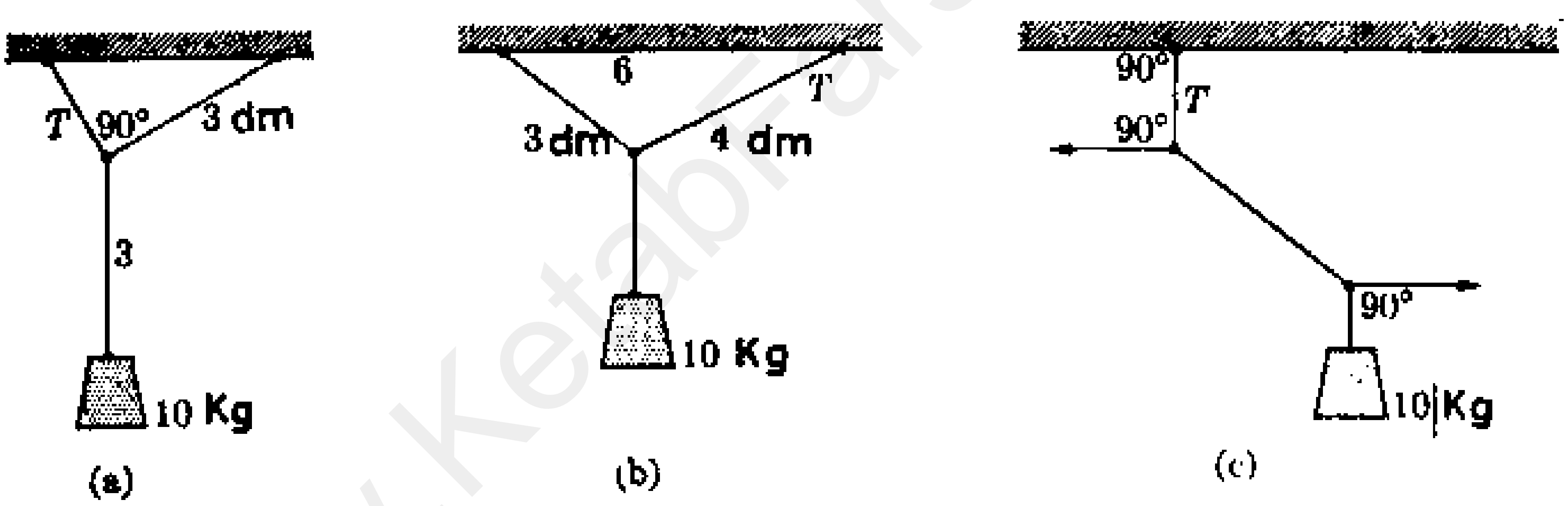
شکل ۲ـ۱۵

۲ـ۶ وزن میله شکل‌های ۲ـ۱۶ قابل اغماض ووزن وزنه ۱۰۰۰kg است T نیروی مؤثر بر طنابی که میله را بـدیوار وصل میکند و (c) نیروی تراکمی مؤثر بر میله را بدست آورید .



شکل ۲-۱۶

۲-۷(a) درکدامیك ازشکل‌های۲-۱۷ میتوان اندازه‌عددی کشش‌های مؤثر برطناب را با معلوماتی که درشکل داده شده بدست آورد ؛ (b) درهریك ازشکل‌هاکه معلومات کم است خودتان برای هر کمیت دلخواه اندازه‌ای فرض و مسئله را حل کنید .

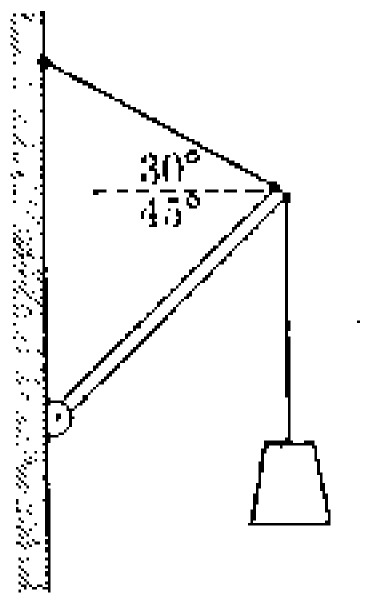


شکل ۲-۱۷

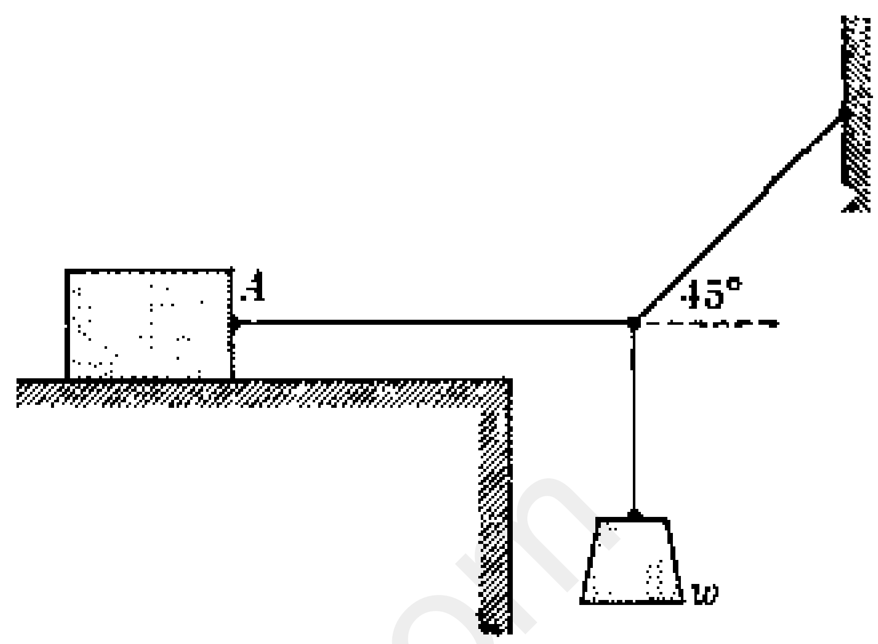
۲-۸ یك تیرافقی بطول ۸ft از یکطرف بدیوار قائمی لولا شده و طنابی انتهای دیگرآنرا به نقطه‌ای ازدیوار که دربالای تیرواقع است وصل میکند. جسمی بوزن ۵۰۰lb باطنابی‌بهمین انتهای میله آویزان‌است. (a) هر گاه بخواهیم کشش مؤثر برطناب مایل از ۱۰۰۰lb تجاوزنکند نقطه اتصال طناب مایل بدیوار درچه فاصله قائمی بالای لولا باید قرار گیرد ؛ (b) هر گاه طناب را یك فوت پائین‌تر بدیوار وصل‌کنیم کشش درآن‌چندپوند افزایش مییابد؛ میله درهرحال افقی‌است وازوزن آن صرفنظرمیشود.

۲-۹ یکسر طنابی بطول ۵۰ft بیك اتومبیل و انتهای دیگرآن به‌درختی وصل‌است مردی وسط‌طناب‌را گرفته درامتداد عمود برطناب‌آنرا باندازه ۲ft بیك طرف میکشد نیروی مؤثربر اتومبیل را بدست آورید .

۲ـ۱۰ حداکثر نیروی w را درشکل ۲ـ۱۸ حساب کنید درصورتیکه دو شرط زیر برقرارباشد. اولا حداکثرکشش قابل تحمل طناب ۱۰۰۰lb است. ثانیاً حداکثرتراکم قابل تحمل میله ۲۰۰۰lb است از وزن میله صرفنظر کنید . طناب قائم بحد کافی قابلیت تحمل دارد .



شکل ۲ـ۱۸



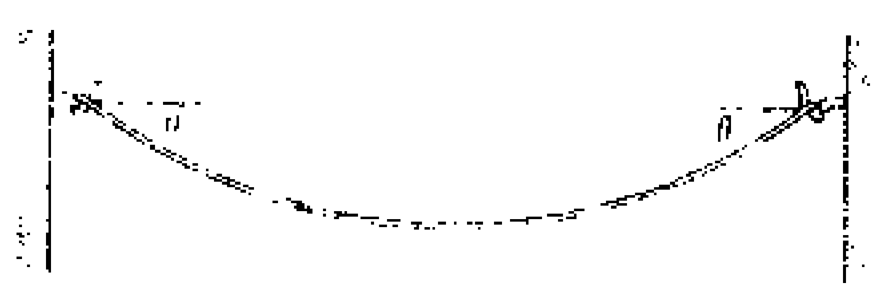
شکل ۲ـ۱۹

۲ـ۱۱ (a) وزن جسم A در شکل ۲ـ۱۹ برابر ۱۰۰lb است . ضریب اصطکاک درحالت سکون بین جسم وتکیه‌گاه برابر ۰/۳۰ است . وزن w برابر ۲۰lb و دستگاه درحال تعادل است نیروی اصطکاک مؤثر برجسم A را حساب کنید (b) حداکثر w چقدر باشد تا دستگاه بحال تعادل باقی بماند .

۲ـ۱۲ جسمی به طنابی بطول ۱۰ft آویزان است . طناب دیگرراکه بوسط طناب اول وصل است وبطور افقی قراردارد؛ بانیروئی‌برابر نصف وزن جسم میکشیم . طناب دوم‌را همیشه بحال افقی نگاه میداریم (a) وزنه چقدر درامتداد افقی و (b) چقدر درامتداد قائم کشیده میشود ؟

۲ـ۱۳ زنجیرقابل انعطافی بوزن w بدوقلاب که دریك سطح واقمند آویزان است (شکل ۲ـ۲۰) زاویه زنجیر با افق درهر دوطرف برابر θ است . (a) نیروئی‌که‌اززنجیر برقلاب سمت چپ‌وارد میشود چه اندازه است ؟ (b) کشش T مؤثر برپائین ترین نقطه‌زنجیر چه اندازه است .

۲ـ۱۴ جسمی بوزن ۳۰lb برسطح شیب داری واقع است وبوسیله طنابی‌که ازروی قرقره‌ای عبورمیکند بوزنه آویزان ۱۰ پوندی وصل است . اصطکاك قرقره و سطح شیب‌دار برابر صفر است . (بشکل ۲ـ۱۰ رجوع‌شود) پیداکنید(a)زاویه‌شیب سطح‌را برای‌اینکه‌جسم باسرعت‌ثابت حرکت کند (b) کشش‌مؤثر برطناب



شکل ۲ـ۲۰

رادراین حال. (c) نیروی قائم وارده ازسطح برجسم.

۲-۱۵ (a) جسمی برسطح‌خشن‌افقی‌متکی‌است. نیروی‌افقی ومتغیر T که ازصفرشروع بافزایش‌میکندبر آن وارد میشود. یک‌منحنی رسم کنیدکه T درآن برمحورطول‌ها و f نیروی اصطکاک برمحورعرض‌هاانتخاب شده باشد وازه $T=$۰ شروع‌شود. در روی صفحه مختصات نقطه سکون،آستانه‌حرکت ومنطقه‌حرکت‌را مشخص کنید. (b) جسمی بوزن w برتخته‌خشنی قراردارد یکطرف تخته را از زمین بلندمیکنیم زاویه شیب θ راآنقدر زیاد میکنیم‌که جسم شروع‌بحرکت کند. دومنحنی رسم کنیدکه درهردو ،زاویه θ محورافقی انتخاب شده‌باشد. در اولی نسبت $\frac{N}{w}$ را تابعی از θ فرض‌کرده آنرا در امتداد محور قائم انتخاب و منحنی رارسم‌کنیدودردومی‌نسبت $\frac{f}{w}$ (نیروی اصطکاک به وزن جسم) را تابع θ فرض و منحنی را رسم‌کنید. دراین حال نیزمنطقه‌سکون ، آستانه حرکت و منطقه حرکت را روی صفحه مختصات مشخص‌کنید.

۲-۱۶ جسمی بوزن $20\,lb$ برسطح افقی قراردارد. ضریب اصطکاک درحالت‌سکون بین جسم وسطح برابر ۰/۴۰ وضریب اصطکاک لغزشی آندو ۰/۲ است. (a) چه نیروی اصطکاکی برجسم اثرمیکند؟ (b) هرگاه نیروی $5lb$ برآن‌اثرکندانداز‌ه نیروی اصطکاک مؤثر برجسم چه اندازه است؟ (c)کمترین نیروئی که جسم را در آستانه حرکت قرار میدهد چقدر است؟ (d) چه نیروئی‌جسم را (اگر متحرک باشد) درحال حرکت یکنواخت نگاه میدارد؟ هرگاه نیروی $10\,lb$ درامتداد افقی برجسم اثرکند اندازه نیروی اصطکاک را بدست آورید.

۲-۱۷ جسمی بانیروی $10\,lb$ که درامتداد °۳۰ بالای افق برآن واردمیشود باسرعت ثابت روی سطح افقی حرکت میکند. ضریب اصطکاک لغزشی بین جسم وسطح ۰/۵۰ است وزن جسم چه اندازه است؟

۲-۱۸ وزن جسمی $14\,lb$ است. این جسم‌که بوسیله طنابی بجسم آویزان دیگری بوزن $10\,lb$ بسته شده است روی‌سطح شیب‌داری قراردارد. طناب رابط ازروی قرقره بدون اصطکاکی عبورمیکند (شکل ۲-۱۰) ضریب اصطکاک لغزشی بین جسم وسطح $\frac{1}{7}$ است. بازاء کدام دومقدار θ جسم باسرعت ثابت حرکت میکند (توجه $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$)

۲-۱۹ جسمی بوزن $100\,lb$ روی سطح‌شیب‌داری قراردارد ونظیرمسئله قبل(ش۲-۱۰) با طنابی که ازروی قرقره بدون اصطکاکی عبورمیکند بوزنه آویزان w وصل است. ضریب

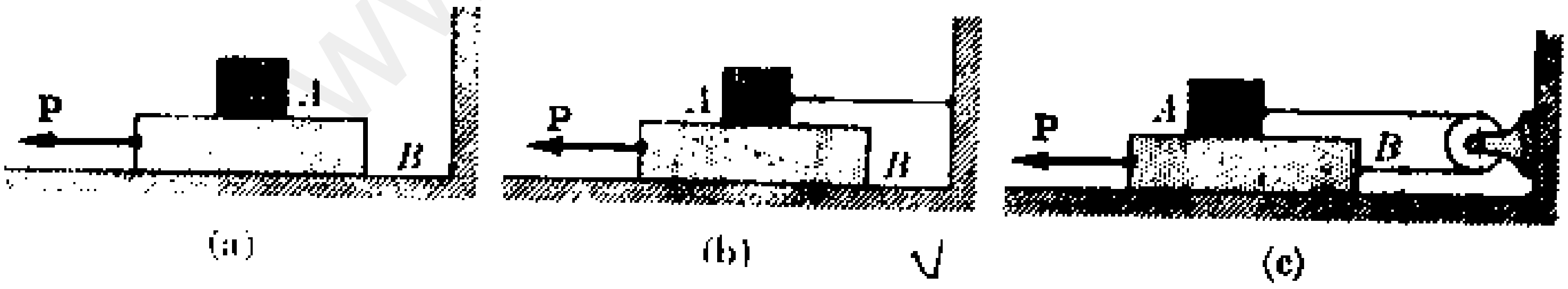
اصطکاک درحالت سکون ۰/۴۰ ودرحال حرکت ۰/۳۰ است(a) اندازه w راطوری پیدا کنید که جسم باسرعت ثابت روی سطح شیبدار بالارود. (b) اندازه w را طوری پیدا کنید که جسم باسرعت ثابت روی‌سطح پائین‌آید. (c) بازاء چه‌حدودی از w جسم روی‌سطح شیبدار ساکن میماند.

۲ـ۲۰ اندازه نیروی p راکه بازاویه φ بالای افق برجسمی بوزن w اثر کرده آنرا روی سطح افقی باضریب اصطکاک μ بحرکت درمیآورد بدست‌آورید.

۲ـ۲۱ صندوقی بوزن ۶۰۰lb را باید باسرعت ثابت روی سطح شیب‌داری بارتفاع ۴ft وبطول ۸ft پائین آوریم. ضریب اصطکاک لغزشی بین صندوق وسطح شیب‌دار ۰/۳۰ است. (a) آیا باید صندوق را بانیروئی‌بطرف بالای سطح بکشیم یا بطرف پائین سطح(b) اندازه‌نیروی لازم را هرگاه درامتداد سطح برصندوق‌اثرکند بدست آورید.

۲ـ۲۲ هرگاه نیروی ۸۶lb درامتدادموازی سطح شیب داری بشیب ۲۰° لازم‌باشد تاجسمی بوزن ۱۲۰lb راباسرعت ثابت روی سطح بالا برد،(a) چه‌نیروئی درهمین‌امتداد برجسم واردشودتاجسم باسرعت‌ثابت پائین آید؟ (b)ضریب اصطکاک لغزشی‌چه اندازه است.

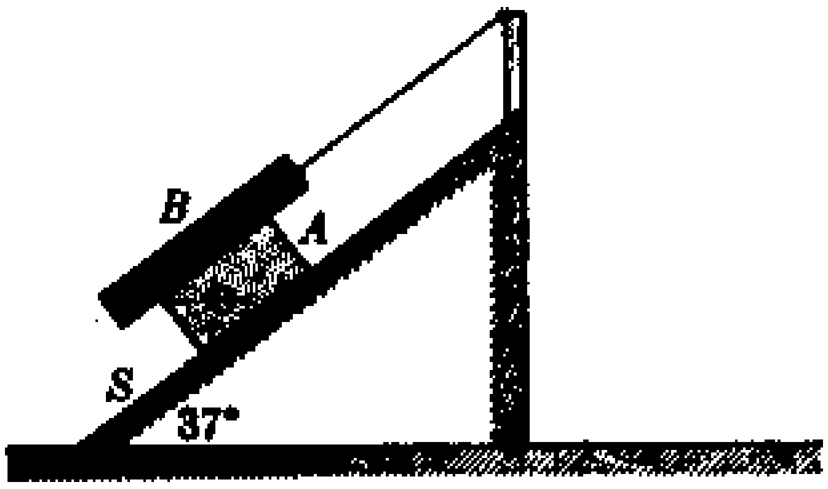
۲ـ۲۳ وزن‌جسم A درشکل ۲ـ۲۱ برابر ۴lb ووزن جسم B برابر ۸lb است. ضریب اصطکاک بین سطوح ۰/۲۵ است. چه‌نیروی P لازم است تاجسم B راباسرعت‌ثابت بطرف‌چپ بکشد هرگاه (a) مطابق قسمت (a) شکل جسم A بر B تکیه داشته‌باشد. (b) A ساکن‌است و B متحرک باشد.(قسمت b شکل)، (c)، A و B مطابق قسمت (c)شکل بوسیله طنابی‌که ازروی قرقره‌ای عبور میکند بهم وصل‌باشند.



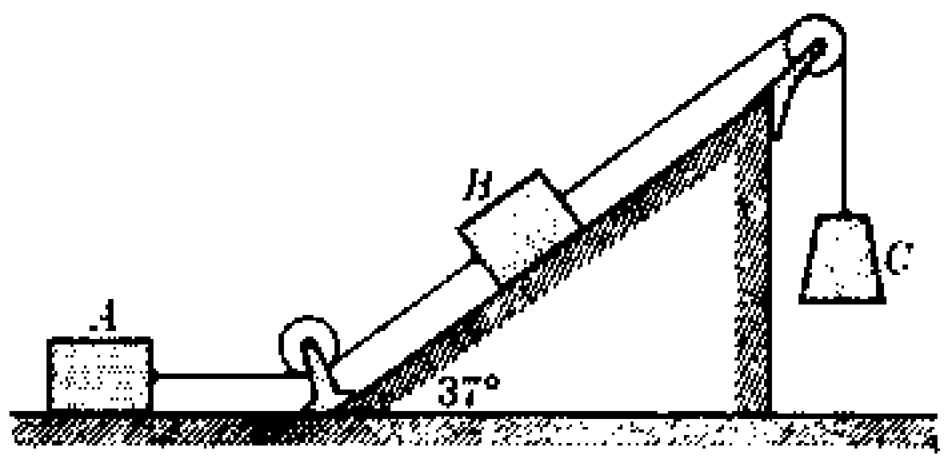
شکل ۲ـ۲۱

۲ـ۲۴ جسم A بوزن w روی سطح شیبدار S بازاویه شیب ۳۷° باسرعت ثابت پائین میآید مطابق شکل ۲ـ۲۲ جسم B بوزن w که برروی جسم A قراردارد با طنابی ببالای سطح متصل است (a) دیاگرام آزاد جسم A را رسم‌کنید. (b) اگر ضریب اصطکاک لغزشی بین B و A ونیز بین A و S یکی باشد اندازه آنرا بدست آورید.

۲ـ۲۵ مطابق شکل ۲ـ۲۳ سه جسم A و B و C بهم وصل‌اند. وزن هریک از دوجسم A و B برابر ۲۰lb وضریب اصطکاک بین هرجسم وتکیه‌گاه آن ۰/۵ است.



شکل ۲ــ۲۲



شکل ۲ــ۲۳

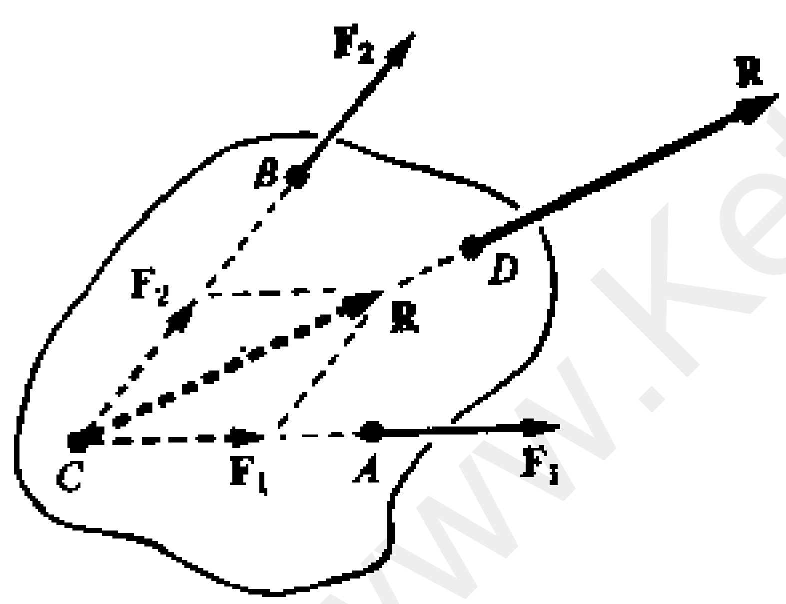
جسم C باسرعت ثابت پائین میآید (a) دیاگرام آزاد هریك ازدوجسم A و B را جداگانه رسم کنید. (b) کشش مؤثر برطنابی‌که دو جسم A و B را وصل میکند بدست آورید (c) وزن جسم C چه اندازه است.

فصل سوم

تعادل جسم صلب

۳ـ۱، گشتاور نیرو

درشکل ۳ـ۱ که ازفصل اول نقل شده است روش پیداکردن R برآیند دو نیروی F_1 و F_2 راکه بر دو نقطه دلخواه A و B از جسمی وارد آمده‌اند نشان داده‌شده‌است. درفصل اول روش پیداکردن‌اندازه وامتدادبرآیند بیان شد. اماخط اثر نیروزمانی دقیقاً مشخص است‌که فاصله آن ازنقطه دلخواه O معلوم باشد.



شکل ۳ـ۱ روش پیدا کردن R برآینـد دو نیروی F_1 و F_2 که بر دو نقطه مختلف از جسمی وارد میشوند دریك صفحه قراردارند.

درشکل ۳ـ۲ دو نیروی F_1 وF_2 واقع در یك صفحه که بر دونقطه A و B از جسمی اثر میکند نشان داده شده است. خود جسم در شکل نشانداده نشده زیرا اهمیتی ندارد. نقطه دلخواه O در صفحه شامل دو نیرو واقع و فواصل خط اثرهای F_1 و F_2 و R از این نقطه برابر l_1 و l_2 و l اختیار شده است. میخواهیم l فاصله R را از O بدست‌آوریم.

هرگاه فاصله O از C محل برخورد امتدادهای F_1 و F_2 برابر r وOC وخط عمود برآن‌محورهای مختصات‌فرض شوند خواهیم داشت:

$$R\sin\theta = F_1\sin\varphi_1 + F_2\sin\varphi_2$$

طرفین این تساوی را در r ضرب میکنیم:

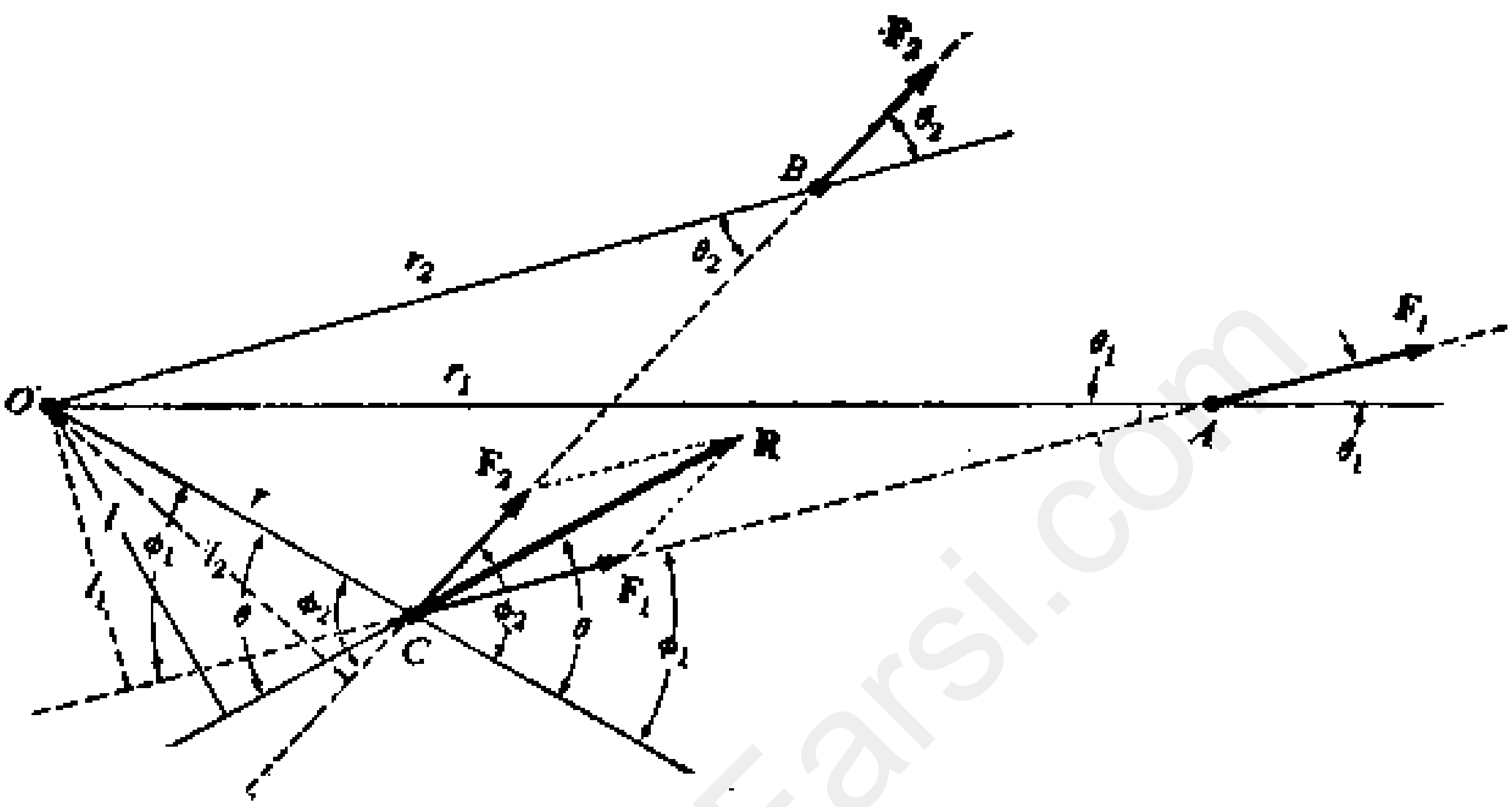
$$Rr\sin\theta = F_1 r\sin\varphi_1 + F_2 r\sin\varphi_2$$

حال ، ازشکل ۳ـ۲ پیداست که :

$$r\sin\theta = l \quad \text{و} \quad r\sin\varphi_1 = l_1 \quad \text{و} \quad r\sin\varphi_2 = l_2$$

وبنابراین خواهیم داشت :

$$lR = l_1F_1 + l_2F_2 \qquad (۳\text{ـ}۱)$$



شکل۳ـ۲ جای خط اثر R برآیند دو نیروی F_1 و F_2 با محاسبه l فاصله‌این‌خط‌اثر از یك نقطه دلخواه مانند O مشخص میشود

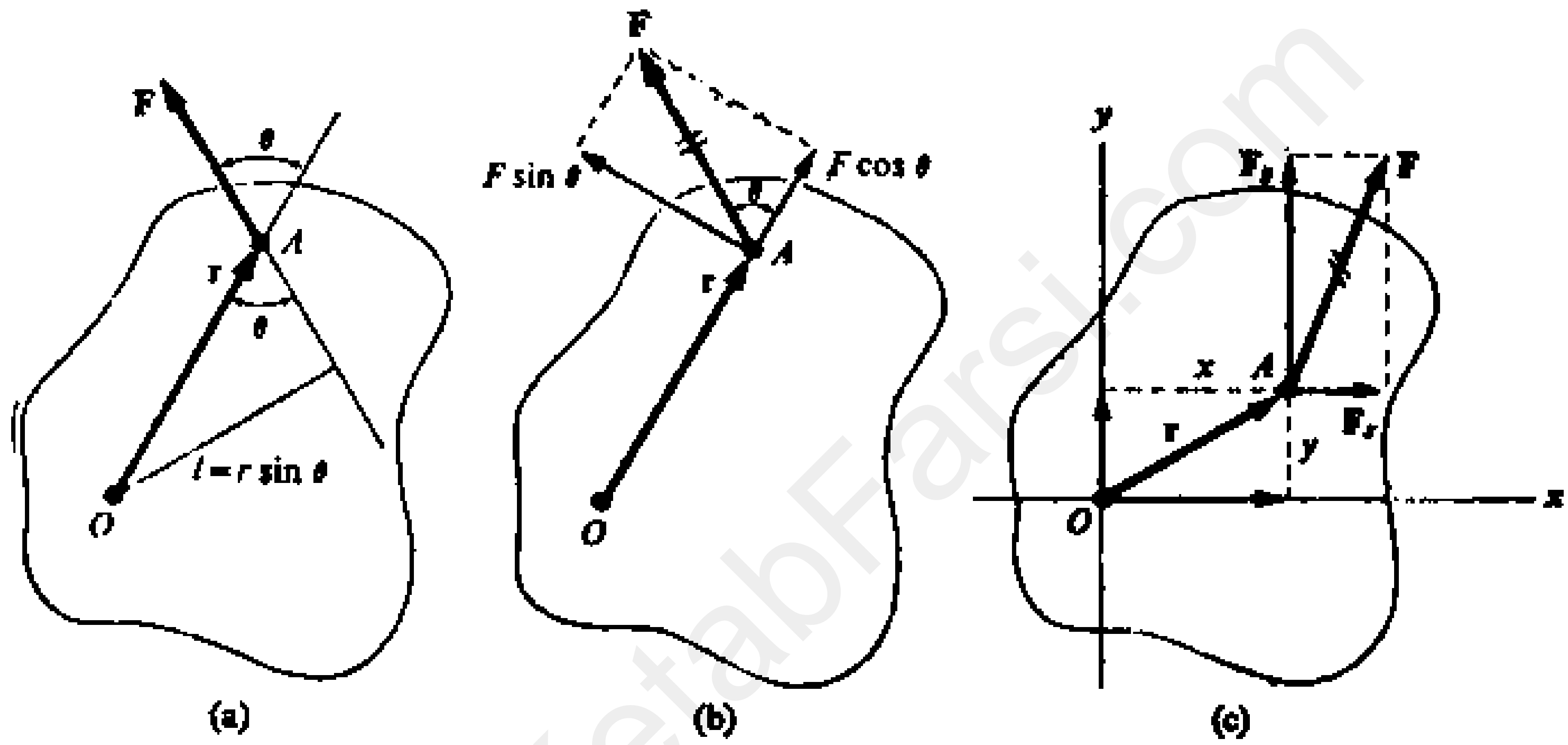
از این فرمول l فاصله خط اثر **R** از O (مبدء) برحسب $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ وفواصل آنها از O قابل محاسبه است . چنانکه می بینیم فرمول ۳ـ۱ رابطه ایست بین سه حاصلضرب $l\mathbf{R}$ و $l_1\mathbf{F}_1$ و $l_2\mathbf{F}_2$ یعنی حاصلضرب نیروها درفاصله عمودی آنها ازنقطه O فواصل l_1 و l_2 و l را **بازوی گشتاور** (یابازوی اهرم) یابازوی نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ و **R** مینامند. حاصلضرب های l_2F_2 و l_1F_1 وlR را گشتاور نیروهای $\mathbf{F}_1$،$\mathbf{F}_2$ و **R** نسبت به نقطه O مینامند. گشتاور نیرو (یا : ترك نیرو **torque** مشتق از کـلمه لاتین **torquere** بمعنی چرخیدن) نسبت بیك نقطه، بنابرآنچه گفته شد عبارتست از حاصلضرب اندازه نیرو درفاصله نقطه مذکور ازخط اثر نیرو . هرگاه گشتاوررا با Γ (گاما) نشان دهیم فرمول ۳ـ۱ بصورت زیر درمیآید :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \qquad (۳\text{ـ}۲)$$

رابطه فوق نشان میدهدکه گشتاور برآیند دونیرو نسبت بیك نقطه برابر است با جمع برداری گشتاورهای دونیرو نسبت بهمان‌نقطه کـه به قضیه وارنیـون **Varignon's theorem** موسوم است .

گشتاور یك نیرو یاترك یك نیرو نسبت بیك نقطه دارای اهمیت فیزیکی خاصی است. گشتاور معیاری برای سنجش « قابلیت چرخانیدن » یا « اثر چرخشی » نیروئی است که خط اثر آن مشخص باشد . درشکل ۳ـ۲ اثر نیروی F_1 و بازوی l_1 طوری است که درجسم دوران خلاف جهت چرخش عقربه ساعت حول محوری که در O برصفحه نیروها عمود است ایجادمیکند. هرگاه O برامتداد F_1 انتخاب شود بازوی گشتاورودرنتیجه گشتاورصفرمیشود واثر چرخشی نیرو ازبین میرود.

بنـا برقرارداد رایج در هندسه تحلیلی، دورانهـم جهت عقربه ساعت رامنفی و مختلف‌الجهت باعقربه ساعت را مثبت اختیار میکنند.



شکل ۳ـ۲ Γ گشتاور F حول محوری که از O عبور میکند میتواند بصورت $(a)\Gamma = F(r\sin\theta)$ و $(b)\ \Gamma = (F\sin\theta)r$ ونیز بصورت $(c)\Gamma = xF_y - yF_x$ بیان شود .

هرگاه خط اثر نیرو، درصفحه عمود برمحورقرار نداشته باشد نیرورا میتوان بدومؤلفه موازی محور و عمود برمحور تجزیه نمود . مؤلـفه موازی محور گشتاوری نسبت به محور ندارد بنابراین هرگاه F مؤلفه نیرو در امتدادی عمود بر محور باشد گشتاور نیرو نسبت به محور عبارتست از :

$$\Gamma = lF$$

که درآن l فاصله عمودی محور و خط اثر نیرو میباشد .

واحد گشتاور برابر حاصلضرب واحد نیرو در واحد طول میباشد پس هرگاه واحد نیرو lb وواحد طول ft باشد واحد گشتاور lb.ft است (نقطه‌نوع حاصلضرب رامشخص

میکند ودارای اهمیت خاصی‌است) بنابراین وقتی نیروی یك پوند بفاصله یك‌فوت ازمحوری برجسمی اثر کـند و امتداد نیرو و محور برهم عمود باشند گشتاور نیرو نسبت به محور lb.ft است .دین‌سانتیمر و نیوتون مترنیز واحدهای گشتاور هستند.

دیده میشود که گشتاور نیرو نسبت بیك محور کمیت سکالر است زیرا حاصلضرب دومقدار سکالر میباشد. درقسمت بعدگشتاور برداری نیروراتعریف خواهیم‌کرد.

گشتاور یك نیرو نسبت بیك نقطه را بطریق زیر نیز میتوان تعریف کرد : شکـل ۳-a۳ نیروی F را نشان میدهدکه بازوی گشتاورآن نسبت به محوری‌که از O میگـذرد برابر l است . هرگاه بردار OA یعنی برداری که مبدء آن O و انتهای آن نقطه اثر نیروی F باشد برابر r فرض شود و زاویه بین F و r برابر θ باشد بازوی گشتاور l را میتوان بآسانی از رابطه زیر بدست‌آورد :

$$l = r\sin\theta$$

یعنی l مؤلفه بردار r در امتداد عمود برخط اثر نیروی F است . گشتاور نیروی F برابر خواهد بود :

$$\Gamma = F \times (r\sin\theta) = rF\sin\theta$$

درشکل۳-۳(b) نیروی F بدو مؤلفه $F\sin\theta$ و$F\cos\theta$ تجزیه شده است که بترتیب عمود بر r و درامتداد r میباشند. مؤلفه $F\cos\theta$ گشتاوری‌نسبت به O ندارد زیرا امتداد آن از O میگذرد ولی گشتاور $F\sin\theta$ که برابر گشتاور F است عبارت خواهد بود از :

$$\Gamma = (F\sin\theta) \times r = rF\sin\theta$$

پس میتوان گفت گشتاور نیرو نسبت به محوری‌که از O میگذرد برابر حاصلضرب F درمؤلفه‌ای از r که بر F عموداست [شکل۳-۳(a)] ویاحاصلضرب مؤلفه F درامتداد عمود بر r دراندازه r [شکل۳-۳(b)].

روش سومی نیز وجود دارد کـه اساس آن درشکل ۳-۳ (c) نشانداده شده است . در این روش نیروی F و بردار r را بمؤلفه های قائم وافقی تجزیه میکنیم . محورهای مختصات کاملا اختیاری هستند . مؤلفه‌های بردار r را، x و y مینامیم. گشتاور F_yحول محوری‌که از O میگذرد برابر $+xF_y$ وگشتاور F_x نسبت‌بهمان محور $-yF_x$ خواهد بود برآیندگشت‌آورها بقرار زیر است :

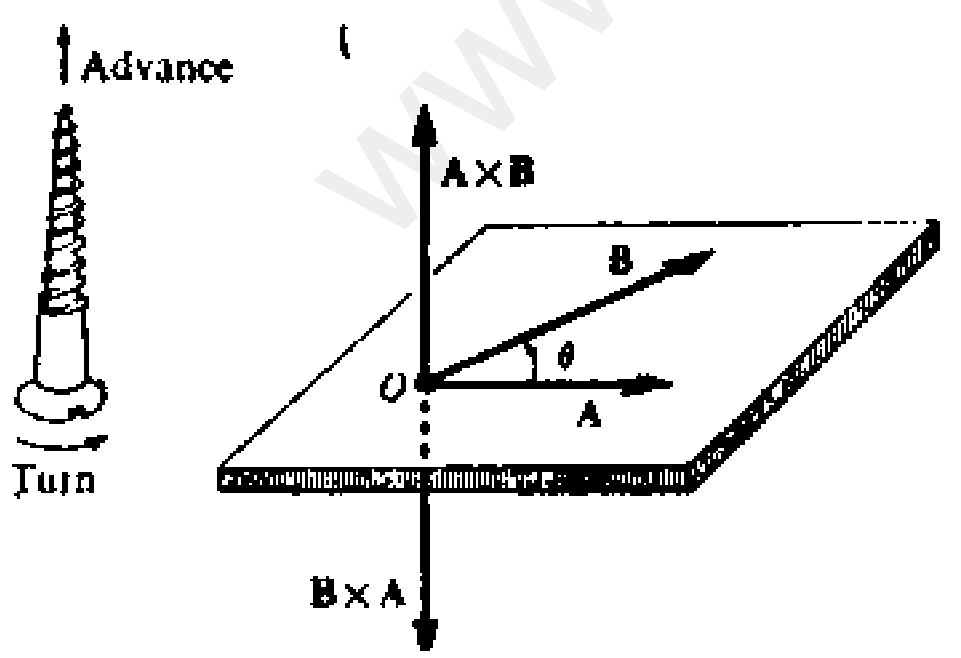
$$\Gamma = xF_x - yF_y$$

۴-۳ ، حاصلضرب برداری ـ گشتاور برداری

درباره جمع و تفریق بردارها درقسمت ۱-۴ بتفصیل بحث‌شد اینك بایددرباره نحوه عمل ضرب برداری بحث‌کنیم. درآنالیز برداری، دو نوع حاصلضرب تعریف شده است. یکی‌حاصلضرب‌سکالراست‌که درفصل هفتم مورد بحث قرار خواهد گرفت ودیگری حاصلضرب برداری یا vector product است. حاصلضرب برداری دو بردار، برداری است‌که اندازه آن برابر حاصلضرب‌اندازه‌های‌دو برداردر $\sin\alpha$است(که α زاویه بین دو برداراست) وامتدادآن برصفحه شامل دو بردار عمود است.

هرگاه **A** و **B** بطریق برداری درهم‌ضرب شوند حاصلضرب آنها بصورت **A × B** نوشته میشود (بخاطر علامت حاصلضرب این نوع حاصلضرب را Cross product مینامند) هرگاه زاویه بین دو بردار θ باشد اندازه بردار حاصلضرب برابر $AB\sin\theta$ می باشد .

جهت بردار حاصلضرب بطریق زیر بدست میآید : در شکل ۳-۴ مبدء بردارهای **A** و **B** نقطه O قراردادهشده‌است. پیچ راستی‌رادرنظر گیرید‌که محور چرخش‌آن‌برصفحه شامل **A** و **B** عمود باشد . هرگاه‌جهت چرخش **A** برای‌اینکه باکمترین‌چرخش (مانندθ) بر **B** منطبق شود با جهت چرخش پیچ یکی‌باشد ؛ جهت پیش رفتن پیچ با جهت گشتاور یکی‌است. شخصی‌که در بالای صفحه ایستاده است بصفحه نگاه میکنند می بیند که اگر **A** در خلاف جهت عقربه ساعت باندازه θ بچرخد بر **B** منطبق میشود و پیچ در اثر چنین چرخشی بالا میرود .



شکل ۳-۴ حاصلضرب برداری بردارهای A و B حاصلضرب A×B رو ببالا است در حالی‌که B×A رو بپائین است و اندازه هردو حاصلضرب $AB\sin\theta$ است ولی :

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

شکل ۳-۵ Γ گشتاور برداری نیروی F نسبت به محور AA برابراست با

$$\Gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

حاصلضرب برداری **B×A** دارای همان اندازه **A×B** است ولی جهت آن دو مخالف یکدیگر است. زیرا چنانکه ازشکل پیداست **B** باید درجهت عقربه ساعت باندازه θ بچرخد تابر **A** منطبق شود وهرگاه پیچ را دراین جهت بچرخانیم پائین میرود. پس جهت **B×A** روبپائین است. بنابراین بردارهای **B×A** و **A×B** قرینه یکدیگر میباشندوداریم:

$$\mathbf{B}\times\mathbf{A}=-\mathbf{A}\times\mathbf{B}$$

ازاینجا نتیجه میشود که‌حاصلضرب برداری تابع ترتیب عوامل ضرب است واصطلاحاً گویند کموتاتیو نیست

هرگاه دوبردارموازی باشند $\theta=0$ وحاصلضرب برداری‌صفراست. هرگاه دوبردار برهم عمود باشند اندازه حاصلضرب برداری‌برابر حاصلضرب اندازه‌های آن دوبرداراست زیرا $\sin\theta=1$ است

اینك نشان میدهیم که گشتاوریك بردار نسبت بیك محور رانیزمیتوان بایك‌حاصلضرب برداری‌ارتباط‌داد. درشکل۳ـ۵ نیروی **F** راکه درصفحه مختصات xy واقع‌است وبرنقطه B اثرمیکند نشانداده شده‌است. محور AA برصفحه شامل **F** عمود. بردار **r** که مبدأ آن O وانتهای‌آن‌نقطه اثر **F** یعنی B است‌چون‌درصفحه xy واقع‌است برمحورAA عمود است. بنابر تعریف گشتاور برداری **F** نسبت به محور عبارتست‌ازحاصلضرب برداری **r**و**F** یعنی

$$\Gamma=\mathbf{r}\times\mathbf{F} \qquad (۳-۳)$$

بردار Γ برصفحه شامل **r** و **F** عمود است (شکل۳ـ۵) واندازه آن برابراست با:

$$\Gamma=\mathrm{rF}\sin\theta$$

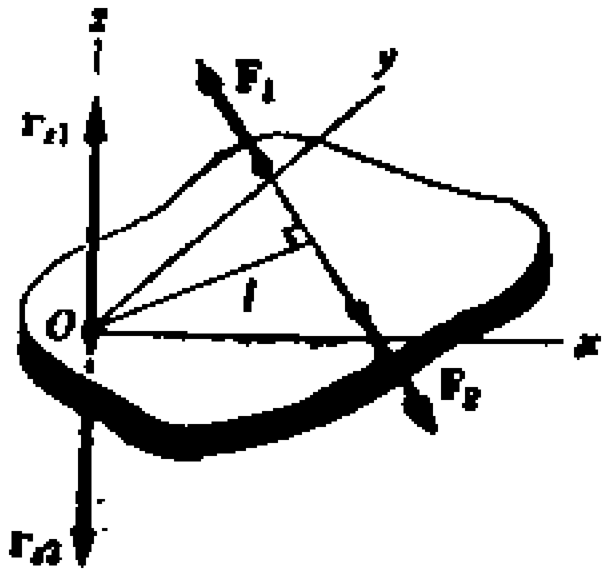
اما $\mathrm{rF}\sin\theta$ گشتاور سکالر نیروی **F** نسبت به محور AA است یعنی:

اندازه گشتاوربرداری یك نیرو نسبت بیك محور برابر گشتاور سکالر بردار مذکور نسبت به محور است.

۳ـ۳ . شرط دوم‌تعادل

درقسمت ۲ـ۲ دیدیم که هرگاه چند نیروی هم صفحه برجسمی‌اثرکنند میتوان‌مطابق شکل ۲ـ۲ همه نیروهارا بدو نیرو تقلیل داد. هرگاه جسم بحال تعادل باشد (a) این دونیروباید مساوی ومختلف‌الجهت باشند (b) بایدخط‌اثرآندو بریکدیگر منطبق باشد.

شرط مذکور در(b) راکه‌شرط دوم تعادل نامیده میشود با استفاده ازتعریف‌گشتاور بآسانی میتوان بیان نمود . درشکل ۳ـ۶جسمی نشانداده شده است که تحت اثردونیروی‌هم صفحه $\mathbf{F}_1$و$\mathbf{F}_2$ میباشد. هر گاه‌جسم بحال تعادل باشدباید $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ مساوی و مختلف‌الجهت ونیز واقع بریك امتداد باشند . هرمحور نظیر z که از نقطه دلخواهO برصفحه xy عمود شود فـاصله‌اش از $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ بیك انـدازه استزیـرا $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ بـریك امتداد



شکل ۳ـ۶ هرگاه دو نیروی F_1 و F_2 در صفحه xy بحال تعادل باشند برآیند گشتاور آنها نسبت بهرمحور قائم مانند z صفر است

واقعند و l بازوی گشتاورهردویکی‌است. اگر گشت‌آور $\mathbf{F}_1$ نسبت‌به محور z را Γ_{z_1} گشت‌آور $\mathbf{F}_2$را نسبت‌به‌همین‌محور Γ_{z_2} بنامیم‌اولی‌روبه‌بالاودومی‌رو بپائین است. بنابراین جمع گشتاور دونیروی $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ برابر صفر استچه، اندازه‌های Γ_{z_1} و Γ_{z_2} باهم مساوی وعلامت‌آنها باهم مخالف است . نتیجه میگیریم که شرط دوم تعادل میتواند بصورت زیر بیان شود : شرط دوم تعادل این است که گشتاور نیروهای وارد برجسم نسبت بهر محور دلخواه برابر صفرباشد. یعنی:

$$\boxed{\Sigma\Gamma = 0}$$

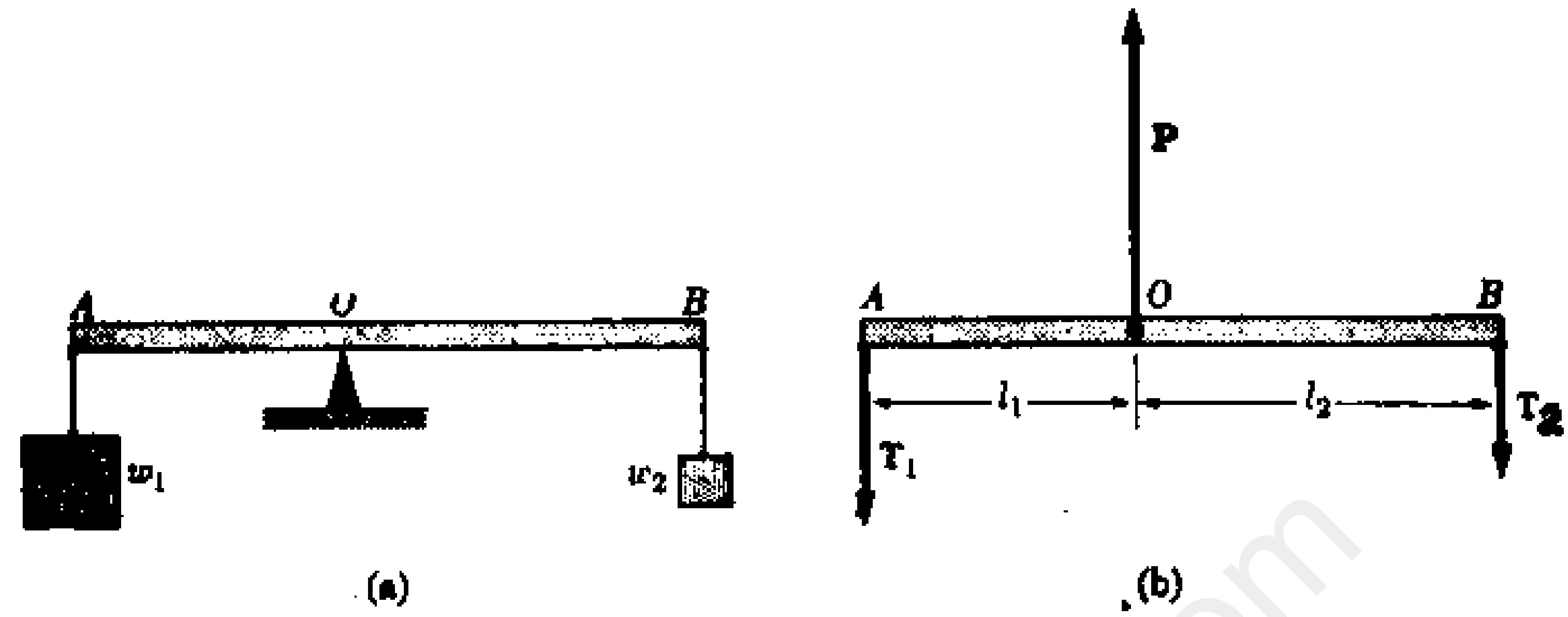
این شرط برای حصول تعادل دورانی لازم وکافی است .

لازم نیست‌که حتماً نیروهای وارد برجسم را بدونیرو تقلیل داده سپس گشتاور آنها را نسبت بمحوری دلخواه بدست‌آورد. بلکه بنابرقضیه وارنیون (فرمول ۳ـ۲) کافی است گشتاور هرنیرو را بطور مجزا حساب کرده سپس همه را باهم جمع جبری نمود . یعنی وقتی جسمی تحت‌اثر هرچند نیرو بحال تعادل باشد باید جمع گشتاور های همه نیرو ها نسبت به هرمحور دلخواه عمود برصفحه نیروها برابر صفرباشد .

بنابراین دوشرط تعادل را میتوان بادومعادله برداری‌نشانداد. (۱) برآیند $\mathbf{F}$ کلیه نیروهای وارد برجسم برابرصفرباشد. (۲)برآیندگشتاورهای واردبرجسم نسبت بهرمحور دلخواه برابرصفرباشد.

$$\boxed{\mathbf{F} = 0 \quad \Gamma = 0} \qquad (۳ـ۴)$$

شرط اول تعادل مدلل میداردکه‌جسم‌یا حرکت انتقالی ندارد یا باسرعت ثابت‌منتقل



شکل ۳-۷ میله‌ایکه تحت اثر سه نیرو بحال تعادل است

میشود و شرط دوم بیان میکندکه جسم یا حرکت دورانی ندارد ویا سرعت دوران‌آن ثابت است . تساوی برداری فرمول ۳-۴ را درفضای سه‌بعدی میتوان بصورت زیر نوشت

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma \Gamma_x = 0 \quad \Sigma \Gamma_y = 0 \quad \Sigma \Gamma_z = 0$$

هر گاه همه نیروهای وارد برجسم دریك صفحه واقع باشندگشت آور نیرو ها نسبت بهرمحور واقع درصفحه برابر صفر است مثلا هر گاه همه نیروها درصفحه xy باشندحتماً $\Sigma F_z = 0$ و $\Sigma \Gamma_x = 0$ و $\Sigma \Gamma_y = 0$ میباشد یعنی اگر جسم بحال تعادل هم نباشدسه شرط مذکور برقرار است . پس وقتی نیروها هم صفحه نباشند دوشرط تعادل با شش معادله مشخص میشود واگردریك صفحه باشند فقط سه معادله را مشخص میکنند

اصل سوم نیوتون را میتوان درباره چند جسم صلب که بهم متصل یا لولا شده‌اندبکار برد. بنابراین هر گاه در مسئله‌ای جسمی ازچند جزءکه هریك صلب هستند تشکیل شده و تحت تأثیر نیروهائی بحال تعادل درآمده باشد میتوان مسئله را حل نمود .

مثال ۱- میله صلبی که وزن آن قابل اغماض است (شکل ۳-۷) در نقطه O بر تیغه‌ای متکی‌است.وزنه w_1 بانتهای A آن آویزان است. وزن وزنه w_2را طوری‌پیداکنید که اگر بانتهای B آویزان شود میله بحال تعادل درآید .

قسمت (b) شکل دیاگرام آزاد جسم است . نیروهای T_1 و T_2 برابر w_1 و w_2 هستند محور z ها را ازنقطهO برصفحه شامل میله (صفحه کاغذ) عمود کرده .گشتاور همه نیروها رانسبت بآن می‌سنجیم. بنابشرط اول ودوم تعادل داریم

$$\Sigma F_y = P - T_۱ - T_۲ = ۰ \qquad \text{(شرط اول تعادل)}$$

$$\Sigma \Gamma_z = l_۱ T_۱ - l_۲ T_۲ = ۰ \qquad \text{(شرط دوم تعادل)}$$

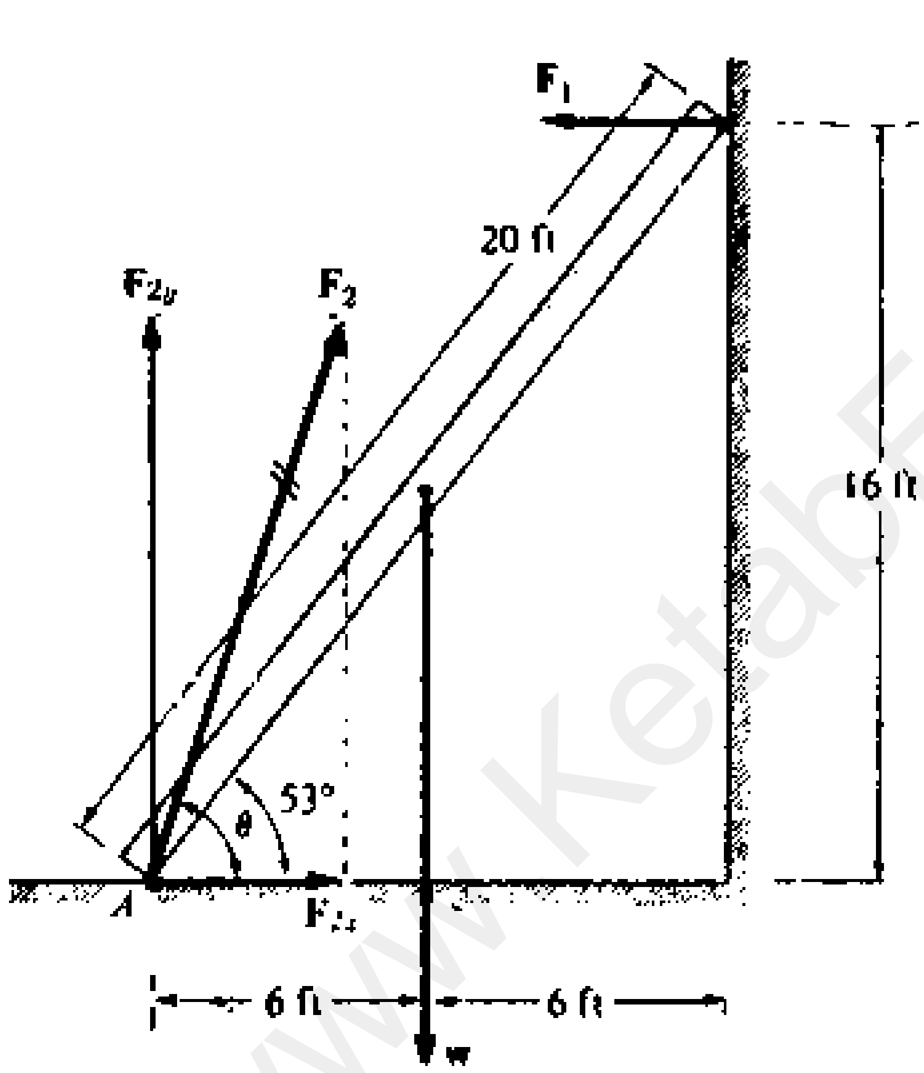
هرگاه $l_۱ = ۳ft$ و $l_۲ = ۴ft$ و $w_۱ = ۴lb$ باشد ازحل معادلات بالانتیجه میشود

$$T_۲ = w_۲ = ۳lb \quad P = ۷lb$$

برای اینکه نشان دهیم گشتاور نسبت بهرمحور دلخواه z صفر است فرض کنیم محور از نقطه A گذشته باشد .

$$\Sigma \Gamma_z = l_۱ P - (l_۱ + l_۲) T_۲ = ۳ft \times ۷lb - ۷ft \times ۳lb = ۰$$

محوری که گشتاور نیرو ها را نسبت بآن می‌سنجند لازم نیست حتماً از نقطه‌ای واقع برمیله عبور کند بعهده دانشجویان است که صحت این ادعا را بدین ترتیب ثابت کنند که گشتاور نیروهـا را نسبت بـه محوریکه از نقطه‌ای بفاصله یك فوت از انتهای چپ میله میگذرد حساب کنند .



شکل ۳-۸ نیروهای مؤثر برنردبانی که بدیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد وبحال تعادل است

مثال۲ــ شکل۳-۸ نردبانی را نشان میدهد که یکبار در قسمت ۲-۵ بطریقی حل‌شد . فرض کنیم طول نردبان ۲۰ft ووزن آن ۸۰lb ومرکز ثقل آن دروسط وبحال تعادل بردیوار بدون‌اصطکاکی متکی باشد زاویه نردبان بازمین °۵۳ است میخواهیم اندازه وجهت نیروی $F_۱$ را پیداکنیم.

چون دیوار بدون اصطکاك است امتداد $F_۱$ افقی است . نیروی $F_۲$ کاملا نامعلوم است (جز درموارد خاص امتداد آن بر نردبان منطبق نیست) بجای اینکه بگوئیم امتداد وجهت آن نامعلوم است آنرا بدو مؤلفه $F_{۲x}$ و $F_{۲y}$ تجزیه کرده اندازه مؤلفه ها را با استفاده ازشرط اول ودوم تعادل بدست میآوریم

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= F_{۲x} - F_۱ = ۰ \\ \Sigma F_y &= F_{۲y} - ۸۰lb = ۰ \end{aligned}\right\} \quad \text{(شروط اول تعادل)}$$

گشتاور نیروهارا میتوان نسبت بهر نقطه دلخواه حساب کرد ولی بهتر است همیشه آنرا نسبت به‌نقطه‌ای محاسبه کنیم‌که امتداد نیروهای بیشتری ازآن عبورمیکند دراین مثال نقطه A از همه مناسب‌تر است . بنابر این برای اینکه نردبان تعادل دورانی داشته باشد میتوان نوشت :

$$\Sigma\Gamma_z = ۱۶ft \times F_۱ - ۶ft \times ۸۰lb = ۰ \quad \text{(شرط دوم تعادل)}$$

ازفرمول‌دوم $F_{۲y} = ۸۰lb$ وازفرمول‌سوم $F_۱ = \frac{۴۸۰lb \cdot ft}{۱۶ft} = ۳۰lb$ بدست‌میآیندهمچنین میتوان مجهول‌های دیگررا بطریق زیربدست آورد.

$$F_{۲x} = ۳۰lb$$

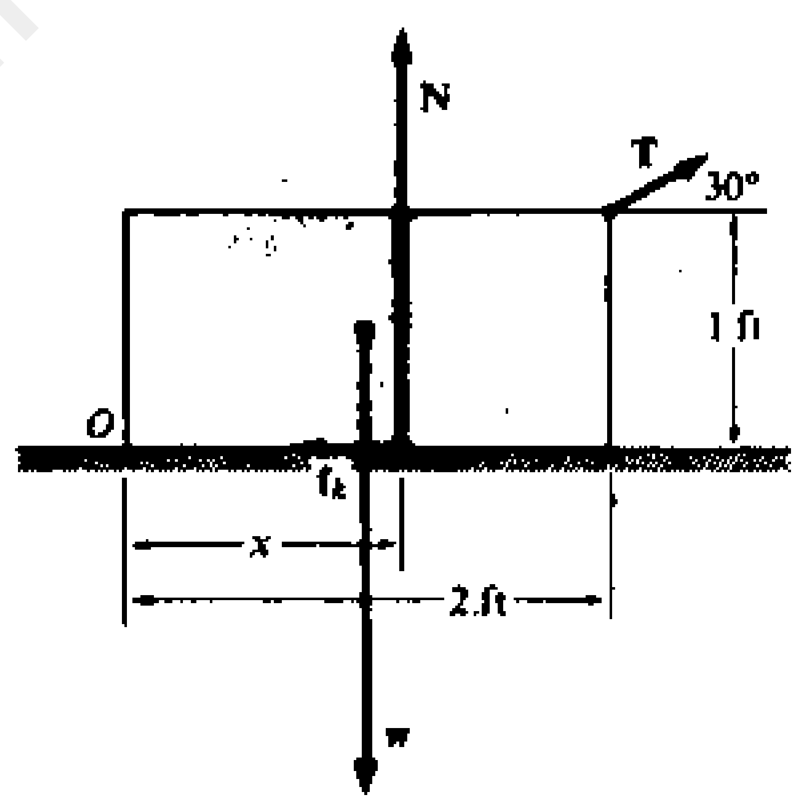
واز آنجا

$$F_۲ = \sqrt{(۸۰lb)^۲ + (۳۰lb)^۲} = ۸۵/۵lb$$

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{۸۰lb}{۳۰lb} = ۶۹/۵^\circ$$

این روش بهترازروشی است که درقسمت۲ــ۵ مورداستفاده قرارگرفت زیرا احتیاجی به‌پیداکردن محل برخورد امتدادهای w و $F_۱$ و $F_۲$ نیست .

مثال ۴ــ شکل ۳ــ۹ مربوط به مسئله ایست‌که بعنوان مثال ۳ درآخر قسمت ۲ــ۶



شکل ۳ــ۹

حل‌شده است. (a) چه نیروی T لازم است تا درامتداد ۳۰° بالای افق بر جسمی بوزن ۲۰lb اثرکند تا آنرا باسرعت ثابت روی سطح افقی‌بطرف راست بکشد درصورتیکه‌ضریب

اصطکاک لغزشی ۰/۲۰ باشد. (b) خط اثر نیروی قائم N را که از تکیه گاه برجسم اثرمیکند مشخص کنید. ارتفاع جسم یك فوت پهنای آن ۲ft و مرکز ثقل آن دروسط قراردارد.
ازشرط اول تعال نتیجه میشود:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= T\cos 30^\circ - f_k = T\cos 30^\circ - 0.2N = 0\\ \Sigma F_y &= T\sin 30^\circ + N - 20\,\text{lb} = 0\end{aligned}\right\}\ \text{(شرط اول تعادل)}$$

هرگاه x فاصله خط اثر N ازنقطه O فرض شود ازشرط دوم تعادل نتیجه‌میشود:

(شرط دوم)

$$\Sigma \Gamma_z = 2\text{ft}\times T\sin 30^\circ - 1\text{ft}\times T\cos 30^\circ + x\times N - 1\text{ft}\times 20\,\text{lb} = 0$$

ازحل دومعادله اول نتیجه‌میشود:

$$T = 4.15\,\text{lb} \qquad N = 19.7\,\text{lb}$$

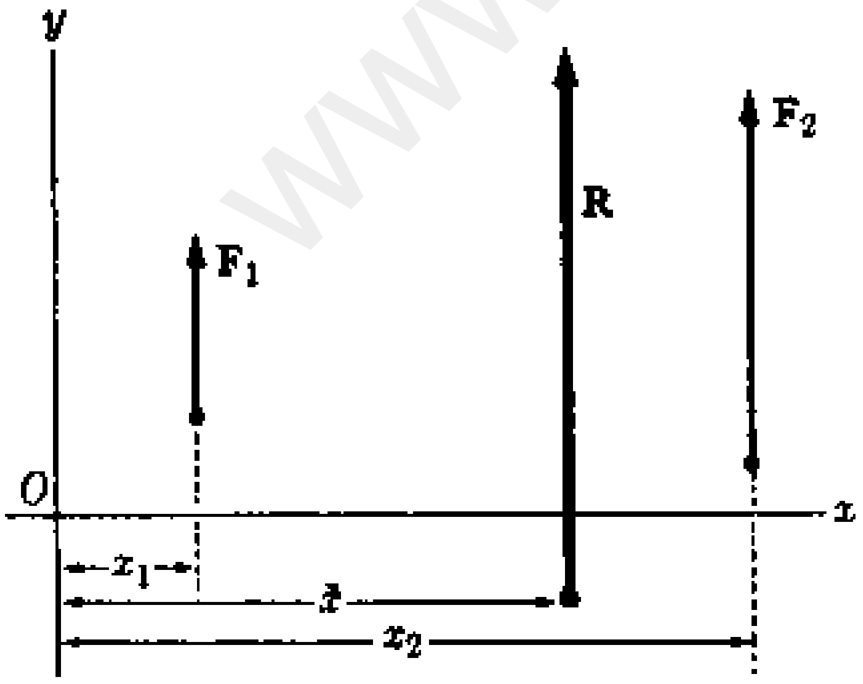
وازحل معادله سوم بدست میآید:

$$x = 1.08\,\text{ft}$$

بنابراین خط اثر نیروی N بفاصله ۰/۰۸ فوت درطرف راست مرکز ثقل قراردارد.

۳ـ۴، برآیند نیروهای موازی.

امتداد برآیند چند نیروی موازی همان امتداد نیروها واندازه آن برابر جمع جبری اندازه های نیروهاست. درقسمت ۱ـ۵ روشی برای پیداکردن خط اثر برآیند دو نیروی وازی بیان شد. اما با استفاده از گشتاور میتوان بطریقی ساده‌تر از روش ترسیمی مذکور، خط اثر برآیند را پیداکرد. گوئیم گشتاور برآیند چند نیروی موازی نسبت بیك نقطه برابراست با مجموع گشتاورهای هریك ازنیروها.



شکل ۳ـ۱۰ بردار R اندازه، وجهت وخط اثر برآیند نیروهای F_1 و F_2 را مشخص میکند

دو نیروی موازی F_1 و F_2 شکل ۳ـ۱۰ را درنظر گیرید. خطی عمود برامتداد نیروهارا بعنوان محور x ها انتخاب کرده نقطه دلخواهی مانند O را مبدأ مختصات فرض کنید. نیروها در امتداد محور x ها مؤلفه‌ای ندارند ودرامتداد محور y هاداریم

$$R = \Sigma F_y = F_1 + F_2$$

هرگاه x_1 و x_2 فواصل خطاثر نیروها از O باشد گشتاور دونیرو نسبت به‌محور z هابرابراست با:

$$\bar{x}R = \bar{x}(F_1 + F_2)$$

وچون این گشتاور بامجموع گشتاورهای هریك ازنیروها برابراست پس میتوان نوشت:

$$\bar{x}(F_1 + F_2) = x_1F_1 + x_2F_2$$

وازآنجا :

$$\bar{x} = \frac{x_1F_1 + x_2F_2}{F_1 + F_2}$$

برآیند چندنیروی موازی نیز بطریق مشابهی پیدا میشود . اندازه برآیند برابر است با:

$$R = \Sigma F$$

وهرگاه محور x هاعمود برامتداد نیروها انتخاب شود $\bar{x}$ فاصله برآیند ازO از فرمول زیر بدست میآید :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma xF}{\Sigma F} = \frac{\Sigma xF}{R}$$

مثال : میدانیم هرگاه سه‌نیروی متقاطع برجسمی اثر کرده آنرا بحال تعادل در آورد برآیند دونیرو ازاین سه‌نیرو مساوی ومختلف‌الجهت بانیروی سوم است و خطاثرآنها نیزیکی است نشان دهیدکه مطلب درمورد سه نیروی موازی که‌درشکل ۳ـ۷ (b) نشانداده شده است نیزصادق است .

درمثال ۱ که‌درآخرقسمت ۳ـ۳ ذکرشده است $l_1 = 3ft$ و $l_2 = 4ft$ و $T_1 = 4lb$ و $T_2 = 3lb$ و $P = 7lb$ بود.

اکنون برآیند T_1 و T_2 را بدست میآوریم . محور x هارا در امتداد میله و مبدأ

مختصات را A فرض میکنیم اندازه برآیند چنین بدست‌میآید:

$$R=\Sigma F=-4lb-3lb=-7lb$$

ومختصات خط اثر آن‌چنین بدست میآید:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma xF}{\Sigma F}=\frac{0\times 4lb-7ft\times 3lb}{-7lb}=3ft$$

یعنی برآیند T_1 و T_2 مساوی و مختلف‌الجهت با P بوده و خط اثر آنها یکی است .
اندازه‌برآیند P و T_2 برابراست با :

$$R=\Sigma F=7lb-3lb=4lb$$

ومختصات خط‌اثر آن چنین بدست میآید:

$$\bar{x}=\frac{\Sigma xF}{\Sigma F}=\frac{3ft\times 7lb-7ft\times 3lb}{4lb}=0$$

یعنی برآیند P و T_2 مساوی ومختلف‌الجهت با T_1 است وخط‌اثر آنها نیز برهم منطبق میباشد .

۳-۵ ، مرکز ثقل

زمین کلیه ذرات مادی را بطرف خود جذب میکند ووزن هرجسم، برآیند نیروهای وارده اززمین‌برذرات آن میباشد. امتداد همه‌نیروهارو بمرکز زمین است وچون شعاع‌زمین نسبتاً‌زیاداست.میتوان نیروهای وارده اززمین براین ذرات را موازی فرض نمود. بنابراین **وزن یك جسم برآیند عده بیشماری نیروی موازی است .**

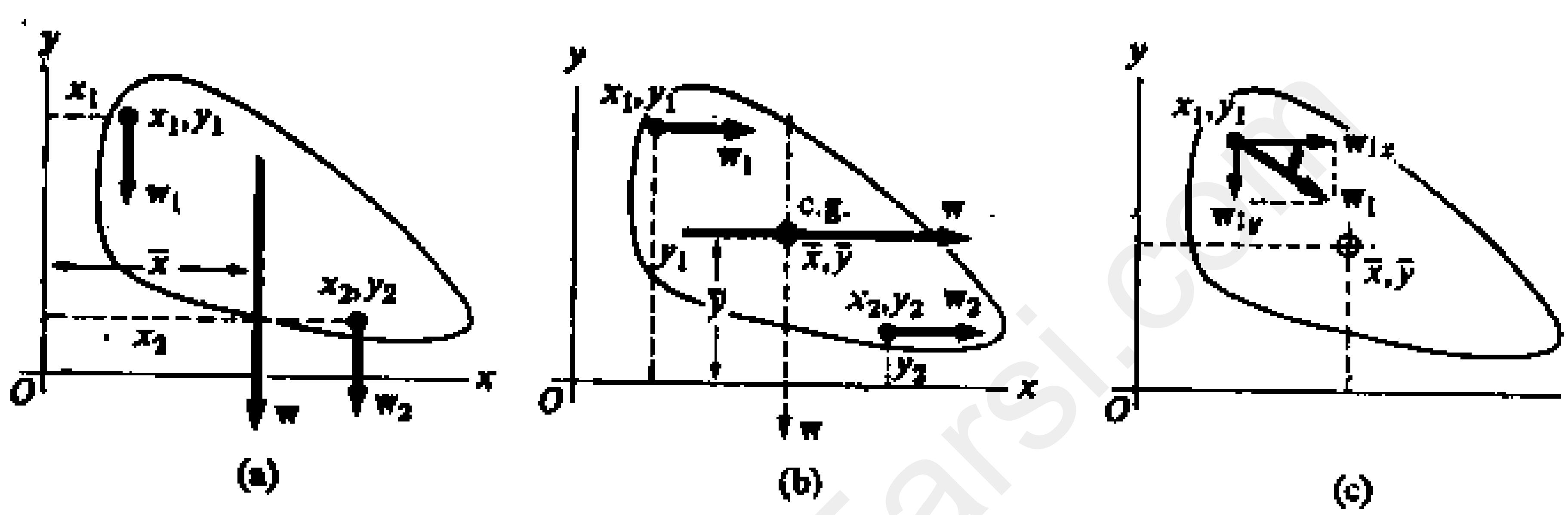
درشکل ۳-۱۱(a) جسمی نشانداده شده است که از ورقه بسیار نازکی واقع‌درصفحه xy تشکیل شده است. محور قائم‌محور y فرض میشود. فرض‌کنیم‌جسم ازذرات‌کوچك‌مادی که وزن آنها w_1 و w_2 و .... و مختصات هندسی آنها y_1 و x_1 و y_2 و x_2 و ... است‌تشکیل شده‌باشد w وزن‌کل ازرابطه زیر بدست میآید :

$$w=w_1+w_2+\cdots=\Sigma w_i \qquad (3\text{-}5)$$

(معنی Σw_i این است که i میتواند کلیه مقادیر ۱ و ۲ و ... و n را داشته‌باشد n عده‌کل ذرات‌است) $\bar{x}$ فاصله خط‌اثر w از رابطه زیر بدست میآید :

$$\bar{x}=\frac{x_1w_1+x_2w_2+\cdots}{w_1+w_2+\cdots}=\frac{\Sigma x_iw_i}{\Sigma w_i}=\frac{\Sigma x_iw_i}{w} \qquad (۶-۳)$$

حال فرض کنیم دستگاه مختصات °۹۰ درجهت عقربه بساعت ویا امتداد جاذبه °۹۰ در خلاف جهت چرخش عقربه ساعت بچرخد (نتیجه هر دویکی است) [ش ۳-۱۱ (b)] w وزن کل تغییر نمی‌کند و مختصات y آن چنین بدست‌میآید :



شکل ۳-۱۱، w وزن جسم برآیند تعداد بیشماری نیروی موازی است خط اثر w همیشه از مرکز ثقل عبورمیکند

$$\bar{y}=\frac{y_1w_1+y_2w+\cdots}{w_1+w_2+\cdots}=\frac{\Sigma y_iw_i}{\Sigma w_i}=\frac{\Sigma y_iw_i}{w} \qquad (۷-۳)$$

نقطه‌ای که خط اثر w ازآن‌میگذرد ومختصات‌آن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ است مرکز ثقل نامیده‌میشود جسم در هروضعی قرار گیرد امتداد w از مرکز ثقل میگذرد . برای اثبات این مدعا باید نشان داد که گشتاور کلیهٔ نیروهای جاذبه وارده اززمین برجسم نسبت‌بەمرکز ثقل همیشه ودرهروضع برابرصفراست .درشکل ۳-۱۱ (c) فرض براین است که اثرجاذبه‌زاویه‌دلخواه θ بامحور x هاداشته‌باشد w_1 وزن ذره‌ای به‌مختصات x_1 و y_1 بدو مؤلفهٔ روی محور xها و yها تجزیه‌شده است وداریم: $w_{1x}=w_1\cos\theta$ ونیز $w_{1y}=w_1\sin\theta$ گشتاور w_1 نسبت به محوریکه‌ازمرکز ثقل میگذرد برابر است با :

$$\Gamma_1=(\bar{x}-x_1)w_1\sin\theta-(\bar{y}-y_1)w_1\cos\theta$$

برآیند گشتاور وزن کلیه ذرات نسبت بمرکز ثقل برابرخواهد بود با :

$$\Gamma=\Sigma(\bar{x}-x_i)w_i\sin\theta-\Sigma(y_i-\bar{y})w_i\cos\theta$$

$$= \sin\theta(\Sigma\bar{x}w_i - \Sigma x_i w_i) - \cos\theta(\Sigma y_i w_i - \Sigma\bar{y}w_i)$$

ولی بنابر فرمول‌های ۳ـ۳ و ۳ـ۴ داریم:

$$\Sigma\bar{x}w_i = \Sigma x_i w_i \quad و \quad \Sigma\bar{y}w_i = \Sigma y_i w_i$$

ودرنتیجه $\Gamma = ۰$ خواهد بود.

وچون گشتاورکل وزن ذرات نسبت بمرکزثقل برابرصفر است بازاء جمیع مقادیر θ خط اثر وزن ازمرکز ثقل‌میگذرد.

توجه داشته‌باشید. هیچگاه نمیتوانیم بگوئیم نقطه‌اثر وزن مرکز ثقل است بلکه فقط میگوئیم **خط‌اثروزن همیشه ازمرکزثقل میگذرد**.

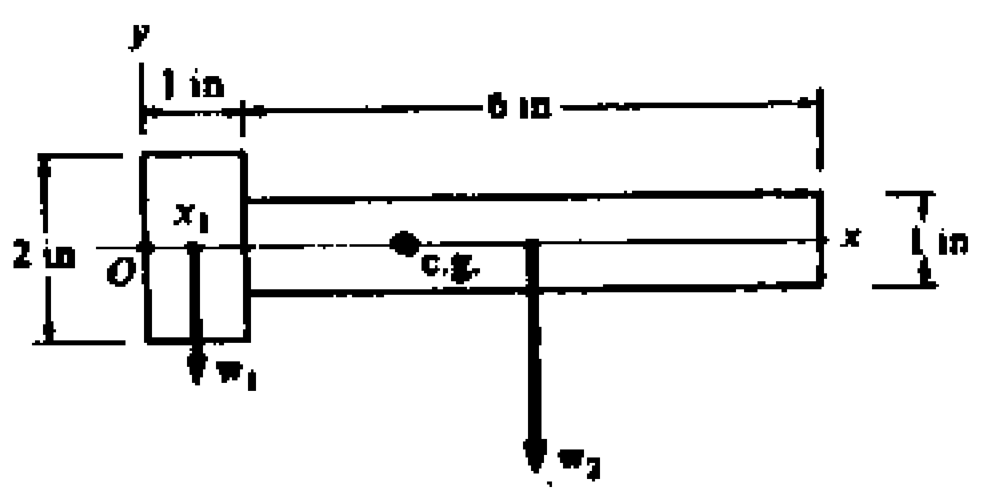
اجسام معمولی‌دارای‌سه‌بعدهستندبنابراین‌مرکزثقل‌آنها دارای‌سه مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ و $\bar{z}$ است و $\bar{z}$ چنین بدست‌میاید:

$$\bar{z} = \frac{z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots}{w_1 + w_2 + \cdots} = \frac{\Sigma z_i w_i}{\Sigma w_i} = \frac{\Sigma z_i w_i}{w} \qquad (۳-۸)$$

هرگاه جسمی شامل چند قسمت و مرکز ثقل هریك از این قسمت‌ها معلوم باشد بکمك فرمول‌های ۳ـ۳و۳ـ۴ میتوان مرکزثقل جسم را مشخص‌کرد. فرض‌کنیم w_1 و w_2 و ... وزن‌هرقسمت و y_1 و x_1 و y_2 و x_2 و ... مختصات‌مرکزثقل هرقسمت‌میباشد.

ازتقارن درپیداکردن مرکزثقل بخوبی میتوان استفاده نمود. مرکز ثقل همیشه‌بر برمحور تقارن واقع‌است. بنابراین‌مرکزثقل اجسام متقارنی مانند کره، قرص، ورقه مربع مستطیلی ومکعب درمرکز آنها واقع است. مرکز ثقل استوانه و مخروط روی محور آنها قرار دارد

مثال ۱ـ مرکز ثقل جسمی راکه درشکل ۳ـ۱۲ نشان‌داده شده است بدست‌آورید. این‌جسم‌ازمیله‌ای بطول ۶in وبقطر ۱in که‌بقرصی بقطر ۲in وبضخامت یك اینچ‌چسبیده تشکیل‌شده‌است



شکل ۳ـ۱۲

جسم از دو قسمت که هر یك بطور جداگانه تقارن دارند تشکیل شده است. مرکز ثقل‌هریك ازآنها در وسط قرار دارد. حجم قرص $\pi\ in^3$ و حجم میله

in^2 $\frac{3\pi}{2}$ است چون وزن هرقطعه متناسب باحجم آن است بنابراین:

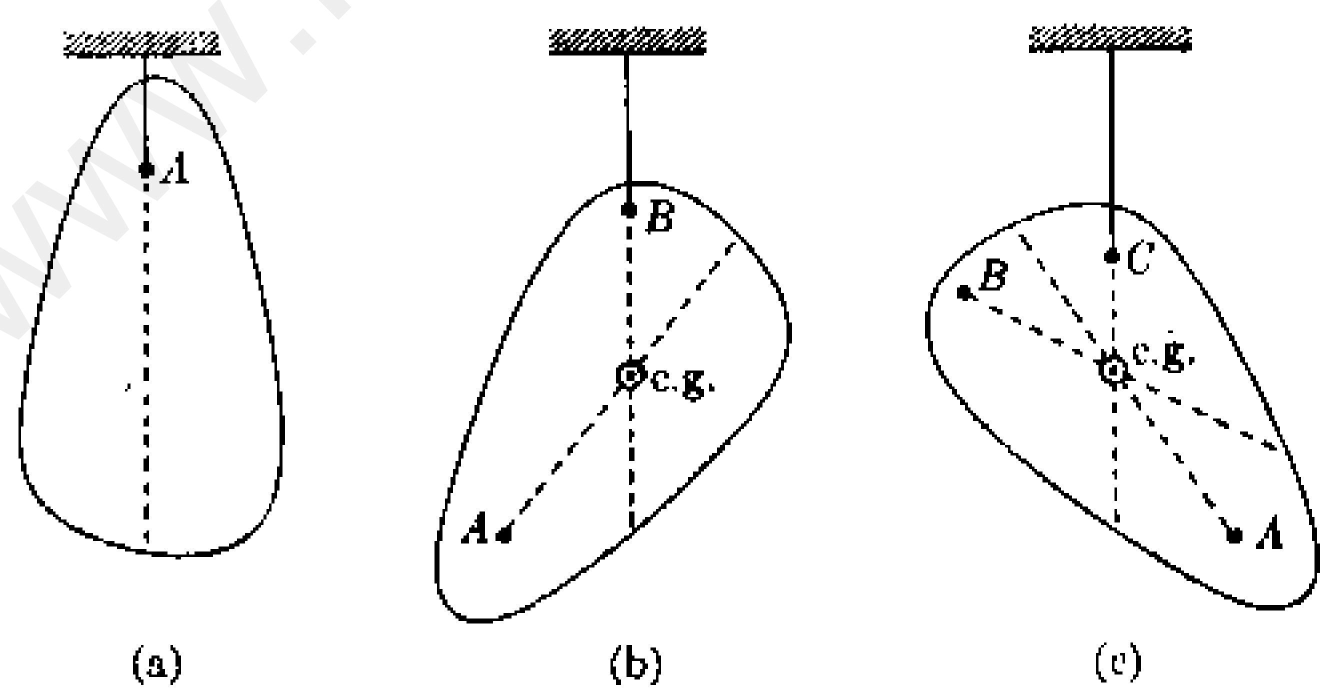
$$\frac{w_{\text{قرص}}}{w_{\text{میله}}}=\frac{w_1}{w_2}=\frac{\pi}{\frac{3\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

O وسط قرص‌را مبدأ مختصات و محورمشترك قرص ومیله را محورxها فرض‌میکنیم‌بنابراین $x_1=0/5in$ و $x_2=4in$ است پس :

$$\bar{x}=\frac{0/5in\times w_1+4in\times\frac{3}{2}w_1}{w_1+\frac{3}{2}w_1}=2/6in$$

مرکزثقل در نقطه‌ای بفاصله $2/6in$ در سمت راست O واقع است .

هرگاه‌صفحه نازکی باشکل دلخواه [۳-۱۳] دردست باشد میتوان مـرکز ثقل‌آنـرا باروش تجربی ساده‌ای مشخص نمود. درقسمت (a) جسم بنقطه‌دلخواه A آویزان است.وقتی بحال تعادل بایستد ، مرکزثقل آن برخط قائمی‌که ازنقطه تعلیق A میگذرد قرار خواهد داشت . حال جسم را بنقطه دیگری مثلا B آویزان میکنیم [قسمت (b) شکل] مرکز ثقل برخط قائمی که از B میگذرد نیز قرارخواهدداشت. لذا برمحل‌تقاطع دوخط مذکور واقع است. اگرجسم رابنقطه دیگری مثلا C آویزان‌کنیم خط قائمی‌که از C می‌گذرد از محل تقاطع‌دوخط اول عبورخواهدبود.



شکل ۳-۱۳ روش پیداکردن مرکز ثقل یك ورقه نازك باشکل دلخواه

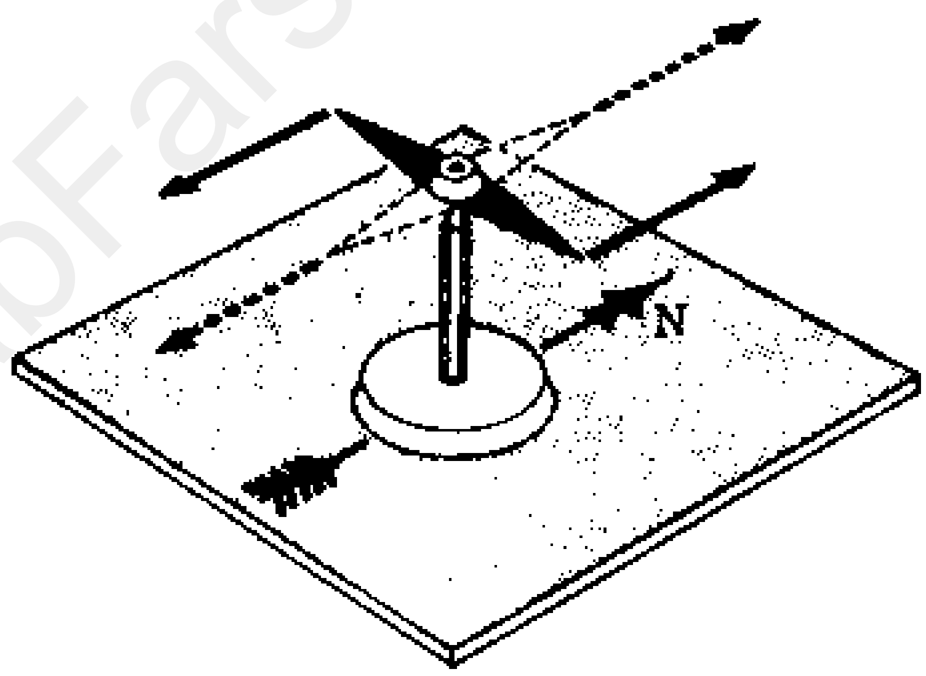
۳-۶ ، زوج‌نیرو Couples

اغلب اتفاق می‌افتد که‌کلیه نیروهای مؤثر بریك جسم معادل بـا دونیروی مساوی و

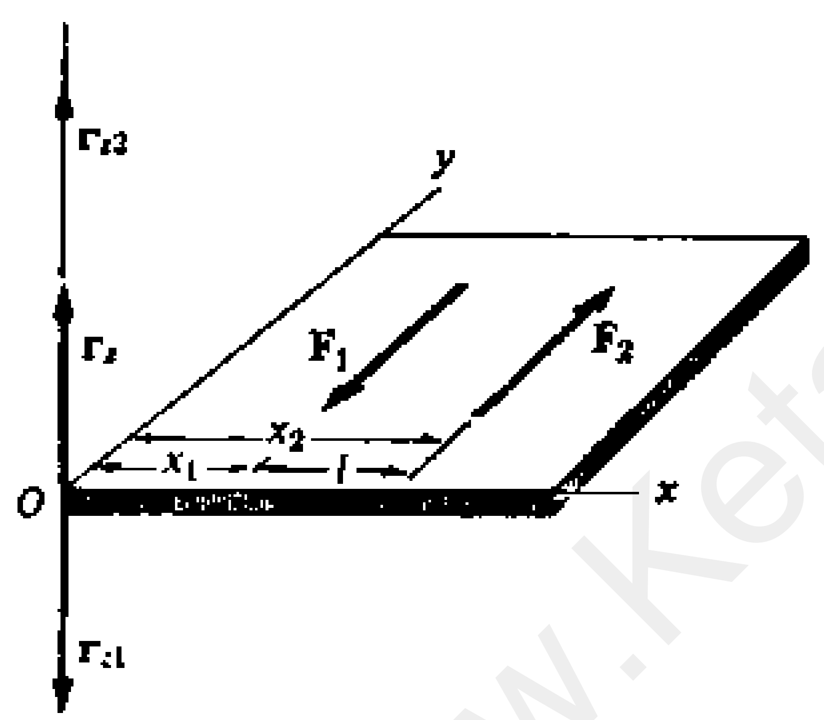
مختلف‌الجهت میشوند که خط اثر آنها موازی است ولی برهم منطبق نیستند. چنین دو نیروئی را همانطور که در قسمت ۱ـ۷ بیان شد **زوج نیرو** مینامند. بهترین مثال برای زوج نیرو دو نیروئی است که ازمیدان مغناطیسی زمین بر دوقطب عقربه مغناطیسی قطب‌نما وارد میشود برقطبین شمال وجنوب آهن‌ربا نیروهای مساوی و مختلف‌الجهتی وارد میشوند که جز در حالت خاصی که عقربه در امتداد شمال و جنوب قرار میگیرد خط اثر دو نیرو برهم منطبق نیستند. (شکل ۳ـ۱۴)

درشکل۳ـ۱۵ زوج نیروی F_1 و F_2 واقع درصفحه xy نشانداده شده است. اندازه‌هر نیرو برابر F و فاصله خط آندو از O مبدء مختصات x_1 و x_2 فرض‌شده است، فرض کنیم $l_2=x_2-x_1$. اندازه R برآیند دو بردار برابر است با :

$$R=F-F=0$$



شکل ۳ـ۱۴ نیروهای وارده ازمیدان آهن‌ربائی زمین برقطبین قطب نما تشکیل یك زوج نیرو میدهند



شکل ۳ـ۱۵

صفر بودن برآیند دو نیروی وارد برجسم دلیل براین است که این دو نیرو نمیتوانند حرکت انتقالی درجسم بوجودنمی‌آورندپس زوج نیرو، انتقال بوجود نمی‌آورد . تنهااثرزوج نیرو ایجاد دوران درجسم است .

گشتاور F_2 نسبت بنقطه مذکور برابراست با :

$$\Gamma_{z2}=x_2F$$

گشتاور F_1 نسبت بهمین نقطه برابر است با :

$$\Gamma_{z1}=x_1F$$

وبرآیند گشتآور دونیرو برابر است با :

$$\Gamma_z = \Gamma_{z2} - \Gamma_{z1} = (x_2 - x_1)F = l \cdot F$$

دیده میشود که x_1 و x_2 درفرمول ظاهر نمیشوند نتیجه میگیریم که **گشتاور زوج نسبت بهرمحور دلخواه‌که برصفحه F_1 و F_2 عمود باشدمقداریست ثابت و برابر است باحاصلضرب یکی‌ازنیروها درفاصله این دونیرو ازیکدیگر** . برخلاف نیرو، خط‌اثر گشتاور برداری‌زوج (نسبت بهرمحورعمود برصفحه نیروها) دارای‌اهمیت فیزیکی نیست. وقتی جسمی‌تحت تأثیر زوج نیروئی قرار گیرد فقط بشرطی متعادل میشود که زوج دیگری با گشتاور مساوی ولی در جهت مخالف برآن اثر کند . مثلا نردبانی‌که درشکل ۳ـ۸ نشانداده شده است تحت‌تاثیر دو زوج نیرواست یکی F_{2y} و w و دیگری F_{1x} و F_1 گشت‌آور زوج اول برابر است‌با:

$$\Gamma_1 = 6\,\mathrm{ft} \times 80\,\mathrm{lb} = 480\,\mathrm{lb \cdot ft}$$

گشتاور زوج دوم عبارت است از :

$$\Gamma_2 = 16\,\mathrm{ft} \times 30\,\mathrm{lb} = 480\,\mathrm{lb.ft}$$

گشتاور اولی هم جهت باعقربه ساعت وگشتاور دومی مخالف عقربه ساعت است .

مسائل

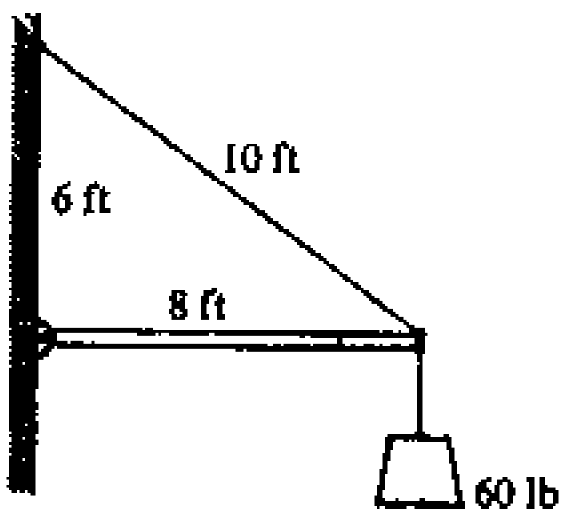
قسمت ۲ـ۶ و دستوری‌که در مقدمه مسائل فصل‌دوم بیان‌شددرحل‌این مسائل نیزمفیدند بآنهارجوع کنید. دراینجا فقط $\Sigma\Gamma = 0$ بفرمول‌های قبل اضافه شده است .

۳ـ۱ نیروی F درصفحه مختصات xy واقع ومؤلفه‌های‌آن F_x و F_y است. مختصات نقطه‌اثر نیـرو x و y وگشتاور آن نسبت به محور z عبارتست‌از $M_z = xF_y - yF_x$ ثابت کنیدکه این رابطه درجمیع حالاتی‌که مبدء نیرو در هریك ازچهار ربع قرار گیرد یا جهت نیرو درهرجهت دلخواه واقع درصفحه ممتد باشد صحیح است .

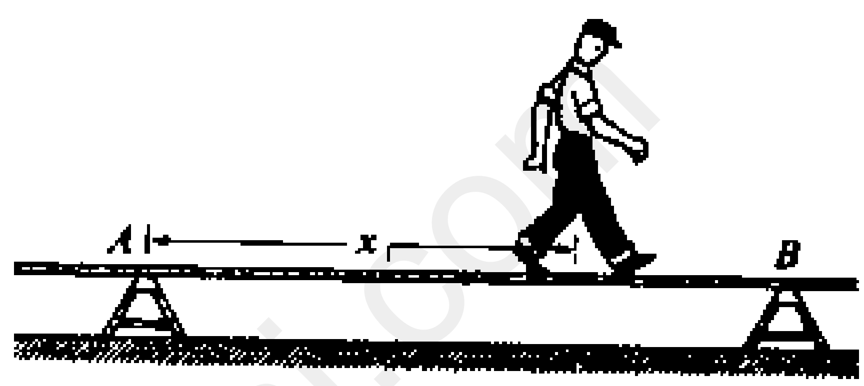
۳ـ۲ خط‌کش مدرجی دردست است‌که درطول‌آن تعدادی سوراخ وجود داردبطوریکه مرکزثقل‌آن دروسط نیست. هرگاه یك تیغه‌که خط‌کش بتواند روی‌آن قرار گیرد و جسمی که وزن w آن مشخص باشد نیزدر دست است. شکلی را رسم‌کرده نشان دهیدکه چگونه میتوان وزن خط‌کش را بدست‌آورد .

۳ـ۳ تخته متشابهی بطول 9^{m} و بوزن $40\,kg$ بر دو تکیه‌گاه A و B بفاصله $4/8^{m}$ قراردارد [شکل ۳ـ۱۶]. شخصی‌بوزن $46\,kg$ از A شروع بحرکت‌کرده بطرف

B میرود. (a) دریك دستگاه مختصات دومنحنی رسم کنیدکه تغییرات نیروهای F_A و F_B راکه ازتکیه‌گاهها برتخته وارد میشوند برحسب‌تغییرات x نشان دهد. هرسانتیمتر ازمحور قائم‌را برابر ۵۰kg و هرسانتیمتر ازمحورافقی را معادل۱/۵مترفرض‌کنید. (b) از روی منحنی تعیین‌کنیدکه شخص تاچه فاصله‌ای بطرف راست B میتواند برود بدون اینکه تخته بیفتد. (c) فاصله انتهای راست تخته ازتکیه‌گاه B چه اندازه باشد تا شخص بتواند تا انتهای تخته پیش برود.



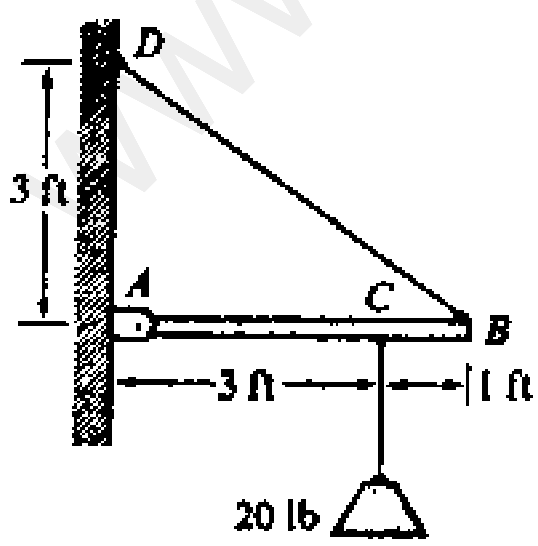
شکل ۱۷-۳



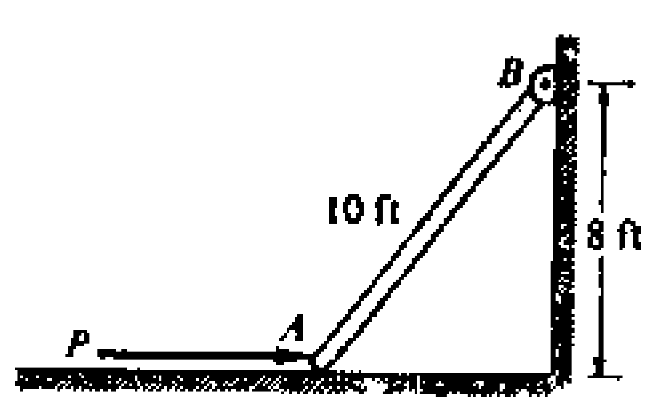
شکل ۱۶-۳

۳-۴ وزن میله‌ایکه درشکل ۳-۱۷ نشانداده شده است ۴۰lb ومرکزثقل در وسط آن است. (a) کشش را درطناب محاسبه‌کنید. (b) مؤلفه‌های قائم و افقی‌نیروئی را که از دیوار برمیله اثرمیکند بدست‌آورید.

۳-۵ کشش مؤثر برطناب BD در شکل ۳-۱۸ و مؤلفه قائم و افقی نیروئی راکه از لولای A برمیله وارد میشودبدست آورید. (a) با استفاده ازشرائط تعادل $(\Sigma F_x = 0$ و $\Sigma F_y = 0$ و $\Sigma \Gamma = 0)$ گشتاور را نسبت به‌محوریکه در A برصفحه کاغذ



شکل۳-۱۸



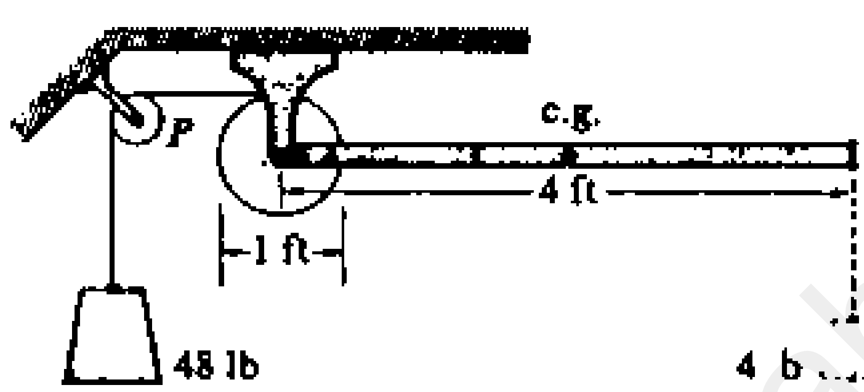
شکل ۳-۱۹

عمود شده است حساب‌کنید. (b) ازشرط دوم‌تعادل بااینطریق استفاده‌کنیدکه یکبار گشتاور نیروها را نسبت به محوریکه از A میگذرد، باردیگر نسبت به محوریکه از B میگذردو بالاخره نسبت به محوریکه از C میگذرد بدست‌آورید. (c) دیاگرام نیروها را با اشل

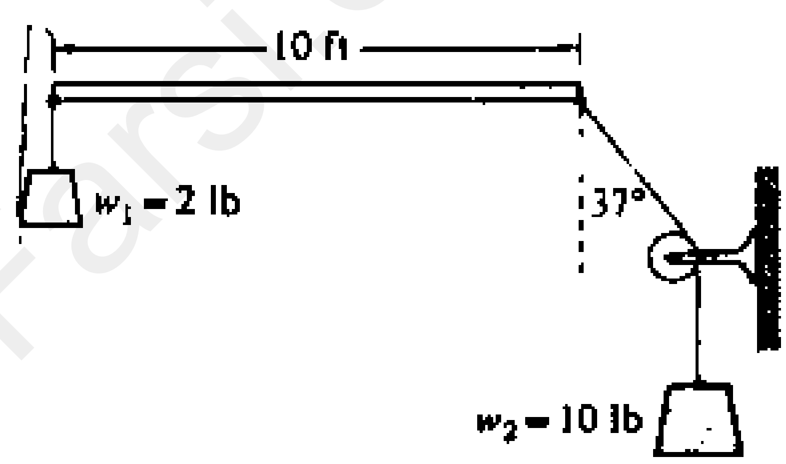
مناسب رسم کرده نشان دهید که خط اثر هر سه نیرو در یك نقطه یکدیگر را قطع میکنند . وزن میله ناچیزاست .

۳ـ۶ انتهای پائینی میله AB شکل ۳ـ۱۹ برسطح افقی بدون اصطکاکی تکیه دارد وانتهای بالائی‌آن در نقطه B لولا شده است . نیروی افقی و ۱۲ پوندی P در A برمیله اثرمیکند. وزن‌میله ناچیزاست . مؤلفه‌های افقی وقائم نیروئی‌که در B برمیله وارد میشود چه‌اندازه است .

۳ـ۷ باید یك نیرو برمیله‌ایکه درشکل ۳ـ۲۰ نشانداده شده وارد شود تاآنرابحال تعادل نگاهدارد. ازوزن‌میله‌صرفنظرشده‌است.(a) مؤلفه‌های قائم‌وافقی‌نیروی مذکور و (b) تانژانت زاویه‌ایکه این نیرو با محور افقی میسازد ، (c) اندازه نیرو و (d) نقطه اثر آنرا پیداکنید .



شکل ۳ـ۲۱



شکل ۳ـ۲۰

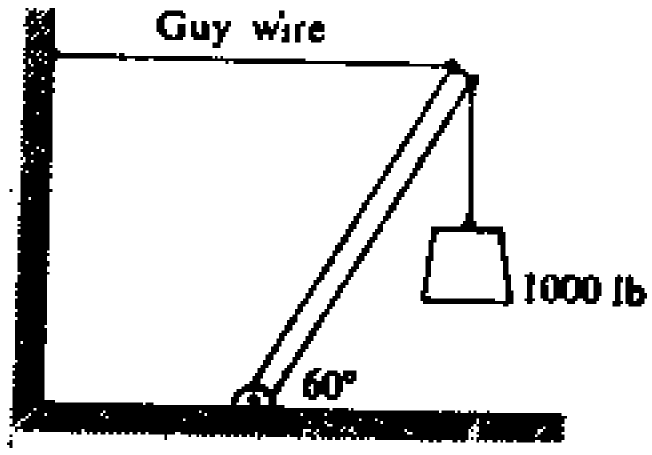
۳ـ۸ قرص دواری بقطریك فوت میتواند حول محور افقی‌که ازمرکزآن میگذرد دوران‌کند . برمحیط این قرص‌طنابی بسته شده‌که پس ازعبور ازروی قرقره بدون‌اصطکاك P، بوزنه‌48lb بسته میشود مطابق‌شکل ۳ـ۲۱ باین قرص میله متشابهی بطول4ft که یك انتهای آن برمرکزمیله منطبق است‌متصل میباشد. وقتی میله دروضع افقی‌است دستگاه بحال تعادل‌است.(a)وزن میله چه‌اندازه‌است. (b) وقتی وزنه4lb بانتهای دیگر میله‌آویزان‌باشد وضع جدید میله را پس ازحصول تعادل پیداکنید .

۳ـ۹ چرخی‌که قطر آن ۵۰cm و وزن آن ۳۶kg است روی زمین قرار دارد . چه نیروئی درامتداد افق برچرخ واردشود تا بتواند ازروی‌آجری بضخامت‌5cm بالا رود. (a) نیروبرمرکزچرخ و (b) نیرو بر بالاترین نقطه‌آن اثر کند .

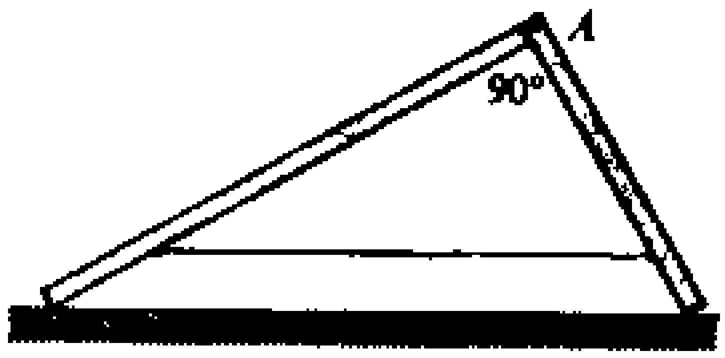
۳ـ۱۰ وزن میـله متشابهی که درشکل ۳ـ۲۲ نشانداده شده‌است ۵۰۰lb میباشد . کشش در طناب‌افقی ومؤلفه‌های قائم و افقی وارده از زمین برانتهای پائینی میله را بدست آورید .

۳ـ۱۱ دونردبان که طول آنها ۲۰ft و ۱۵ft است. مطابق‌شکل ۳ـ۲۳ درنقطه A

بهم لولا شده‌اند. مطابق‌شکل طنابی بطول ۳ft که بطورافقی قراردارد دونقطه ازدونردبان را بهم بسته است وزن دو نردبان بترتیب ۸۰lb و ۶۰lb ومرکز ثقل در وسط آنهاست.



شکل ۳ــ۲۲



شکل ۳ــ۲۳

هرگاه‌سطح زمین بدون اصطکاك باشد. (a) نیروئی‌که از زمین برهرنردبان وارد میشود. (b)کشش مؤثر برطناب و (c) نیروئی راکه یکی ازنردبانها درلولای A بر دیگری‌وارد میآورد حساب‌کنید . (d) هرگاه بـار ۲۰۰lb بنقطه Aآویزان باشدکشش مؤثر برطناب چه اندازه میشود .

۳ــ۱۲ نردبانی بطول ۲۰ft بدیوارقائم بدون اصطکاکی متکی‌است و پای نردبان از دیوار۱۲فوت فاصله دارد . وزن نردبان ۸۰lb و ضریب اصطکاك بین نردبان و زمین درحالت سکون برابر ۰/۴ است. شخصی‌بوزن ۱۶۰lb ازنردبان بالامیرود . (a) حداکثر نیروی اصطکاکی راکه زمین میتواند برنربادن واردکندحساب‌کنید. (b) وقتی شخص تا ارتفاع ۱۰ft روی نردبان بالا رفته است نیروی اصطکاك وارد اززمین برنردبان چه‌اندازه است . (c) شخص تا چه ارتفاعی روی نردبان میتواند بالا رود .

۳ــ۱۳ طنابی‌که از یکطرف بانتهای خط‌کشی بطول یك متروصل است مطابق شکل ۳ــ۲۴ ازطرف دیگربدیوار قائمی وصل‌میباشد. خط‌کش نیزمطابق شکل بدیوار تکیه دارد (بدیوار لولا نشده است) و ضریب اصطکاك بین خط‌کش ودیوار درحالت‌سکون‌برابر ۰/۳۰ است . (a) حداکثر زاویه θ چقدر باشد تاخط‌کش بحال تعادل بماند . (b) زاویه θ را برابر ۱۰° فرض‌کنید اگرجسمی‌که وزن‌آن برابر وزن خط‌کش است بفاصله x از دیوار (مطابق نقطه چین شکل) بخط‌کش‌آویزان باشد حداقل x را وقتی خط‌کش متعادل بـاشد پیداکنید. (c) وقتی زاویه θ برابر ۱۰° است ضریب‌اصطکاك چقدر باشد تا بتوان وزنه را بانتهای چپ خط‌کش آویزان نمود .

۳ــ۱۴ یکطرف‌ستونی بوزن ۱۰۰lb برسطحی بضریب اصطکاك سکون $\mu_s = ۰/۳$ تکیه دارد و انتهای بالائی‌آن مطابق شکل ۳ــ۲۵ با طنابی بزمین مهارشده است . زاویه طناب باستون ۳۷° است‌نیروی افقی F مطابق شکل برمیله‌اثرمیکند. (a) هرگاه F بروسط