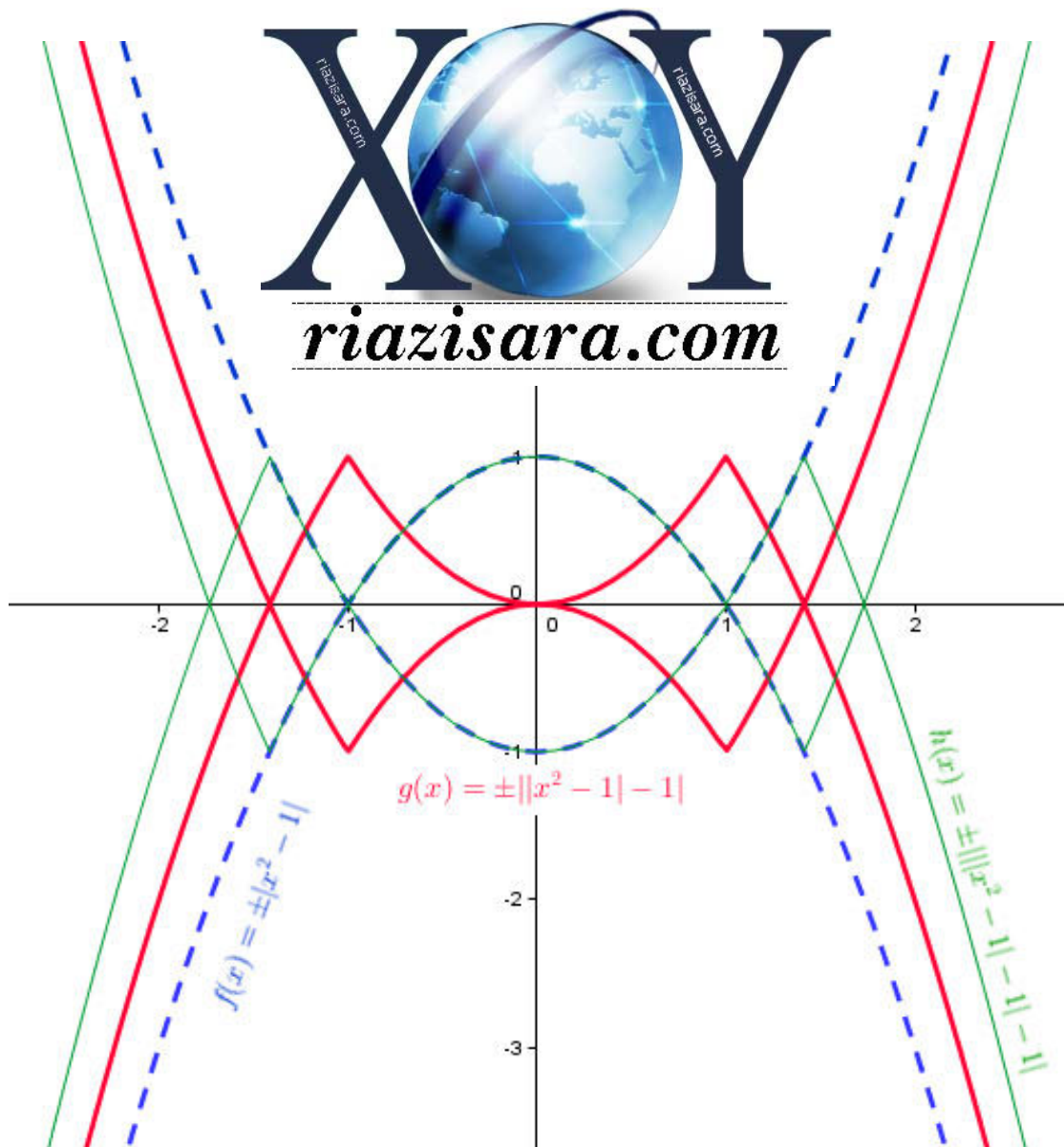


حسابان سوم ریاضی فیزیک

پانچ کامل مسائل کتاب درسی

مؤلف: محمد حسین مصلحی
دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان



Email : info@riazisara.com

phone : ۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

هرگونه انتشار بدون تغییر در صفحات مجاز است.

فهرست مطالب:

در صفحه	تعداد مسائل	در صفحه	تعداد مسائل
۴۲	صفحه ۸۴	۴	صفحه ۵
۴۷	صفحه ۹۶	۵	صفحه ۱۰
۵۱	صفحه ۱۰۳	۸	صفحه ۱۵
۵۴	صفحه ۱۲۲	۹	صفحه ۲۳
۵۷	صفحه ۱۲۹	۱۴	صفحه ۲۷
۶۰	صفحه ۱۳۵	۱۶	صفحه ۳۰
۶۲	صفحه ۱۵۰	۱۷	صفحه ۳۳
۶۷	صفحه ۱۵۹	۱۹	صفحه ۳۵
۷۰	صفحه ۱۶۵	۲۰	صفحه ۳۹
۷۳	صفحه ۱۷۶	۲۲	صفحه ۴۲
۷۷	صفحه ۱۸۱	۲۵	صفحه ۴۷
۸۰	صفحه ۱۸۸	۲۷	صفحه ۵۲
۸۲	صفحه ۱۹۱	۳۱	صفحه ۶۴
۸۴	صفحه ۱۹۶	۳۵	صفحه ۷۵

سخن آغازین

دو دبر مردمانی که در مقابل ظلم سکوت و ذلت بار اختیار نکردند.
دو دبر معلم که بزرگترین سرمایه هر جامعه در اختیار اوست.
دو دبر دانش آموز، تنها امید بر آینده ای روشن.

این کتاب الکترونیکی پیشگویی است به حضور فرزندان ایران زمین.

اما چرا حل المسائل ؟

- ۱- استفاده برفی دانش آموزان از حل المسائل واقعیتی غیر قابل انکار است.
- ۲- باید دانش آموز را آگاه کرد که استفاده از حل المسائل آفرین راه است نه اولین کار.
- ۳- نویسندگان حل المسائل ها گاهی از روشهای میانبر و تستی برای حل مسائل استفاده کرده و معلم مزبور متهم به بد درس دادن و پیچیده کردن حل مساله می گردد ..
پاسنهای موجود در این کتاب مبتنی بر روش کتاب است.
- ۴- برفی دانش آموزان به دلایلی تمام کلاسها را حضور نداشته و جوابهای صعب سوالات را در اختیار ندارند و یا دبیر فرصت حل تمام مسائل را پیدا نمی کند.
به دلایلی که برفی از آنها ذکر شد بر آن شدیم ، پاسخ مسائل کتاب درسی را در اختیار قرار دهیم.
تلاش بر این است در ویرایشهای بعدی مطالب و تمریناتی به این کتاب افزوده گردد.

مشتاقانه پذیرای نظرات و انتقادات شما هستیم.

محمد حسین مصلحی

دبیر رسمی آموزش و پرورش اصفهان

تابستان ۹۱

www.riazisara.com

info@riazisara.com

۰۹۱۳۱۰۰۶۶۵۲

آدرس سایت

آدرس پست الکترونیکی

شماره همراه جهت تماس (sms)

$$a = 5, d = 8 - 5 = 3, s_n > 500$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow \frac{n}{2}(10 + (n-1)3) > 500 \Rightarrow \frac{n}{2}(3n + 7) > 500 \quad -1$$

$$\Rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \Rightarrow \left(n > \frac{-7 + \sqrt{12049}}{6} \text{ or } n < \frac{-7 - \sqrt{12049}}{6} \right) \Rightarrow n \geq 18$$

۲- سمت چپ تساوی مجموع تعداد دواير قرمز به شکل \perp است و سمت راست تساوی مساحت مربع به طول n ، که طبق شکل این دو با هم برابرند.

۳- چون هزار میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم بنابراین

$$a = 1, q = 2, n = 64, S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \Rightarrow 1 \left(\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \right) = S_{64}$$

$$\Rightarrow S_{64} = 2^{64} - 1 > 2^{63} = (2^7)^9 > 100^9 = 10^{18}$$

$$a = 1000, q = 0.9, n = 50 \Rightarrow S_{50} = 1000 \left(\frac{1 - 0.9^{50}}{1 - 0.9} \right) \Rightarrow \quad -2$$

$$S_{50} = 10^4 (1 - 0.9^{50}) \approx 10^4 (1 - 0.1005) = 10^4 (0.9995) = 99950 \Rightarrow$$

$$1 - q^n < 1 \Rightarrow S_n < \frac{1000}{1 - 0.9} = \frac{1000}{0.1} = 10000$$

$$q = \frac{1}{2}, a_n \leq \frac{1}{100} a, a_n = aq^{n-1} = a \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \leq \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n \geq 100 > 2^6 \quad -5$$

$$\Rightarrow n > 6 \Rightarrow n \geq 7 \Rightarrow n_s = 7$$

$$p, \frac{1}{2}p, \frac{1}{4}p, \dots \Rightarrow S_n = \frac{p}{1 - \frac{1}{2}} = 2p, S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots \Rightarrow S'_n = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}S \quad -6$$

$$p(x) = x^2 + ax + b, \begin{cases} p(1) = 0 \Rightarrow 1^2 + a(1) + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \\ p(2) = 0 \Rightarrow 2^2 + a(2) + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -4 \quad \text{(الف)} \end{cases} \quad -1$$

$$\Rightarrow a = -3, b = 2, \Rightarrow p(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$\begin{cases} p(0) = 0 \Rightarrow 0^2 + a(0) + b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ p(1) = 1 \Rightarrow 1^2 + a(1) + b = 1 \Rightarrow a = 0 \end{cases} \Rightarrow p(x) = x^2 \quad \text{(ب)}$$

$$\begin{cases} p(-1) = 2 \Rightarrow (-1)^2 + a(-1) + b = 2 \Rightarrow -a + b = 1 \\ p(2) = -1 \Rightarrow (2)^2 + a(2) + b = -1 \Rightarrow 2a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow 3a = -6 \Rightarrow a = -2 \quad \text{(ج)}$$

$$\Rightarrow 2 + b = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow p(x) = x^2 - 2x - 1$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - m\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0 \quad -2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8} - \frac{m}{4} + \frac{1}{2} + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{m}{4} = -\frac{35}{8} \Rightarrow m = \frac{35}{2}$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow p(1) = 4 \Rightarrow 1^3 + a(1)^2 + 1 + b = 4 \Rightarrow a + b = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 + a(-2)^2 + (-2) + b = 0 \Rightarrow 4a + b = 1 \end{cases} \quad -3$$

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{5}{3}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = 3 \Rightarrow p(2) = 0, p(3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^2 - 3(2)^2 + m(2) + n = 0 \Rightarrow 2m + n = 8 \\ 3^2 - 3(3)^2 + m(3) + n = 0 \Rightarrow 3m + n = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -8, n = 24 \quad -4$$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 2x^2 - 5x - 6 & x - 2 \\
 \pm x^3 + 2x^2 & \hline
 \cancel{4x^2} - 5x & x^2 + 4x + 3 \\
 \pm 4x^2 + 8x & \\
 \hline
 \cancel{3x} - 6 & \\
 \pm 3x + 6 & \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

-۵

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad f(2) = 2^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x^2 + 4x + 3) = (x - 2)(x + 1)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ or } x = -1 \text{ or } x = -3$$

$$x = 2, \quad p(2) = 0 \Rightarrow 2^3 - 2(2)^2 + a(2) + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

-۶

$$\Rightarrow p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2)$$

$$\Rightarrow p(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ or } x = -1 \text{ or } x = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{الف)} \quad (1-x)^5 &= (1)^5 - 5(1)^4(x) + 10(1)^3(x)^2 - 10(1)^2(x)^3 + 5(1)(x)^4 - (x)^5 \\
 &= 1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5
 \end{aligned}$$

-۷

$$\begin{aligned}
 \text{ب)} \quad \left(1 + \frac{2}{x}\right)^6 &= (1)^6 + 6(1)^5\left(\frac{2}{x}\right) + 15(1)^4\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 20(1)^3\left(\frac{2}{x}\right)^3 + 15(1)^2\left(\frac{2}{x}\right)^4 + \\
 &\quad 6(1)\left(\frac{2}{x}\right)^5 + \left(\frac{2}{x}\right)^6 = 1 + \frac{12}{x} + \frac{60}{x^2} + \frac{160}{x^3} + \frac{240}{x^4} + \frac{192}{x^5} + \frac{64}{x^6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ج)} \quad (2x - 3y)^4 &= (2x)^4 - 4(2x)^3(3y) + 6(2x)^2(3y)^2 - 4(2x)(3y)^3 - (3y)^4 \\
 &= 16x^4 - 96x^3y + 216x^2y^2 - 216xy^3 + 81y^4
 \end{aligned}$$

۱- جملات $(2 - \sqrt{3})^n$ به شکل $(2)^{n-i} (\sqrt{3})^i$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, n$ است. $(-1)^i \binom{n}{i}$

به ازای i زوج این جملات صحیح مثبت و به ازای i فرد این جملات منفی و ضربی صحیح

از $\sqrt{3}$ است و تنها تفاوت با $(2 + \sqrt{3})^n$ ، منفی بودن ضرب $\sqrt{3}$ است پس

$$(2 - \sqrt{3})^n = 362 - b\sqrt{3}$$

$$(2 + \sqrt{3})^n (2 - \sqrt{3})^n = (362 + b\sqrt{3})(362 - b\sqrt{3}) \Rightarrow (4 - 3)^n = 362^2 - 3b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{362^2 - 1}{3} = \frac{361 \times 363}{3} = 361 \times 121 \Rightarrow b = 19 \times 11 = 209$$

$$A = x^9 - x^3 y^3 = x^3 (x^6 - y^3) = x^3 (x^2 - y)(x^4 + x^2 y + y^2)$$

$$B = (a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2 = (a^6 + 1 - a^6 + 1)(a^6 + 1 + a^6 - 1) = 2a^6 (2) = 4a^6 \quad -9$$

۱۰- استقرا بر روی توان دو جمله ای ،

$$k = 1 \Rightarrow 1 - x^2 = (1 + x)(1 - x) \quad \checkmark$$

$$\text{فرض } P(k) : 1 - x^{2k} = (1 + x)(1 - x + \dots - x^{2k-1})$$

$$\text{مکمل } P(k+1) : 1 - x^{2k+2} = (1 + x)(1 - x + \dots - x^{2k+1})$$

$$(1 + x)(1 - x + \dots - x^{2k-1} + x^{2k} - x^{2k+1}) =$$

$$\text{(اثبات)} \quad (1 + x)(1 - x + \dots - x^{2k-1}) + (1 + x)(x^{2k} - x^{2k+1}) =$$

$$(1 - x^{2k}) + (x^{2k} - x^{2k+1} + x^{2k+1} - x^{2k+2}) = 1 - x^{2k+2}$$

$$\begin{cases} 18 = 2 \times 3^2 \\ 24 = 2^3 \times 3 \\ 32 = 2^5 \end{cases} \quad 288 = 2^5 \times 3^2$$

۱- ک م م سه عدد ۱۸ و ۲۴ و ۳۲ برابر است

$$\begin{cases} 1, 5, 9, \dots \Rightarrow a_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3 \\ 4, 7, 10, \dots \Rightarrow a_m = 4 + (m-1)3 = 3m + 1 \end{cases} \Rightarrow 3m + 1 = 4n - 3 \quad -2$$

$$\Rightarrow 3m = 4n - 4 = 4(n-1) \Rightarrow \begin{cases} m = 4k \\ n-1 = 3k \Rightarrow n = 3k + 1 \end{cases} \Rightarrow a_n = a_m = 12k + 1$$

$$, \quad 100 < 12k + 1 < 999 \Rightarrow 99 < 12k < 998 \Rightarrow \frac{99}{12} < k < \frac{998}{12}$$

$$8 \frac{1}{25} < k < 83 \frac{1}{12} \Rightarrow 9 \leq k \leq 83 \Rightarrow \text{Tedad} = 83 - 9 + 1 = 75$$

۷۵ جمله وجود دارد.

$$\begin{cases} 72 = 2^3 \times 3^2 \\ 40 = 2^3 \times 5 \\ 48 = 2^4 \times 3 \end{cases} \quad \frac{(48 + 40 + 72)}{8} = 20$$

۳- ب م م سه عدد ۷۲، ۴۰، ۴۸ برابر است با ۸ که حداکثر
مجموع شیشه است و
پس تعداد ۲۰ بطری ۸ لیتری لازم است.

$$\text{الف) } \frac{(x-1)(x-4)}{x(x-4)} \times \frac{x^2(x+2)}{(x+2)(x-1)} = x \quad -4$$

$$\text{ب) } \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{(x-3)(x-7)}{(x-7)(x+1)} = \frac{x-3}{x+3}$$

$$\text{ج) } \frac{1}{(a-1)(a+1)} + \frac{2a}{(a+1)^2} - \frac{2}{a+1} = \frac{1(a+1) + 2a(a-1) - 2(a-1)(a+1)}{(a-1)(a+1)^2}$$

$$= \frac{a+1 + 2a^2 - 2a - 2a^2 + 2}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{-a+3}{(a-1)(a+1)^2}$$

$$\text{د) } \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{(x+3)(x-1)} = \frac{(x+1)(x+3) + 1(x-1) - 8(1)}{(x+3)(x-1)} =$$

$$\frac{x^2 + 4x + 3 + x - 1 - 8}{(x+3)(x-1)} = \frac{x^2 + 5x - 6}{(x+3)(x-1)} = \frac{(x+6)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+6}{x+3}$$

$$\alpha = \beta + 2, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{m}{2} \quad -1$$

$$\Rightarrow \beta + 2 + \beta = 4 \Rightarrow 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1, \quad \alpha = 1 + 2 = 3 \Rightarrow 3 \times 1 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6$$

$$\text{الف) } f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \pm 2 \quad -2$$

$$\text{ب) } q(x) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \\ x + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

که در هر دو معادله جواب وجود ندارد. (چون $\Delta < 0$)

$$\text{الف) } x(2x^2 + x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } 2x^2 + x + 3 = 0 \quad -3$$

معادله دوم جواب ندارد چون $\Delta = -23 < 0$ پس تنها جواب $x = 0$ است.

$$\text{ب) } 9x^2 - 33 + 148 - 4x^2 = 240 \Rightarrow 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{الف) } \alpha + \beta = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1 \\ \alpha\beta = \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{25} \end{array} \right. \Rightarrow x^2 - 1x + \frac{4}{25} = 0 \Rightarrow 25x^2 - 25x + 4 = 0 \quad -4$$

$$\text{ب) } \begin{cases} \alpha + \beta = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2 \\ \alpha\beta = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$f(x) = 9x^2 + 6x + 3, \quad a = 9 > 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} \quad -5$$

$$\Rightarrow y_{\min} = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$f(x) = 4 + 8x - x^2, \quad a = -1 < 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$\Rightarrow y_{\max} = 4 + 8(4) - 4^2 = 20$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{4}{5}} = -1 \\ \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4} \end{cases} \quad -6$$

$$\Rightarrow x^2 + x - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 100 = 149 > 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4} > 0, \quad P = \frac{c}{a} = -\frac{4}{5} < 0$$

معادله دارای دو ریشه مختلف علامه است که عدد مثبت از نظر قدر مطلق از دیگری بزرگتر است.

$$\begin{aligned} (x+21) &= (x-21)^2 \Rightarrow x^2 - 42x + 441 = x + 21 \quad -7 \\ \Rightarrow x^2 - 43x + 420 &= 0 \Rightarrow x = 15 \quad \text{یا} \quad x = 28 \leftarrow \text{سن معلم} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x}{4} + 1\right) = 20 \Rightarrow (x+3)(x+4) = 240 \Rightarrow x+3 = 15 \Rightarrow x = 12 \quad -9$$

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ xy - 40 = 39y + 22 \end{cases} \Rightarrow (y+1)y - 40 = 39y + 22 \Rightarrow y^2 + 1 \cdot y - 40 = 39y + 22 \quad -۱۰$$

$$\Rightarrow y^2 - 29y - 62 = 0 \Rightarrow (y-31)(y+2) = 0 \Rightarrow y = 31 \text{ یا } y = -2$$

$$\Rightarrow x = 31 + 1 = 32 \text{ یا } x = -2 + 1 = -1$$

$$\text{الف) } (x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \\ \text{یا} \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \quad - ۱۱$$

$$\text{ب) } \left(\frac{x^2}{3} - 2 - 6\right)\left(\frac{x^2}{3} - 2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x^2 = 24 \text{ یا } x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6} \\ \text{یا} \\ x = \pm \sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

$$\text{ج) } (4 - x^2 - 5)(4 - x^2 + 3) = 0 \Rightarrow (-x^2 - 1)(7 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \quad \times \\ \text{یا} \\ x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

$$f(x) = x + \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 2}{x} = \frac{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + 2\sqrt{2}x}{x} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{x} + 2\sqrt{2} \quad -۱۲$$

به ازای مقادیر مثبت x کمترین مقدار $\frac{(x - \sqrt{2})^2}{x}$ برابر صفر است که از $x = \sqrt{2}$ حاصل می شود ،

در این صورت : $y_{\min} = 2\sqrt{2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(-2) = -2 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = -2 \Rightarrow 4a - 2b + c = -2 \\ P(\cdot) = \cdot \Rightarrow a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c = \cdot \Rightarrow c = \cdot \\ P(4) = \cdot \Rightarrow a(4)^2 + b(4) + c = \cdot \Rightarrow 4a + b = \cdot \end{array} \right. \quad -۱۳$$

x	\cdot	4
$P(x)$	$-$	$+$
	\cdot	$-$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -1 \\ 4a + b = \cdot \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}, b = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

$$\text{ب) } \left\{ \begin{array}{l} P(\cdot) = 3 \Rightarrow a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c = 3 \Rightarrow c = 3 \\ x_{\min} = -\frac{b}{2a} = -4 \Rightarrow b = 8a \\ P(-4) = -2 \Rightarrow a(-4)^2 + b(-4) + 3 = -2 \Rightarrow 16a - 4b = -5 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 8a \\ 16a - 4b = -5 \end{cases} \Rightarrow 16a - 32a = -5 \Rightarrow a = \frac{5}{16}, b = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{5}{16}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 40x + 48 = 0 \Rightarrow x = \frac{-20 \pm 4\sqrt{10}}{5}$$

اگر $\frac{-20 - 4\sqrt{10}}{5} < x < \frac{-20 + 4\sqrt{10}}{5}$ مقدار $P(x)$ منفی و در خارج این بازه مثبت است

و در $x = \frac{-20 \pm 4\sqrt{10}}{5}$ برابر صفر است.

$$\text{ج) } \left\{ \begin{array}{l} P(\cdot) = \cdot \Rightarrow a(\cdot)^2 + b(\cdot) + c = \cdot \Rightarrow c = \cdot \\ x = -\frac{b}{2a} = \cdot \Rightarrow b = \cdot \\ P(1) = 1 \Rightarrow a(1)^2 + b(1) + c = 1 \Rightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = 1 \end{array} \right.$$

پس $P(x) = x^2$ که در $x = 0$ برابر صفر و در $x \neq 0$ مثبت است.

۱۴ - طول x و عرض y

$$\begin{cases} 2(x+y)=18 \Rightarrow x+y=9 \Rightarrow y=9-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=14 \Rightarrow x(9-x)=14 \Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=9-2=7 \\ x=7 \Rightarrow y=9-7=2 \end{cases}$$

$$۱- \text{ک.م.م.} p(p+1) =$$

$$\frac{6}{p} = 2 + \frac{p}{p+1} \Rightarrow 6(p+1) = 2p(p+1) + p(p) \Rightarrow 3p^2 - 4p - 6 = 0$$

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{4+18}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{22}}{3} \quad \text{چون فقط } p = -1, p = 0 \text{ مفرج را صفر می کنند پس ق ق}$$

$$۲- \text{ک.م.م.} k(2-k) =$$

$$k(k) + 2(2-k) = 5k(2-k) \Rightarrow k^2 + 4 - 2k = 10k - 5k^2 \Rightarrow$$

$$6k^2 - 12k + 4 = 0 \Rightarrow 3k^2 - 6k + 2 = 0 \Rightarrow k = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

چون فقط $k = 2, k = 0$ مفرج $k = 0$ را صفر میکنند دو جواب قابل قبولند.

$$۳- \text{ک.م.م.} (3k-1)^2 =$$

$$2(3k-1)^2 + 5(3k-1) = -2 \Rightarrow 18k^2 - 12k + 2 + 15k - 5 = -2 \Rightarrow$$

$$18k^2 + 3k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{36} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{6} \\ k = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

چون فقط $k = \frac{1}{3}$ مفرج کسر را صفر می کند ، دو جواب قابل قبولند.

$$۴- \text{ک.م.م.} y^2 + 5y = y(y+5) =$$

$$3y + 5 + y(y+4) = (y+1)(y+5) \Rightarrow 3y + 5 + y^2 + 4y = y^2 + 6y + 5 \Rightarrow y = 0$$

چون $y = 0, y = -5$ مفرج کسر را صفر می کنند پس جواب به دست آمده قابل قبول نیست

و معادله جواب ندارد.

$$5 - \text{ک.م.م} = m(m+2)(m-2) = m(m^2-4) = m^3 - 4m$$

$$3m(m-2) + 2(m^2-4) = (4m-4)m \Rightarrow 3m^2 - 6m + 2m^2 - 8 = 4m^2 - 4m$$

$$m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+2) = 0 \Rightarrow m = 4 \quad \text{or} \quad m = -2$$

چون $m = \pm 2$ ، $m = 0$ مفرج را صفر می کنند تنها جواب $m = 4$ قابل قبول است.

$$6 - \text{ک.م.م} = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$$

$$2(x+3) - 3(x-3) = 12(1) \Rightarrow -x + 15 = 12 \Rightarrow x = 3$$

چون $x = \pm 3$ جوابهای مفرجند بنابراین تنها جواب به دست آمده قابل قبول نیست.

۷ - چون $x = -3$ جواب مفرج است بنابراین مجموعه جواب برابر $R - \{-3\}$ است.

۸ - n تعداد اسباب بازی و x قیمت قبل از تفهیف

$$\begin{cases} nx = 12000 \\ (n+4)(x-100) = 12000 \end{cases} \Rightarrow nx + 4x - 100n - 400 = 12000 \Rightarrow$$

$$12000 + 4x - 100n - 400 = 12000 \Rightarrow 4x - 100n = 400 \Rightarrow x = 25n + 100, \quad nx = 12000$$

$$\Rightarrow n(25n + 100) = 12000 \Rightarrow n(n+4) = 480 \Rightarrow n^2 + 4n - 480 = 0 \Rightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{484}}{1}$$

$$\Rightarrow n = -2 \pm 22 \Rightarrow n = 20 \quad \text{or} \quad n = -24$$

چون n تعداد اسباب بازی است پس $n = -24$ قابل قبول نیست پس $x = \frac{12000}{20} = 600$.

$$\sqrt{1-x^2} = x \Rightarrow 1-x^2 = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{الف - ۱}$$

چون $x > 0$ بنابراین $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ قابل قبول است.

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x \Rightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x}) \Rightarrow \begin{cases} 1-\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x=1 \\ \text{or} \\ (1+\sqrt{x})^2 = 1 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{1}}{1+\sqrt{1}} = 0 = 1-1 \\ x=0 \Rightarrow \frac{1-\sqrt{0}}{1+\sqrt{0}} = 1 = 1-0 \end{array} \right.$$

(ب)

$$(2 + \sqrt{1+x})^2 = (\sqrt{x})^2 \Rightarrow 5 + x + 4\sqrt{1+x} = x \Rightarrow \sqrt{1+x} = -\frac{5}{4}$$

ج) راه حل اول: جواب ندارد

راه حل دوم: چون باید $x > 0$ باید باشد پس $\sqrt{1+x} > \sqrt{x}$ بنابراین $2 + \sqrt{1+x} > \sqrt{x}$

پس معادله دارای جواب نیست.

$$2 - \text{عبارت صفر نمی شود} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 > 0, \sqrt{1-x} \geq 0, \sqrt{2-x} \geq 0, 3 > 0$$

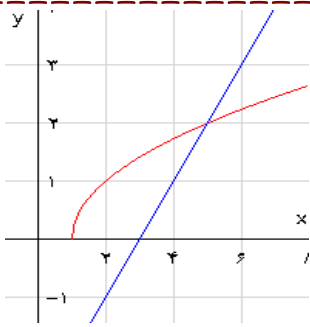
$$\text{الف) } V = \sqrt{\frac{2k}{m}} \Rightarrow V^2 = \frac{2k}{m} \Rightarrow k = \frac{mV^2}{2} \quad \text{۳ -}$$

$$\text{ب) } F = \frac{1}{2\pi} \sqrt{LC} \Rightarrow F^2 = \frac{1}{4\pi^2} (LC) \Rightarrow L = \frac{4\pi^2 F^2}{C}$$

$$\text{ج) } I = \frac{nE}{R+nr} \Rightarrow IR = nE - nlr = n(E - lr) \Rightarrow n = \frac{IR}{E - lr}$$

$$\text{د) } \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 V_1 T_2}{P_2 V_2}$$

$$\text{ه) } A = p(1+i)^2 \Rightarrow (1+i)^2 = \frac{A}{p} \Rightarrow 1+i = \pm \sqrt{\frac{A}{p}} \Rightarrow i = \pm \sqrt{\frac{A}{p}} - 1$$



الف) هندسی :

$$y = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$y = x-3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 & 5 \\ \hline y & -1 & 0 & 2 \end{array}$$

تنها جواب $x=5$ است.

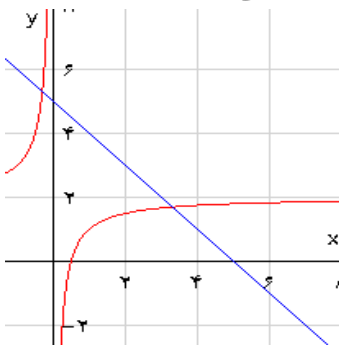
$$x-1 = (x-3)^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x=2 \text{ or } x=5$$

جبری :

$$x=2 \Rightarrow \sqrt{2-1} = 2-3 \quad ? \quad x=5 \Rightarrow \sqrt{5-1} = 5-3$$

فقط تساوی دوم درست است پس تنها $x=5$ قابل قبول است.

ب) هندسی : نمودار $y = \frac{2x-1}{x}$ در دو سمت خط $x=0$ دارای دو شاخه است.



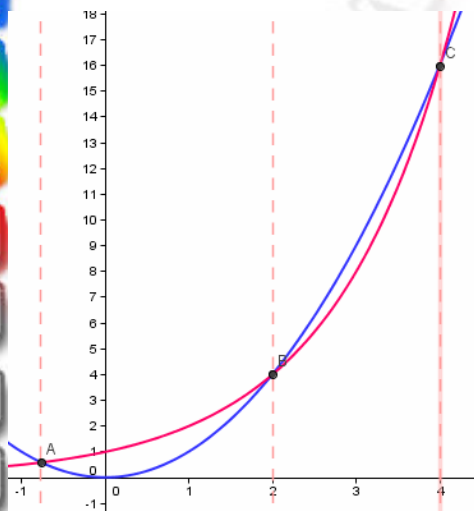
$$y = \frac{2x-1}{x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -3 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \hline y & \frac{7}{3} & 3 & 4 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}$$

$$y = 5-x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 5 & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 5 & 3 \end{array}$$

با توجه به نمودار $x = 3/5$, $x = -0.25$ دو جواب تقریبی اند.

$$\frac{2x-1}{x} = 5-x \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \quad \text{جبری :}$$

$x=0$ مفرج کسر را صفر میکند پس هر دو جواب به دست آمده قابل قبولند.



$$y = 2x \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}$$

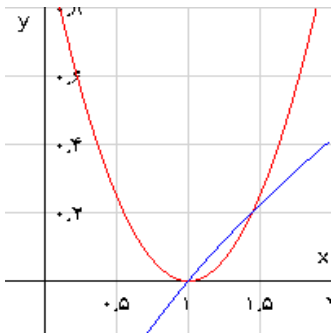
$$y = x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

ج) هندسی :

با توجه به نمودار و آزمون و خطا

$x=2$, $x=4$, $x \approx -0.75$ سه جواب اند.

جبری : ×



$$\sqrt{x} + 2x = x^2 + 2 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = (x-1)^2$$

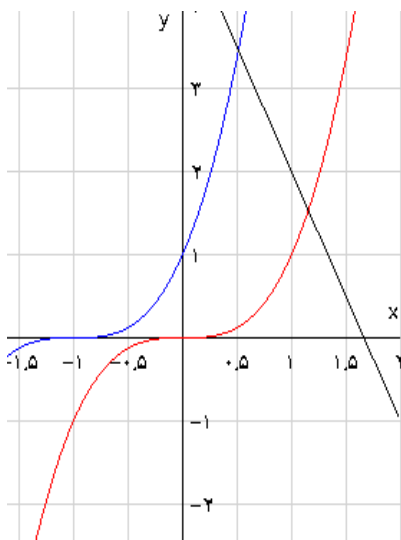
$$y = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} x & 0 & 1 & 4 & 9 \\ y & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

(د) هندسی :

$$y = (x-1)^2 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

با توجه به شکل دو جواب $x = 1$ ، $x = 1/4$ وجود دارد.

چبری : ×



$$y = x^3 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ y & -1 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

$$y = -3x + 5 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} x & 0 & 1 & 1/5 & 2 \\ y & 5 & 2 & 0/5 & -1 \end{array}$$

- ۲

طول ممل بر خورد نمودار آبی و سیاه تقریباً $x = 0.75$ است .

$$(-a)^2 = (a)^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{(-a)^2} = \sqrt{(a)^2} \Rightarrow |-a| = |a|$$

$$|a|^2 = |a| \times |a| = a \times a = a^2 = a^2 \quad (a^2 \geq 0)$$

$$|a| \leq |a| \Rightarrow -|a| \leq a \leq |a| \quad \text{۲- می دانیم } |a| \leq c, c \geq 0 \Rightarrow -c \leq a \leq c$$

$$\left. \begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array} \right\} \Rightarrow -(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b| \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|y| = |x + y - x| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| \leq |x| + |y - x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y - x|$$

$$|a| > |c| \Rightarrow a^2 > c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = (a - c)(a + c) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - c > 0, a + c > 0 \Rightarrow a > c, a > -c \Rightarrow a > c \\ or \\ a - c < 0, a + c < 0 \Rightarrow a < c, a < -c \Rightarrow a < -c \end{cases}$$

توضیح: برای برقراری شرط $a > c, a > -c$ با توجه به آنکه c مثبت است کفایت $a > c$.

$$\text{الف) } f(x) = x|x| = \begin{cases} x(x) = x^2 & x \geq 0 \\ x(-x) = -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ب) } f(x) = \begin{cases} x + 1 - 2 = x - 1 & x \geq 0 \\ -x - 1 - 2 = -x - 3 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ج) } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} x < -2 \Rightarrow y = -(x - 1 + x + 2) = -2x - 1 \\ -2 \leq x \leq 1 \Rightarrow y = -x + 1 + x + 2 = 3 \\ x > 1 \Rightarrow y = x - 1 + x + 2 = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -2x - 1 & x < -2 \\ 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ 2x + 1 & x > 1 \end{cases}$$

x	-2	1
$x - 1$	-	○ +
$x + 2$	○ -	+ +

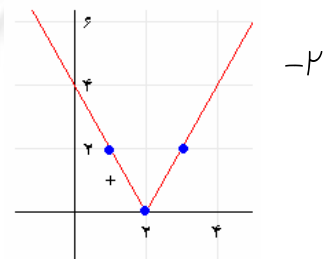
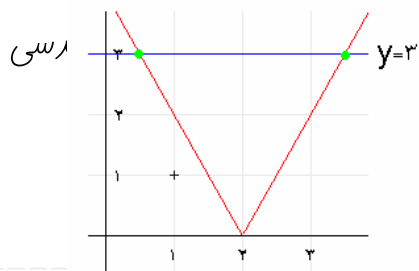
الف) $|2t-1|=3 \Rightarrow 2t-1=\pm 3 \Rightarrow t=2 \text{ or } t=-1$ -۱

ب) $|y^2-2|=7 \Rightarrow y^2-2=\pm 7 \Rightarrow \begin{cases} y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3 \\ y^2=-5 \quad \times \end{cases}$

ج) $|2x-3|=-(2x-3) \Rightarrow 2x-3 \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$

الف) $2x-4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 2 & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow$

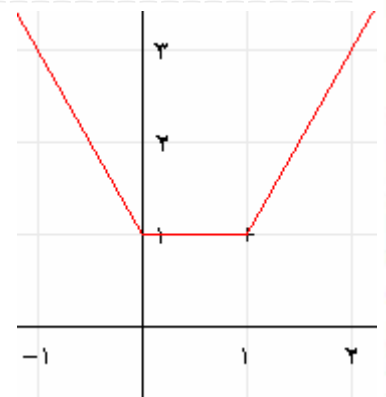
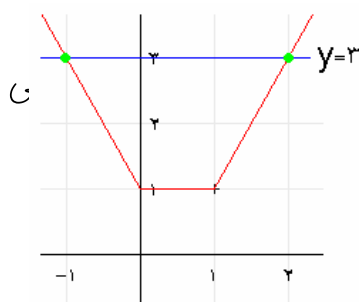
جبری $|2x-4|=3 \Rightarrow 2x-4=\pm 3 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \text{ or } x=\frac{1}{2}$



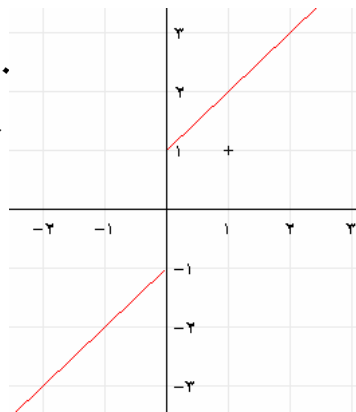
ب) $y = |x| + |1-x| = \begin{cases} -x+1-x=1-2x & x < 0 \\ x+1-x=1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1+x=2x-1 & x > 1 \end{cases}$

جبری $|x| + |1-x| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 1-2x=3 \text{ (if } x < 0) \Rightarrow x=-1 \\ 1=3 \text{ (if } 0 \leq x \leq 1) \\ 2x-1=3 \text{ (if } x > 1) \Rightarrow x=2 \end{cases}$

پس جوابهای معادله $x=-1, x=2$ است

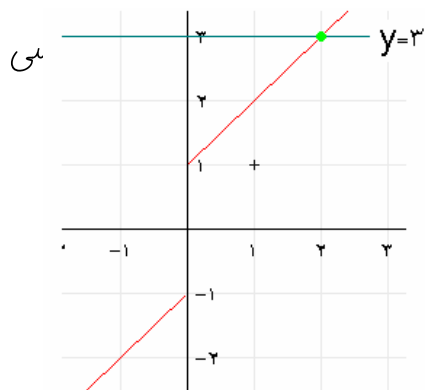


$$\text{ج) } y = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$$



$$y = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+1=3 \Rightarrow x=2 \text{ (if } x > 0) \\ x-1=3 \Rightarrow x=4 \text{ (if } x < 0) \end{cases}$$

پس تنها جواب قابل قبول $x=2$ است.



$$۱) x(x^2 - 2x + 1) \geq 0 \Rightarrow x(x-1)^2 \geq 0.$$

ولی $(x-1)^2 \geq 0$ همواره برقرار است پس باید $x \geq 0$.

$$۲) \frac{2x-1}{x} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x} > 0.$$

ریشه های صورت و مخرج $x=1$ ، $x=0$ هستند پس باید $x < 0$ یا $x > 1$.

$$۳) \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} - \frac{2}{1} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1) - x(x) - 2x(x-1)}{x(x-1)} \leq 0 \Rightarrow$$

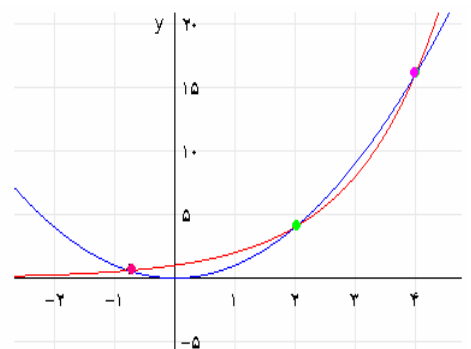
$$\frac{x^2 - 1 - x^2 - 2x^2 + 2x}{x(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 + 2x - 1}{x(x-1)} \leq 0.$$

برای صورت کسر افید $\Delta = 2^2 - 4(-2 \times (-1)) = 4 - 8 = -4 < 0$.
هم علامت a یعنی منفی است. پس مخرج باید مثبت باشد یعنی $x < 0$ or $x > 1$.

$$۴) |x-2| \leq x \Rightarrow x \geq 0, (x-2)^2 \leq x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \leq x^2 \Rightarrow x \geq 1$$

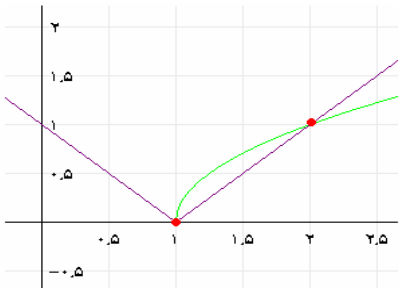
اشتراک دو شرط $(x \geq 1, x \geq 0)$ برابر $x \geq 1$ است.

۵) آن قسمت از نمودار $y = x^2$ که زیر نمودار $y = 2^x$ است را می یابیم. $-0.75 \leq x \leq 2$ or $x \geq 4$.
یادآوری: $x = 2, 4, 0.75$ طول ممل برشود دو نمودارند.



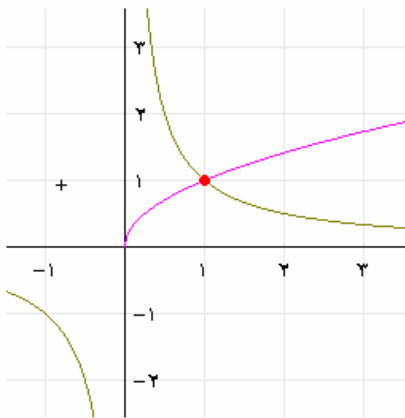
$$۶) \quad y = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۱ & ۲ & ۵ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array} \quad \text{و} \quad y = |x-1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۲ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$

مجموعه جواب برابر $x \geq 2$ است.



$$۷) \quad y = \frac{1}{x} \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -۱ & -۰/۵ & ۰/۵ & ۱ \\ \hline y & -۱ & -۲ & ۲ & ۱ \end{array} \quad \text{و} \quad y = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & ۰ & ۱ & ۴ \\ \hline y & ۰ & ۱ & ۲ \end{array}$$

با توجه به شکل برای $x > 1$ نمودار $y = \frac{1}{x}$ زیر نمودار $y = \sqrt{x}$ قرار دارد.

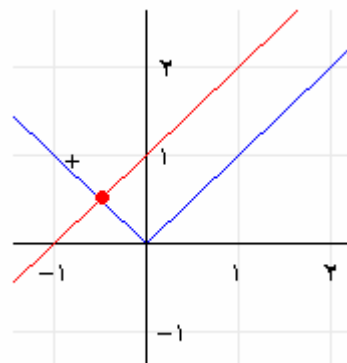


$$x+1 < |x| \Rightarrow (x+1)^2 < x^2 \Rightarrow$$

$$۱) \quad x^2 + 2x + 1 < x^2 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

$$y = x+1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۲ \end{array}$$

$$, \quad y = |x| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -۱ & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۱ & ۰ & ۱ \end{array}$$



روش جبری :

روش هندسی :

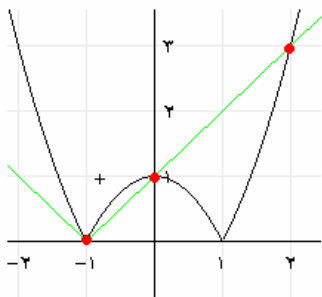
با توجه به شکل برای $x < -\frac{1}{2}$ نمودار قطبی (قرمز) پایین نمودار قدر مطلق (آبی) است.

$$9) |x^2 - 1| \leq |x+1| \Rightarrow |x+1| \times |x-1| \leq |x+1| \Rightarrow \begin{cases} |x+1|=0 \Rightarrow x=-1 \\ \text{or} \\ |x-1| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

پس مجموعه جواب برابر $\{-1\} \cup [0, 2]$ است.

$$y = |x^2 - 1| \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}$$

هندسی :

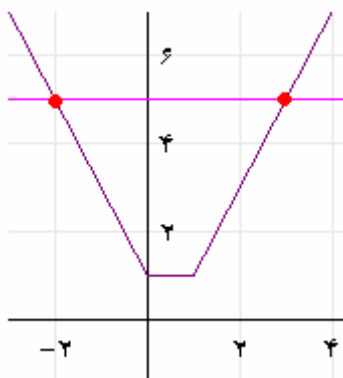


$$y = |x + 1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

در بازه $[0, 2]$ نمودار $y = |x^2 - 1|$ زیر نمودار $y = |x + 1|$ است. البته برای علامت تساوی نقاط تقاطع دیگر یعنی $x = -1$ نیز جواب است.

$$10) |x| + |x - 1| = \begin{cases} -x - x + 1 & x < 0 \\ x - x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x + x - 1 & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x + 1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases} \quad \text{جبری :}$$

$$\begin{cases} x < 0, -2x + 1 \leq 5 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 1, 1 \leq 5 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \\ x > 1, 2x - 1 \leq 5 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow 1 < x \leq 3 \end{cases} \xrightarrow{\cup} x \in [-2, 3]$$



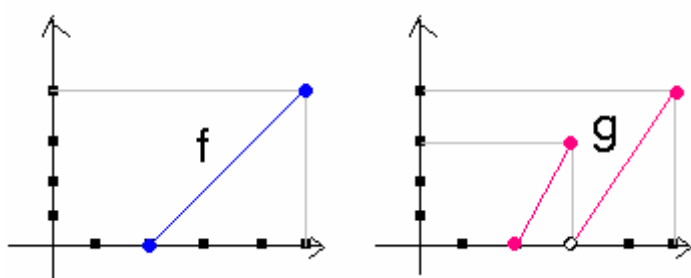
$$\text{هندسی : نمودار } y = \begin{cases} -2x + 1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & x > 1 \end{cases} \text{ و } y = 5 \text{ رسم کنید.}$$

در بازه $[-2, 3]$ نمودار سیاه زیر نمودار صورتی است.

۱- برای هر یک از چهار عضو A دو انتخاب وجود دارد (p یا q) پس تعداد حالات برابر $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ است.

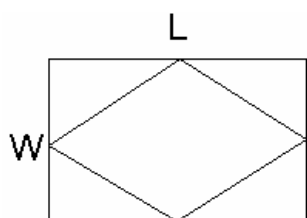
۲- برای هر یک از m عضو A می توان n انتخاب داشت پس تعداد حالات $n \times n \times \dots \times n = n^m$ است.

۳- $x \geq -2 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+2}$



۴- $f(x) = \frac{4}{3}(x-2)$, $2 \leq x \leq 5$
 $g(x) = \begin{cases} 3x-6 & 2 \leq x \leq 3 \\ 2x-6 & 3 < x \leq 5 \end{cases}$

تابع f یک به یک است ولی g نیست مثلاً اگر $y=1$ در این صورت $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{7}{2}$.



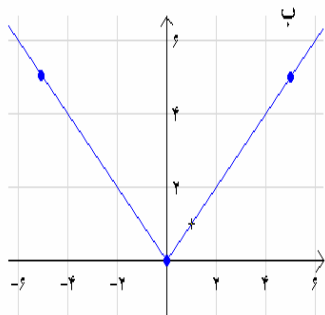
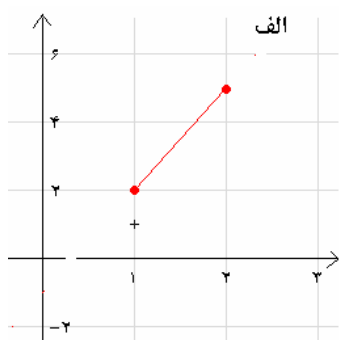
۵- مساحت لوزی نصف حاصلضرب قطرهای آن است.

$$2(L+W) = 40 \Rightarrow L+W = 20 \Rightarrow L = 20 - W$$

$$\text{مساحت لوزی} = f(W) = \frac{1}{2}L \times W = \frac{(20-W)W}{2}, \quad 0 < W < 20$$

۶- $x - y = 12 \Rightarrow x = y + 12 \Rightarrow xy = (y + 12)y = y^2 + 12y = f(y)$

۷- $2x + 3y = 150 \Rightarrow x = \frac{-3y + 150}{2}$, $S = xy = \frac{-3y^2 + 150y}{2}$

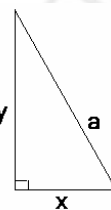


$$\begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 5 \end{array} \quad \text{الف -۱}$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & -5 & 0 & 5 \\ \hline y & 5 & 0 & 5 \end{array} \quad \text{ب}$$

$$\frac{xy}{2} = 25 \Rightarrow xy = 50 \Rightarrow y = \frac{50}{x}$$

$$a^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{50}{x}\right)^2 \Rightarrow a(x) = \sqrt{x^2 + \frac{2500}{x^2}}$$



-۹

$$y = -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 400) + \frac{1}{2}(400) + 230 = -\frac{1}{2}(x-20)^2 + 430 \quad -۱۰$$

راه اول) بیشترین مقدار y به ازای $x=20$ حاصل می شود که برابر $y_{\max} = 430$ است.

راه دوم) $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-\frac{1}{2})} = 20$ که به ازای آن $y_{\max} = 230 + 20(20) - \frac{1}{2}(20^2) = 430$.

$$f(2x) = (2x)^2 = 4x^2, \quad 2f(x) = 2x^2 \Rightarrow f(2x) \neq 2f(x) \quad \text{الف -۱۱}$$

$$g(2x) = |2x| = 2|x| = 2g(x) \quad \text{ب}$$

$$f(x+2) = (x+2)^2 = x^2 + 2x + 4, \quad f(x) + 2 = x^2 + 2 \Rightarrow f(x+2) \neq f(x) + 2 \quad \text{ج}$$

$$g(x+2) = |x+2| \leq |x| + 2 = g(x) + 2 \quad \text{د}$$

طبق نامساوی مثلثی

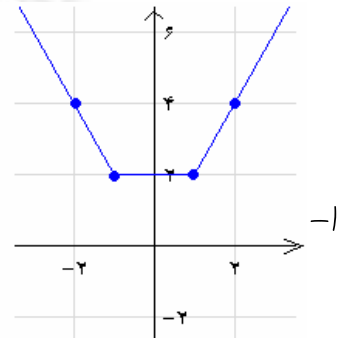
تذکر مهم برای رسم: برای رسم، نقاط مرزی را هر چند متعلق به دامنه نباشند را در نظر گرفته و برای

رسم نقطه را توفالی رسم می کنیم مثلا برای $1 < x < 2$ ، هر چند $y = x + 1$ در دامنه

نیست آنها را در نظر گرفته و هنگام رسم توفالی می کشیم.

$$y = x + 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = +1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline x + 1 & - & + \\ x - 1 & - & - \end{array}$$

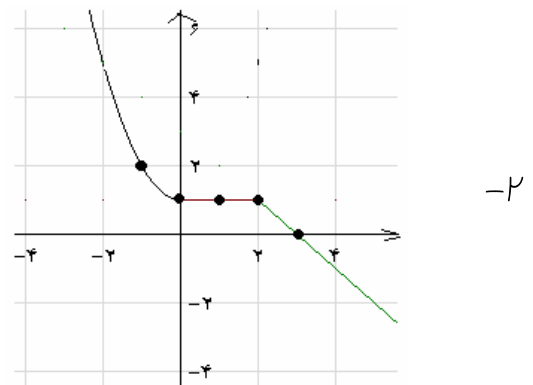


$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x - 1 - x + 1 & x < -1 \\ x + 1 - x + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x + 1 + x - 1 & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 1 \\ \hline y & 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 4 \end{array}$$

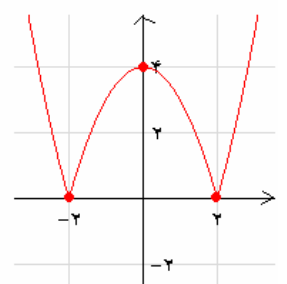
$$\Rightarrow R_f = [2, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 3 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 2 & 3 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}$$



$$g(x) = |x^2 - 4|, \quad h(x) = x^2 - 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{array}$$

ابتدا h را رسم و برای رسم g آن قسمت از نمودار h که زیر محور x هاست را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.



$$\text{الف) } y = ax + b, \begin{cases} (-4, +1) \in f \Rightarrow 1 = -4a + b \\ (-2, 3) \in f \Rightarrow 3 = -2a + b \end{cases} \Rightarrow -2a = -2 \Rightarrow a = 1, b = 5 \quad -۳$$

$$y = ax + b, \begin{cases} (1, -1) \in f \Rightarrow -1 = a + b \\ (6, -3) \in f \Rightarrow -3 = 6a + b \end{cases} \Rightarrow 5a = -2 \Rightarrow a = \frac{-2}{5}, b = \frac{-3}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + 5 & -4 \leq x \leq -2 \\ +1 & -2 < x < 1 \\ \frac{-2}{5}x + \frac{3}{5} & 1 \leq x \end{cases}, \begin{cases} D_f = [-4, +\infty) \\ R_f = (-\infty, -1] \cup [1, 3] \end{cases}$$

$$\text{ب) } y = ax + b, \begin{cases} (-3, 4) \in f \Rightarrow 4 = -3a + b \\ (-1, -1) \in f \Rightarrow -1 = -a + b \end{cases} \Rightarrow -2a = 5 \Rightarrow a = \frac{-5}{2}, b = \frac{-7}{2}$$

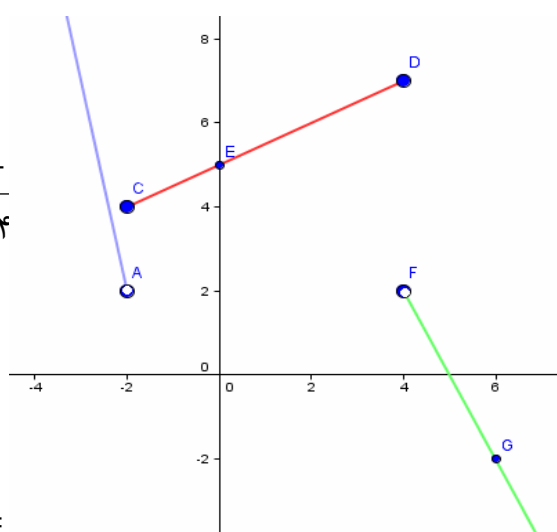
$$y = ax + b, \begin{cases} (-1, -1) \in f \Rightarrow -1 = -a + b \\ (2, 2) \in f \Rightarrow 2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow 3a = 3 \Rightarrow a = 1, b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{-5}{2}x - \frac{7}{2} & x \leq -1 \\ x & -1 < x < 2 \\ -2 & x \geq 2 \end{cases}, \begin{cases} D_f = (-\infty, +\infty) = IR \\ R_f = \{-2\} \cup [-1, +\infty) \end{cases}$$

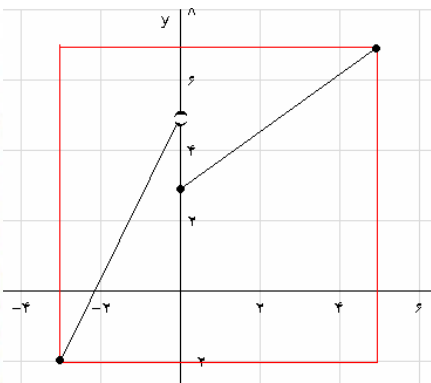
$$f(x) = \begin{cases} -5x - 8 & x < -2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -2 & -4 \\ y & 2 & 12 \end{array} \\ \frac{1}{2}x + 5 & -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 4 & - \\ y & 5 & 7 & 4 \end{array} \\ 10 - 2x & x > 4 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 4 & 6 \\ y & 2 & -2 \end{array} \end{cases}$$

$$f(6) = 10 - 2(6) = -2, \quad f(4) = \frac{1}{2}(4) + 5 = 7$$

$$f(-4) = -5(-4) - 8 = 12, \quad f(0) = \frac{1}{2}(0) + 5 = 5$$



-۴



$$y = ax + b, \begin{cases} (0, 3) = (x, y) \Rightarrow 3 = a(0) + b \Rightarrow b = 3 \\ (5, 7) = (x, y) \Rightarrow 7 = 5a + b \Rightarrow a = \frac{4}{5} \end{cases}$$

$$y = ax + b, \begin{cases} (0, 5) = (x, y) \Rightarrow 5 = a(0) + b \Rightarrow b = 5 \\ (-3, -2) = (x, y) \Rightarrow -2 = a(-3) + b \Rightarrow a = \frac{7}{3} \end{cases} \quad -5$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x + 3 & 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{7}{3}x + 5 & -3 \leq x < 0 \end{cases}$$

الف) $x^2 + y^2 = 25, x = 0 \Rightarrow 0^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm 5 \Rightarrow$ تابع نیست -۶

ب) $y = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ تابع هست، به ازای هر x در دامنه دقیقاً یک y وجود دارد.

ج) $y = |x| + 1$ تابع هست، به ازای هر x در دامنه دقیقاً یک y وجود دارد.

د) $x = |y| + 1, x = 2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ تابع نیست

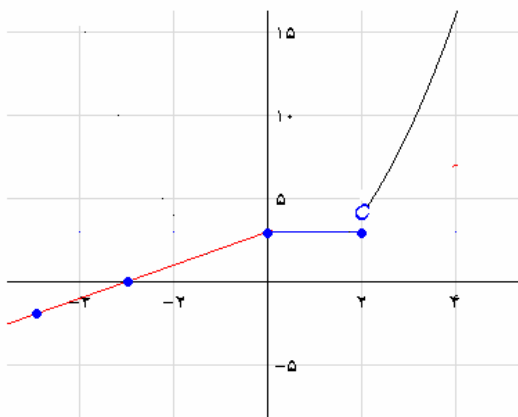
ه) $y^2 = x^2, x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ تابع نیست

و) $3x + 2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12 - 3x}{2}$ تابع هست

ز) $x = 1 \Rightarrow y = 2, y = 3$ در واقع به y هر مقدار دلخواه می توان داد) تابع نیست

$$x < 0 \Rightarrow f(x) = ax + b, \begin{cases} f(-5) = -2 \Rightarrow -5a + b = -2 \\ f(-3) = 0 \Rightarrow -3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \quad -7$$

$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow f(x) = f(2) = 3 \quad x > 2 \Rightarrow f(x) = x^2$$



$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \Rightarrow \begin{array}{r|rr} x & -5 & -3 \\ y & -2 & 0 \end{array} \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{array}{r|rr} x & 0 & 2 \\ y & 3 & 3 \end{array} \\ x^2 & x > 2 \Rightarrow \begin{array}{r|rr} x & 2 & 3 \\ y & 4 & 9 \end{array} \end{cases} \quad \text{ادامه -۷}$$

$$D_f = D_g = R, f(x) = g(x) = \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow f = g \quad \text{-۸ بلی}$$

$$\text{الف) } g(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x| \neq \sin x = f(x) \Rightarrow f \neq g \quad \text{-۹}$$

$$\text{ب) } f(3) = 5, g(3) = 3 + 3 = 6, f(3) \neq g(3) \Rightarrow f \neq g$$

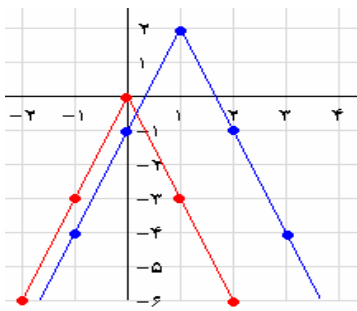
$$\text{ج) } D_f = D_g = R, \begin{cases} x \neq 2 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x - 2)}{x - 2} = x = f(x) \Rightarrow f = g \\ x = 2 \Rightarrow g(2) = 3 = f(2) \end{cases}$$

$$\text{د) } D_f = D_g = R, f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \times \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{1 - \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^2(1 - \sqrt{1 + x^2})}{1 - 1 - x^2} \\ = -1(1 - \sqrt{1 + x^2}) = \sqrt{1 + x^2} - 1 = g(x) \Rightarrow f = g$$

$$y = ax + b, \begin{cases} (-6, 0) \in f \Rightarrow -6a + b = 0 \\ (-1, 2) \in f \Rightarrow -a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{5}, b = \frac{12}{5} \quad \text{-۱۰}$$

$$y = ax + b, \begin{cases} (-1, 2) \in f \Rightarrow -a + b = 2 \\ (4, 0) \in f \Rightarrow 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{5}, b = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{12}{5} & -6 \leq x \leq -1 \\ -\frac{2}{5}x + \frac{8}{5} & -1 < x \leq 4 \end{cases}$$



۱- روش اول) $y = |x|$ را رسم، انتقال یک واحد به راست،
 قرینه نمودار نسبت به محور x ها، انبساط عمودی
 در امتداد محور y ها با ضریب ۳، دو واحد انتقال به بالا.
 روش دوم) ابتدا نمودار $y = -3|x|$ را رسم کرده و سپس نمودار را
 ۱ واحد به راست و ۲ واحد به بالا انتقال می دهیم.

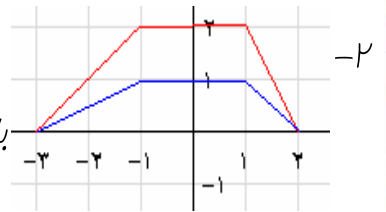
$$y = -3|x| \Rightarrow \begin{array}{c|cccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & -6 & -3 & 0 & -3 & -6 \end{array}$$

(رسم با روش دوم) ↑

*** (قرمز، نمودار پیش فرض و آبی، نمودار جواب) ***

با توجه به نمودار f داریم $f(-3) = 0$ ، $f(-1) = 2$ ، $f(1) = 2$ ، $f(2) = 0$

انبساط عمودی در امتداد محور y ها با ضریب $\frac{1}{2}$ (الف)



قرینه نسبت به محور y ها (ب)



انبساط افقی در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{3}$ (ج)

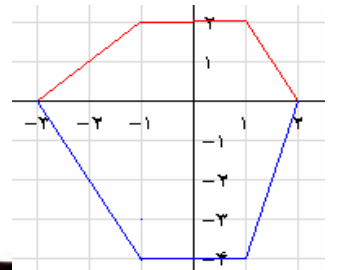


قرینه نسبت به محور y ها و انبساط افقی در (د)

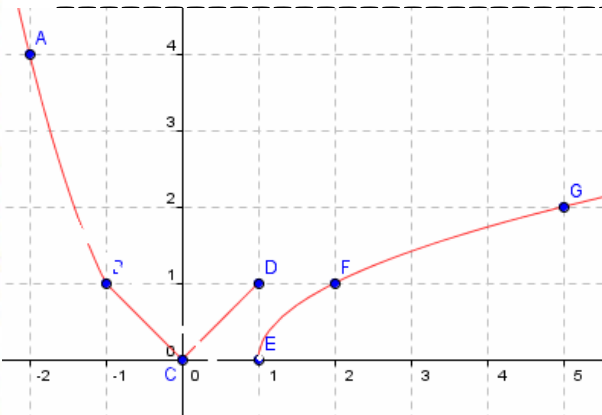
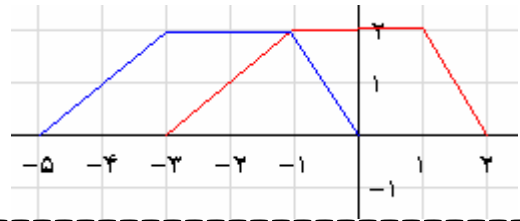
امتداد محور x ها با ضریب ۲



قرینه نسبت به محور x ها، انبساط عمودی در امتداد محور y ها با ضریب ۲ (ه)



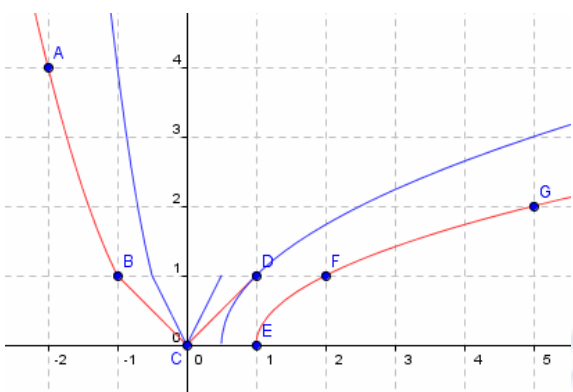
انتقال نمودار ۲ واحد به سمت چپ (و)



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \Rightarrow \begin{array}{l|l} x & -3 & -2 & -1 \\ \hline y & 9 & 4 & 1 \end{array} \\ |x| & -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow \begin{array}{l|l} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array} \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \Rightarrow \begin{array}{l|l} x & 1 & 2 & 5 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array} \end{cases} \quad -۳$$

رسم $y = f(2x)$

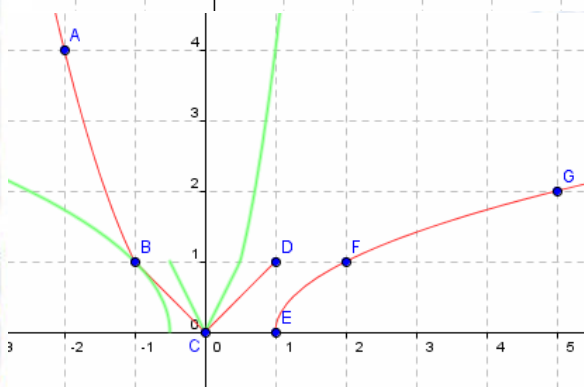
انقباض افقی در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{2}$.



رسم $y = f(-2x)$

قرینه نسبت به محور y ها و انقباض افقی

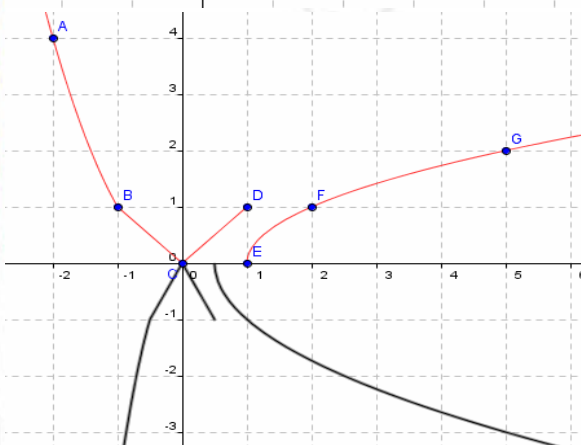
این نمودار در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{2}$.



رسم $y = -f(2x)$

قرینه نسبت به محور x ها و انقباض افقی

در امتداد محور x ها با ضریب $\frac{1}{2}$.



۴- الف) نادرست (باید ۳ واحد به چپ)

ب) نادرست، g قرینه نمودار f نسبت به محور y هاست. ج) درست

۵- g از انتقال f به اندازه ۲ واحد به سمت چپ و قرینه نسبت به محور x ها و آنگاه انقباض عمودی در امتداد محور y ها به اندازه $\frac{1}{2}$ و آنگاه انتقال به اندازه ۳ واحد به پائین.

$$g(x) = -\frac{1}{2}|x+2|-3$$

۶- $\sqrt{x} \rightarrow \sqrt{-x} \rightarrow \sqrt{-(x-3)} \rightarrow \sqrt{-(x-3)}-5 \Rightarrow f(x) = \sqrt{-x+3}-5$

۷- الف) $g(-8) = \frac{1}{2}f(-8) = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \Rightarrow (-8, 3) \in g$

ب) $g(8) = f(-8) = 6 \Rightarrow (8, 6) \in g$

ج) $g(-8) = f(-8) - 3 = 6 - 3 = 3 \Rightarrow (-8, 3) \in g$

د) $g(-8) = 3f(-8) = 3 \times 6 = 18 \Rightarrow (-8, 18) \in g$

۸- الف) $g(x) = -\frac{1}{2}f(x-1)+3$ انتقال ۱ واحد به راست، قرینه نسبت به محور x ها،

انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$ ، انتقال ۳ واحد به بالا.

ب) $g(x) = -2f(x+4)-3$ انتقال ۴ واحد به چپ، قرینه نسبت به محور x ها، انبساط

عمودی با ضریب ۲، انتقال ۳ واحد به پائین.

ج) $g(x) = -2f(x-\frac{1}{3})+1$ انتقال $\frac{1}{3}$ واحد به راست، قرینه نسبت به محور x ها، انبساط

عمودی با ضریب ۲، انتقال ۱ واحد به بالا.

۹- نقاط

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	0	-1	0	1

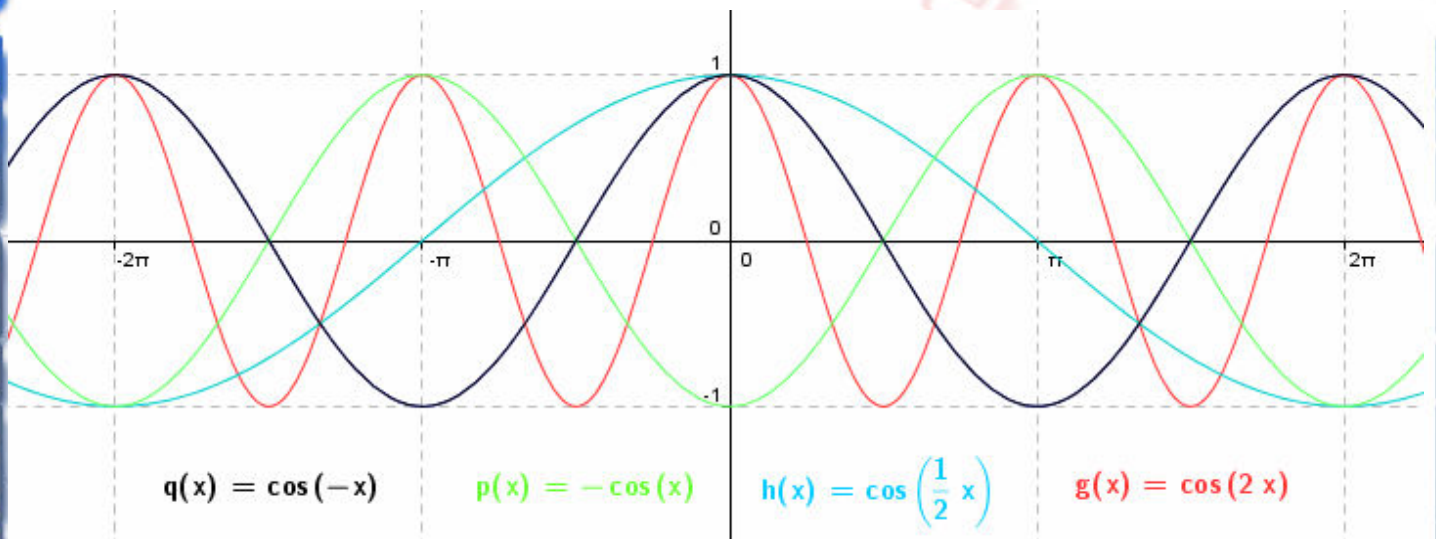
$f(x) = \cos(x) \Rightarrow$ را مینا گرفته و بر این نقاط دستورات

زیر را اعمال و سپس با توجه به شکل کلی نمودار پیش فرض، نمودار اصلی را رسم کنید.

$f(2x)$ نمودار f منقبض به صورت افقی با ضریب $\frac{1}{2}$.

$f(\frac{1}{2}x)$ نمودار f منبسط به صورت افقی با ضریب 2 .

$-f(x)$ نمودار f قرینه نسبت به محور x ها. $f(-x)$ نمودار f قرینه نسبت به محور y ها.



۱۰- نمودار دو تابع قرینه همدیگر نسبت به محور y ها

$$R\sqrt{x} = R\sqrt{-x} = [0, +\infty) \quad , \quad D\sqrt{x} = [0, +\infty) \quad , \quad D\sqrt{-x} = (-\infty, 0]$$

نمودار دو تابع $f(x), f(-x)$ قرینه همدیگر نسبت به محور y ها

$$Rf(x) = Rf(-x) \quad , \quad g(x) = f(-x) \Rightarrow D_g = \{x \in R \mid -x \in D_f\}$$

توضیح: چون نمودار قرینه نسبت به محور y هاست بنابراین تصویر نمودار بر محور y ها (یعنی برد)

تغییر نمی کند ولی دامنه نسبت به محور y ها قرینه می شود. (دو دامنه قرینه همدیگرند)

۱۱- ابتدا نسبت به محور y ها قرینه شده سپس اگر $|a| > 1$ در امتداد محور x ها

با ضریب $\frac{1}{|a|}$ منقبض و اگر $|a| < 1$ با ضریب $\frac{1}{|a|}$ منبسط می گردد.

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{5x}{3x-7} \div \frac{x^5-1}{5x-15} = \frac{25x(x-3)}{(3x-7)(x^5-1)}$$

$$\begin{cases} 3x-7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3} \Rightarrow D_f = R - \{\frac{7}{3}\} \\ 5x-15=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow D_g = R - \{3\} \Rightarrow D_{f/g} = R - \{\frac{7}{3}, 3\} \\ g(x)=0 \Rightarrow x^5-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \end{cases} \quad -1$$

$$\text{الف) } D_f = R, D_g = R, \begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow x=0 \\ g(x)=0 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \quad -2$$

$$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \frac{2-x}{4x}, D_{g/f} = R \cap R \cap (R - \{0\}) = R - \{0\}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{4x}{x-2}, D_{f/g} = R \cap R \cap (R - \{2\}) = R - \{2\}$$

$$(f \cdot f)(x) = f(x) \cdot f(x) = 16x^2, D_{f \cdot f} = R \cap R = R$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 4x(2-x), D_{f \cdot g} = R \cap R = R$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 4x - 2 + x = 5x - 2, D_{f-g} = R \cap R = R$$

$$\text{ب) } x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow D_f = R - \{2\}, 6-x=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow D_g = R - \{6\}$$

جواب ندارد, $f(x)=0, g(x)=0$

$$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \frac{1}{6-x} \div \frac{4}{x-2} = \frac{x-2}{4(6-x)}, D_{g/f} = R - \{2, 6\}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{4}{x-2} \div \frac{1}{6-x} = \frac{4(6-x)}{x-2}, D_{f/g} = R - \{2, 6\}$$

$$(f \cdot f)(x) = f(x) \cdot f(x) = \frac{16}{(x-2)^2}, D_{f \cdot f} = R - \{2\}$$

ادامه (ب)

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{4}{x-2} \times \frac{1}{6-x} = \frac{4}{(x-2)(6-x)}, \quad D_{f \cdot g} = R - \{2, 6\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{4}{x-2} - \frac{1}{6-x} = \frac{26-5x}{(x-2)(6-x)}, \quad D_{f-g} = R - \{2, 6\}$$

$$ج) \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty) \quad , \quad x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_g = [-2, +\infty)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad g(x) = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}, \quad D_{g/f} = [-2, +\infty) \cap [2, +\infty) \cap (R - \{2\}) = (2, +\infty)$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}, \quad D_{f/g} = [2, +\infty) \cap [-2, +\infty) \cap (R - \{-2\}) = [2, +\infty)$$

$$(f \cdot f)(x) = f(x) \cdot f(x) = (\sqrt{x-2})^2 = x-2, \quad D_{f \cdot f} = [2, +\infty) \cap [2, +\infty) = [2, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}, \quad D_{f \cdot g} = [2, +\infty) \cap [-2, +\infty) = [2, +\infty)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}, \quad D_{f-g} = [2, +\infty)$$

$$د) \quad x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D_f = [-3, +\infty) \quad , \quad x = 0 \Rightarrow D_g = R - \{0\}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \quad , \quad g(x) = 0 \text{, جواب ندارد}$$

$$(g/f)(x) = g(x)/f(x) = \frac{2}{x} \div \sqrt{x+3} = \frac{2}{x\sqrt{x+3}}, \quad D_{g/f} = (-3, +\infty) - \{0\}$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \sqrt{x+3} \div \frac{2}{x} = \frac{x\sqrt{x+3}}{2}, \quad D_{f/g} = [-3, +\infty) - \{0\}$$

$$(f \cdot f)(x) = f(x) \cdot f(x) = (\sqrt{x+3})^2 = x+3, \quad D_{f \cdot f} = [-3, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+3} \cdot \frac{2}{x} = \frac{2\sqrt{x+3}}{x}, \quad D_{f \cdot g} = [-3, +\infty) - \{0\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+3} - \frac{2}{x}, \quad D_{f-g} = [-3, +\infty) - \{0\}$$

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 7 & x \geq 1 \\ -x - 1 & x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 2 & x \geq -2 \\ -1 & x < -2 \end{cases} \quad -\mu$$

$$\text{الف) } (f + g)(-4) = f(-4) + g(-4) = (4 - 1) + (-1) = 2$$

$$\text{ب) } (f - g)(3) = f(3) - g(3) = (5(3) - 7) - \left(-\frac{1}{2}(3) - 2\right) = \frac{23}{2}$$

$$\text{ج) } (f / g)(\cdot) = f(\cdot) / g(\cdot) = (-\cdot - 1) / \left(-\frac{1}{2}(\cdot) - 2\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{د) } (f + g)(2) = f(2) + g(2) = (5(2) - 7) + \left(-\frac{1}{2}(2) - 2\right) = 0$$

$$\text{ه) } (f \cdot g)\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot g\left(\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) - 2\right) = \frac{26}{9}$$

$$\text{و) } (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right) = f\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$$

$$\text{ز) } (g \circ f)(-5) = g(f(-5)) = g(-(-5) - 1) = g(4) = -\frac{1}{2}(4) - 2 = -4$$

$$\text{ح) } (f \circ f)(7) = f(f(7)) = f(5(7) - 7) = f(28) = 5(28) - 7 = 133$$

$$\text{ط) } (f \circ g)(4) = f(g(4)) = f\left(-\frac{1}{2}(4) - 2\right) = f(-4) = -(-4) - 1 = 3$$

$$\text{ی) } (f / g)\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) / g\left(\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3} - 1\right) \div \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) - 2\right) = \left(-\frac{5}{3}\right) \div \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{5}{7}$$

$$D_f = N, \quad D_g = \{1, 2, 3, 4\}, \quad D_{2f+g} = \{1, 2, 3, 4\}, \quad D_{g \circ f} = \{1, 2, 3, 4\} \quad -\xi$$

$$(2f + g)(1) = 2f(1) + g(1) = 2(2) + 2(1) = 6, \quad (g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 2(2) = 4$$

$$(2f + g)(2) = 2f(2) + g(2) = 2(3) + 2(2) = 10, \quad (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 2(3) = 6$$

$$(2f + g)(3) = 2f(3) + g(3) = 2(5) + 2(3) = 16, \quad (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2(5) = 10$$

$$(2f + g)(4) = 2f(4) + g(4) = 2(7) + 2(4) = 22, \quad (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(7) = 2(7) = 14$$

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad 1-x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = R - \{\pm 1\}$$

$$g(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad x(1-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_g = [0, 1] \quad -5$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, 1] \mid \sqrt{x(1-x)} \neq \pm 1\}$$

$$\sqrt{x(1-x)} = 1 \Rightarrow x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0, \quad \Delta = -3 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

$$\sqrt{x(1-x)} = -1, \quad \sqrt{x(1-x)} \geq 0, \quad -1 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in [0, 1] \mid x \in R\} = [0, 1]$$

$$\text{الف) } 2r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2} \Rightarrow r(x) = \frac{x}{2} \quad -6$$

$$\text{ب) } A(r) = \pi r^2$$

$$\text{ج) } (A \circ r)(x) = A(r(x)) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4}, \quad \frac{x}{2} \text{ مساحت دایره ای به شعاع } \frac{x}{2}$$

$$f + g = \{(-4, f(-4) + g(-4)), (0, f(0) + g(0)), (3, f(3) + g(3))\} \\ = \{(-4, 13 + (-7)), (0, 5 + (-3)), (3, -5 + 0)\} = \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\} \quad -7$$

$$f - g = \{(-4, 13 - (-7)), (0, 5 - (-3)), (3, -5 - 0)\} = \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\}$$

$$f \times g = \{(-4, 13 \times (-7)), (0, 5 \times (-3)), (3, -5 \times 0)\} = \{(-4, -91), (0, -15), (3, 0)\}$$

چون $g(0) = 0$ پس $D_{f/g} \ni 0$ بنابراین

$$f / g = \{(-4, 13 \div (-7)), (0, 5 \div (-3))\} = \left\{(-4, -\frac{13}{7}), (0, -\frac{5}{3})\right\}$$

$$\text{اول زمان } f(x) = 27 + 3x \quad -1 \quad x \text{ فاصله زمانی از } 1386 \text{ تا سال مورد نظر}$$

$$\text{دوم زمان } g(x) = 12 + 2x \quad f(x) + g(x) = 39 + 5x \quad \text{هرروز زمان}$$

$$x = 1396 - 1386 = 10 \Rightarrow (f + g)(10) = 39 + 5(10) = 89 \text{ میلیون (مجموع فروش پس از ده سال)}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x)+1)^2 + 1, (f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \quad -9$$

$$\Rightarrow (g(x)+1)^2 + 1 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow |g(x)+1| = |x-2| \Rightarrow g(x)+1 = \pm|x-2|$$

$$\Rightarrow g(x) = -1 \pm |x-2|$$

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, +\infty)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, 1] \quad -10$$

$$D_{(f+g) \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_{f+g}\} = \{x \in [-1, 1] \mid \sqrt{1-x^2} \in [0, 1]\}$$

پس باید $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ اما می دانیم $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ از سوئی

که همواره برقرار است، بنابراین $\sqrt{1-x^2} \leq 1 \Rightarrow 1-x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 0$

$$D_{(f+g) \circ f} = \{x \in [-1, 1] \mid \sqrt{1-x^2} \in [0, 1]\} = \{x \in [-1, 1] \mid x \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$$

$$\frac{3}{4} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \quad -11$$

۱۲- الف) نادرست زیرا

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2 - 4}) = (\sqrt{x^2 - 4})^2 - 4 = x^2 - 8$$

$$(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(0) = -4 \quad \text{ب) نادرست زیرا}$$

$$(f \circ g)(9) = f(g(9)) = f(3) = -5, \quad g(2) = 2(2) - 1 = 3 \quad \text{ج) درست زیرا}$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} (f \circ g)(x) = \sqrt{x+1} \\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x} + 1 \end{cases} \quad \text{د) نادرست، مثال نقض}$$

$$(f \circ g)(x) = h(x) \Rightarrow f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 7 = 4x^2 + 4x + 1 + 6$$

$$= (2x+1)^2 + 6 \xrightarrow{2x+1 \rightarrow x} f(x) = x^2 + 6$$

۱۳-

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x^2 + 5 \geq 0 \Rightarrow D_f = R \quad \text{همواره برقرار است}$$

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [-2, 2]$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-2, 2] \mid \sqrt{4 - x^2} \in R\} = [-2, 2]$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in R \mid \sqrt{x^2 + 5} \in [-2, 2]\}$$

$$-2 \leq \sqrt{x^2 + 5} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} \geq -2 \Rightarrow x \in R \\ \text{and} \\ \sqrt{x^2 + 5} \leq 2 \Rightarrow x^2 + 5 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq -1 \Rightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

اشتراک دو مجموعه بالا تهی است بنابراین $D_{g \circ f} = \emptyset$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{4 - x^2}) = \sqrt{4 - x^2 + 5} = \sqrt{9 - x^2}$$

$$(g \circ f)(x) = \{\}$$

الف) $f(g(1)) = f(6) = 5$

ب) $g(f(1)) = g(3) = 2$

-۱۵

ج) $f(f(1)) = f(3) = 4$

د) $g(g(1)) = g(6) = 3$

ه) $(gof)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1$

و) $(fog)(6) = f(g(6)) = f(3) = 4$

$$(fog)(4) = f(g(4)) = f(6) = 5, \quad (fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 5$$

$$(fog)(6) = f(g(6)) = f(8) = 12, \quad (fog)(8) = f(g(8)) = f(10) = 2$$

-۱۶

$$\Rightarrow fog = \{(4, 5), (2, 5), (6, 12), (8, 2)\}$$

$$(gof)(10) = f(f(10)) = g(2) = 4 \Rightarrow gof = \{(10, 4)\}$$

۱- شماره گذاری چپ به راست و از بالا به پایین

(a) نه زوج و نه فرد (مقارن نسبت به مبدأ و محور y هانیست)

$$f(-x) = |-x+1|-1 = |x-1|-1 \neq |x+1|-1 = f(x)$$

(b) فرد (نسبت به مبدأ مقارن است)

$D_g = [-1, 1] - \{0\}$ دامنه مقارن

$$g(-x) = -x + \frac{|-x|}{-x} = -x + \frac{|x|}{-x} = -x - \frac{|x|}{x} = -(x + \frac{|x|}{x}) = -g(x)$$

(c) زوج (مقارن نسبت به محور y هاست)

$$h(x) = \begin{cases} x + \frac{17}{4} & -4 \leq x \leq -\frac{1}{4} \\ -x + \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \end{cases} \quad D_h = [-4, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{4}, 4]$$

$$h(-x) = \begin{cases} -x + \frac{17}{4} & -4 \leq -x \leq -\frac{1}{4} \\ -(-x) + \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \leq -x \leq 4 \end{cases} = \begin{cases} -x + \frac{17}{4} & \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \\ x + \frac{17}{4} & -4 \leq x \leq -\frac{1}{4} \end{cases} = h(x)$$

(d) فرد (نسبت به مبدأ مقارن است)

$$D_t = R \quad \text{مقارن} \quad t(-x) = 2(-x) = -2x = -t(x)$$

(e) زوج (نسبت به محور y ها مقارن است)

$$D_k = R \quad \text{مقارن} \quad k(-x) = 2 = k(x)$$

۲- دامنه مقارن $5 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{5} \Rightarrow x \in [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ (الف)

$$f(-x) = (-x)\sqrt{5 - (-x)^2} = -x\sqrt{5 - x^2} = -f(x) \Rightarrow \text{تابع فرد}$$

ب) $x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_f = R - \{1\}$

دامنه مقارن نیست چون $1 \in D_f$ ولی $1 \notin D_f$ پس نه زوج و نه فرد است.

$$\text{ج) } x > 0 \Rightarrow f(x) = 1, -x < 0 \Rightarrow f(-x) = -1 \Rightarrow f(x) = -f(x)$$

ولی در تابع فرد اگر $0 \in D_f$ باید $f(0) = 0$ ولی در این مثال $f(0) = 1$ پس نه زوج نه فرد

$$\text{د) } f(x) = |x| \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ دامنه متقارن و } f(-x) = |-x| = |x| = f(x) \Rightarrow \text{زوج}$$

$$\text{ه) } f(x) = 2x + \sin x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ دامنه متقارن}$$

$$f(-x) = 2(-x) + \sin(-x) = -2x - \sin x = -(2x + \sin x) = -f(x) \Rightarrow \text{فرد}$$

$$\text{و) } f(x) = x^2 + 2x^4 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ دامنه متقارن}$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x)^4 = x^2 + 2x^4 = f(x) \Rightarrow \text{زوج}$$

۳- الف) درست می دانیم $D_{f \pm g} = D_f \times D_g = D_f \cap D_g$ و اگر دو مجموعه متقارن باشند اشتراک (و اجتماع) آنها نیز نسبت به صفر متقارن است.

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) \quad \text{ب) درست}$$

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x)) = (f \times g)(x) \quad \text{ج) نادرست زوج}$$

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times g(x) = -(f \times g)(x) \quad \text{د) نادرست فرد}$$

$$\text{الف) } g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = g(x) \Rightarrow \text{زوج} \quad -\text{ع}$$

$$\text{ب) } h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{(f(x) - f(-x))}{2} = -h(x) \Rightarrow \text{فرد}$$

$$\text{ج) } f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = g(x) + h(x)$$

$$\text{د) } f(x) = (2x^3) + (-1 \cdot x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5) = (h(x)) + (g(x)) \Rightarrow \text{فرد } h \text{ و زوج } g$$

۵- $f(-x) = f(x)$ فرد و $f(-x) = -f(x)$ زوج

$f(x) = -f(-x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

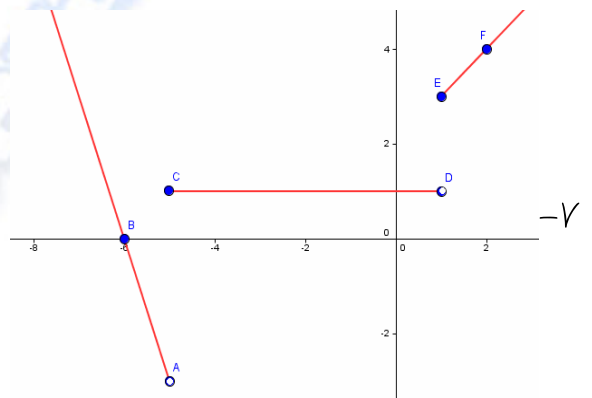
پس تابع ثابت $f(x) = 0$ با دامنه دلخواه متقارن هم زوج و هم فرد است.

چون دامنه دلخواه و متقارن است پس بیشمار تابع ثابت صفر موجود است که هم زوج و هم فرد باشد.

۶- $B(-a, -b) \Rightarrow$ فرد و $B(-a, b) \Rightarrow$ زوج ب) $B(7, -2) \Rightarrow$ فرد و $B(7, 2) \Rightarrow$ زوج الف)

ج) $B(-5, -3) \Rightarrow$ فرد و $B(-5, 3) \Rightarrow$ زوج د) $B(\frac{2}{7}, 7) \Rightarrow$ فرد و $B(\frac{2}{7}, -7) \Rightarrow$ زوج

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 18 & x < -5 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -5 & -6 \\ \hline y & -3 & 0 \end{array} \\ 1 & -5 \leq x < 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -5 & 1 \\ \hline y & 1 & 1 \end{array} \\ x + 2 & x \geq 1 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 4 \end{array} \end{cases}$$



در بازه $(-\infty, -5)$ اکیدا نزولی و در $[-5, 1)$ ثابت و در $[1, +\infty)$ اکیدا صعودی است.

دقت کنید: در بازه $[-5, +\infty)$ صعودی و بر $(-\infty, -5)$ نزولی است.

همچنین تابع بر $(-\infty, -\frac{17}{3}] \cup [-5, 1)$ هم نزولی است.

۸- در بازه های $(-\infty, -4]$ و $[4, +\infty)$ اکیدا نزولی، در بازه $[0, 4]$ ثابت و در $[-4, 0]$ اکیدا

صعودی است. رأس سهمی $(-4, -4)$ و با توجه به مثل برشورد با محور x ها $y = (x+4)^2 - 4$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 9 & x > 4 & \text{در بازه } [-4, 4] \text{ صعودی و در } [0, +\infty) \text{ نزولی} \\ 3 & 0 < x \leq 4 & \text{در } (-\infty, -4] \text{ نزولی و همچنین} \\ \frac{3}{2}x + 3 & -2 < x \leq 0 & \text{بر } (-\infty, -4 - \sqrt{7}] \cup [0, +\infty) \text{ نزولی است.} \\ (x+4)^2 - 4 & x \leq -2 \end{cases}$$

الف) $D_f = [2, +\infty)$, if $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$ -۹

$$\Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} < \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \text{تابع } f \text{ اکیدا صعودی (صعودی)}$$

ب) $D_f = R - \{0\}$, if $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ (نزولی) اکیدا نزولی}$$

ج) $f(x) = \begin{cases} -x + 2 + 5 = -x + 7 & x \geq 2 \\ x - 2 + 5 = x + 3 & x < 2 \end{cases}$

برای $x \leq 2$ تابع اکیدا صعودی (صعودی) $\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow x_1 < x_2 < 2$

برای $x \geq 2$ تابع اکیدا نزولی (نزولی) زیرا

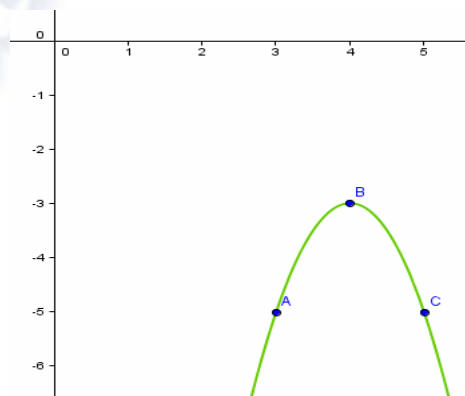
if $2 < x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 + 7 > -x_2 + 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

$$y = -2(x^2 - 8x + 16) + 32 - 35 =$$

$$-2(x-4)^2 - 3 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & -5 & -3 & -5 \end{array}$$

تابع f در بازه $(-\infty, 4]$ اکیدا صعودی (صعودی)

در بازه $[4, +\infty)$ اکیدا نزولی (نزولی) است.



-۱۰

الف) $D_f = (-\infty, 6]$, $R_f = [-3, +\infty)$ -۱۱

ب) $f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \frac{24}{5})$, $f(x) < 0 \Rightarrow x \in (\frac{24}{5}, 6)$

توضیح: معادله خط گذرنده بر نقاط $(4, 2)$ و $(6, -3)$ برابر $y = -\frac{5}{2}x + 12$ بوده و مثل

برفورد آن با محور x ها نقطه $(\frac{24}{5}, 0)$ است.

ج) f بر $(-\infty, 1]$ نزولی، بر $[4, 6]$ نزولی، بر $[\frac{22}{5}, 6]$ \cup $(-\infty, 1]$ نزولی و بر $[1, 4]$ صعودی

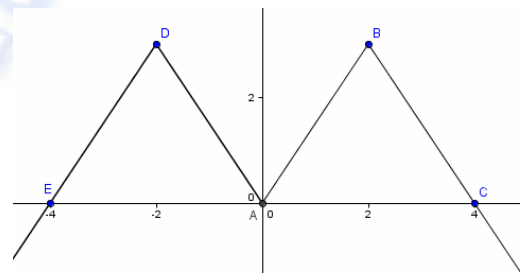
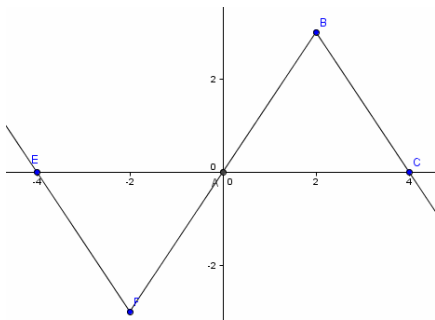
بر $[5, 6]$ هم صعودی و هم نزولی است.

نکته: اگر در بازه ای اکیدا صعودی باشد صعودی هم هست ولی عکس آن همواره درست نیست.

ادامه سوال ۱۱ قسمت (د)

$$د) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+1} & x \leq 1 \Leftrightarrow y = \sqrt{ax+b}, (0,1), (1,0) \in f \\ \frac{2}{3}(x-1) & 1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow y = ax+b, (1,0), (4,2) \in f \\ -5x+22 & 4 < x \leq 5 \Leftrightarrow y = ax+b, (4,2), (5,-3) \in f \\ -3 & 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

$$ه) f(-4) = \sqrt{-(-4)+1} = \sqrt{5}, f(5/3) = -3, f(\frac{7}{2}) = \frac{2}{3}(\frac{7}{2}-1) = \frac{5}{3}$$

۱۲- الف) قرینه نمودار نسبت به محور x ها (ب) قرینه نمودار نسبت به مبدأ، اضافه کنید.۱۳- برای برقراری تساوی $f(-x) = -f(x)$ باید $a = \pm \frac{1}{2}$ زیرا

$$f(-x) = \log(-x + \sqrt{(-x)^2 + 4a^2}) = \log(-x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$$

$$= \log\left(\frac{(-x)^2 - (\sqrt{x^2 + 4a^2})^2}{-x - \sqrt{x^2 + 4a^2}}\right) = \log\left(\frac{x^2 - x^2 - 4a^2}{-(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})}\right) = \log\left(\frac{4a^2}{x + \sqrt{x^2 + 4a^2}}\right)$$

$$= -\log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 4a^2}}{4a^2}\right), \quad -f(x) = -\log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$$

۱۴- f زوج $\Rightarrow f(-2) = f(2) = 5, f(-1) = f(1) = 4$ و متقارن $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و متقارن $D_g = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ و $g(-2) = 1 = -g(2), g(-1) = 2 = -g(1), g(0) = 0 = -g(0)$ بنابراین g فرد است. (تذکره: برای f داریم $f(0) = f(-0) = 3$)

$$f(x) = \frac{1}{x} + 2, x \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-2}, x-2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$x \in D_g \Rightarrow x \neq 2, f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-2}} + 2 = x - 2 + 2 = x \quad -1$$

$$x \in D_f \Rightarrow x \neq 0, g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x} + 2\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 2 - 2} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

-۲ در ربع اول چون f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y = x$ است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow |x_1 - 2| + 3 = |x_2 - 2| + 3 \Rightarrow |x_1 - 2| = |x_2 - 2| \quad -۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \text{or} \\ x_1 - 2 = -x_2 + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{یعنی لزوماً } x_1, x_2 \text{ مساوی نیستند.}$$

برای یک به یک شدن کافیت دامنه را مرور به $x > 2$ یا $x < 2$ یا $x \leq 2$ یا $x \geq 2$ کرد.
مثلا برای $x > 2$ داریم $x > 2 \Rightarrow y = |x - 2| + 3 = x - 2 + 3 = x + 1$ که $1 - 1$ است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 - 5}{2x_1 + 3} = \frac{x_2 - 5}{2x_2 + 3} \quad -۴ \quad f \text{ تابعی } 1-1 \text{ است زیرا}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 + 3x_1 - 1 \cdot x_2 - 15 = 2x_1x_2 - 1 \cdot x_1 + 3x_2 - 15 \Rightarrow 13x_1 = 13x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{x-5}{2x+3} \Rightarrow 2xy + 3y = x-5 \Rightarrow x-2xy = 3y+5 \Rightarrow x(1-2y) = 3y+5$$

$$\Rightarrow x = \frac{3y+5}{1-2y} \xrightarrow{x \rightarrow y} f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{1-2x}, D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = R_f$$

$$R_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\} = D_f$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(\sqrt[3]{x+5}) = (\sqrt[3]{x+5})^3 - 5 = x$$

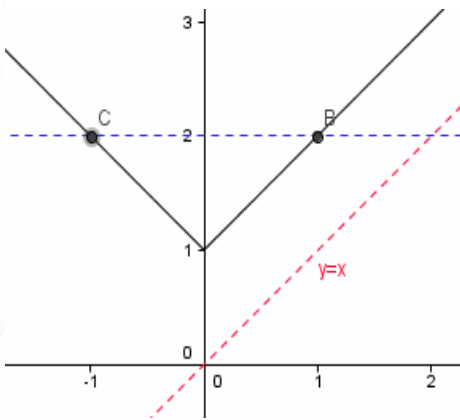
الف) -۵

$$, x \in \mathbb{R} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(x^3 - 5) = \sqrt[3]{x^3 - 5 + 5} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

ب) $f(x) = \sqrt{x-2}, g(x) = x^2 + 2, D_f = [2, +\infty), D_g = [0, +\infty)$

$$x \in [2, +\infty) \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$x \in [0, +\infty) \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = \sqrt{x^2} = x \quad (x \geq 0 \text{ فرض})$$



۶- $f(x) = |x| + 1$ با توجه به نمودار تابع f یک به یک نیست و نمودار f بالای $y = x$ است. پس

اولا f وارون پذیر نیست و $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < f(x)$

$$f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \geq -5 \Rightarrow (x_1 + 5)^2 = (x_2 + 5)^2$$

$$\frac{x_1 + 5 \geq 0}{x_2 + 5 \geq 0} \rightarrow x_1 + 5 = x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$$

الف) -۷

$$y = (x + 5)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = x + 5 \Rightarrow x = \sqrt{y} - 5$$

$$\frac{x \leftrightarrow y}{\rightarrow} y = \sqrt{x} - 5 = f^{-1}(x), x \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 1 \Rightarrow x_1 - 1 \geq 0, x_2 - 1 \geq 0 \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -|x_1 - 1| + 1 = -|x_2 - 1| + 1$$

$$\Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

ب) $y = -|x - 1| + 1, x > 1 \Rightarrow y = -x + 1 + 1 = -x + 2 \Rightarrow x = -y + 2$

$$\frac{x \leftrightarrow y}{\rightarrow} y = f^{-1}(x) = -x + 2, x \leq 1$$

ج) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 3)^2 = (x_2 - 3)^2 \Rightarrow x_1 - 3 = \pm(x_2 - 3) \not\Rightarrow x_1 = x_2$
 ۱-۱ نیست پس وارون پذیر نیست. مثال نقض: $(4, 1), (2, 1) \in f$

$$x_1, x_2 \geq -2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1 + 2} - 3 = \sqrt{x_2 + 2} - 3$$

$$\Rightarrow x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

د) $y = \sqrt{x + 2} - 3 \Rightarrow \sqrt{x + 2} = y + 3 \Rightarrow x + 2 = (y + 3)^2 \Rightarrow$
 $x = (y + 3)^2 - 2 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = f^{-1}(x) = (x + 3)^2 - 2, x \geq -3$

$$y = \frac{3x - 2}{5x - 3} \Rightarrow 5xy - 3y = 3x - 2 \Rightarrow 5xy - 3x = 3y - 2$$

(روش ۱)

$$\Rightarrow x(5y - 3) = 3y - 2 \Rightarrow x = \frac{3y - 2}{5y - 3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = f^{-1}(x) = \frac{3x - 2}{5x - 3} \quad -۸$$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{5} \right\}, (f \circ f)(x) = f\left(\frac{3x - 2}{5x - 3}\right) = \frac{3\left(\frac{3x - 2}{5x - 3}\right) - 2}{5\left(\frac{3x - 2}{5x - 3}\right) - 3} =$$

(روش ۲)

$$\frac{9x - 6 - 10x + 6}{15x - 10 - 15x + 9} = \frac{-x}{-1} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Rightarrow (f \circ f)(x) = f(ax + b) = a(ax + b) + b$$

$$= a^2x + ab + b = x \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ ab + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } a = +1 \Rightarrow b + b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow y = x \\ \text{if } a = -1 \Rightarrow -b + b = 0 \Rightarrow y = -x + b \end{cases} \quad -۹$$

۱۰- $f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ بنا بر این f یک به یک نبوده و در نتیجه وارون پذیر نیست.

$$(f \circ g)(x) = f(3x - 7) = 3x - 7 + 3 = 3x - 4 \Rightarrow y = 3x - 4 \Rightarrow x = \frac{y + 4}{3}$$

$$\frac{x \leftrightarrow y}{(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x + 4}{3}}$$

$$\left. \begin{aligned} g(x) = 3x - 7 \Rightarrow y = 3x - 7 \Rightarrow x = \frac{y + 7}{3} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} g^{-1}(x) = \frac{x + 7}{3} \\ f(x) = x + 3 \Rightarrow x = y - 3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f^{-1}(x) = x - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad -11$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(x - 3) = \frac{x - 3 + 7}{3} = \frac{x + 4}{3}$$

$$. \leq 100 - \frac{49}{10} t^2 \leq 100 \Rightarrow \frac{49}{10} t^2 \leq 100 \Rightarrow t^2 \leq \frac{1000}{49}$$

(الف)

$$\Rightarrow -\frac{10\sqrt{10}}{7} \leq t \leq \frac{10\sqrt{10}}{7} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{10\sqrt{10}}{7} \Rightarrow D_h = [0, \frac{10\sqrt{10}}{7}] , R_h = [0, 100] \quad -12$$

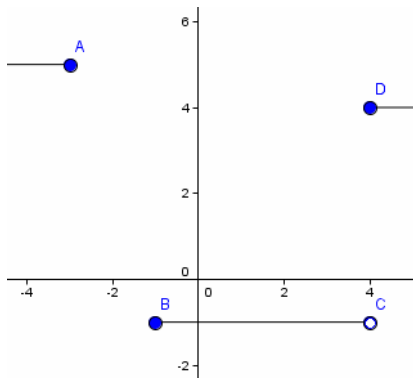
(ب) در دو زمان متفاوت در یک ارتفاع قرار نمی گیرد.

$$y = 100 - \frac{49}{10} t^2 \Rightarrow \frac{49}{10} t^2 = 100 - y \Rightarrow t^2 = \frac{10}{49} (100 - y)$$

(ج)

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{10}{49} (100 - y)} \xrightarrow{t \leftrightarrow y} y = h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{10}{49} (100 - t)} , t \in [0, 100]$$

(د) زمانی که سنگ در یک ارتفاع خاص قرار دارد، مشخص می کند (به ازای زمان ارتفاع سنگ را می دهد)

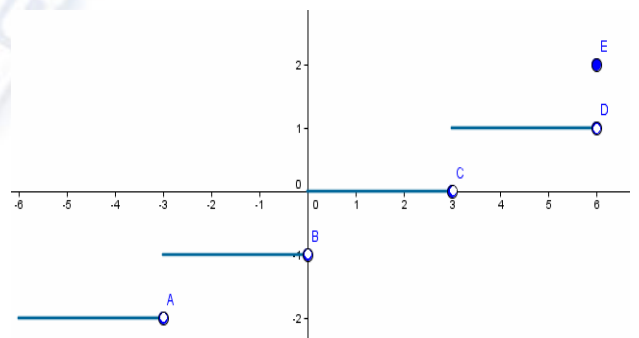


-۱

$$x \in [-6, 6] \Rightarrow \frac{1}{3}x \in [-2, 2]$$

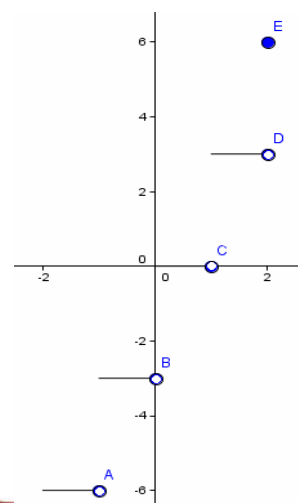
-۲

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \leq \frac{1}{3}x < -1 \Rightarrow -6 \leq x < -3 \Rightarrow y = -2 \\ -1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow -3 \leq x < 0 \Rightarrow y = -1 \\ 0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < 3 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \leq \frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow 3 \leq x < 6 \Rightarrow y = 2 \\ \frac{1}{3}x = 2 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow y = 2 \end{array} \right.$$



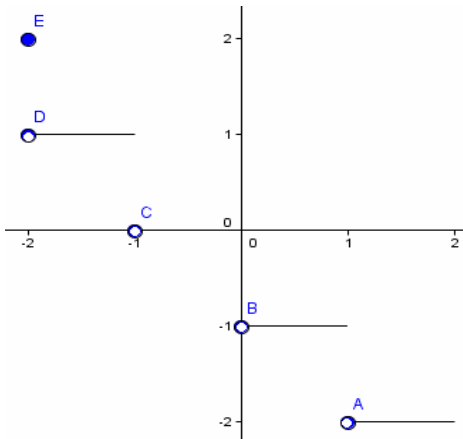
$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left[\frac{1}{5}\right] = 0, f\left(\frac{2}{5}\right) = \left[\frac{2}{5}\right] = 0, \frac{1}{5} \neq \frac{2}{5} \Rightarrow f \text{ یک به یک نیست پس وارون پذیر نیست}$$

$$\text{الف) } y = 3[x] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y = -6 \\ -1 \leq x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y = -3 \\ 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = 3 \\ x = 2 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = 6 \end{array} \right.$$



-۴

$$b) y = [-x] \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq -x < -1 \Rightarrow 1 < x \leq 2 \Rightarrow [-x] = -2 \Rightarrow y = -2 \\ -1 \leq -x < 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1 \Rightarrow [-x] = -1 \Rightarrow y = -1 \\ 0 \leq -x < 1 \Rightarrow -1 < x \leq 0 \Rightarrow [-x] = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 1 \leq -x < 2 \Rightarrow -2 < x \leq -1 \Rightarrow [-x] = 1 \Rightarrow y = 1 \\ -x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow [-x] = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

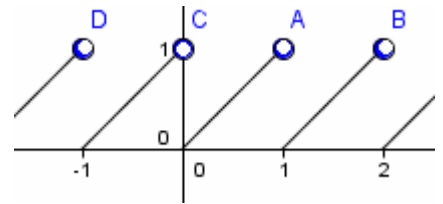


۵- کمترین مقدار مثبت برای T با توجه به برقراری $T \in \mathbb{Z}, f(x+T) = x+T - [x+T] = x+T - [x] - T = x - [x] = f(x) \Rightarrow$ تساوی برای اعداد صحیح برابر $T = 1$ است.

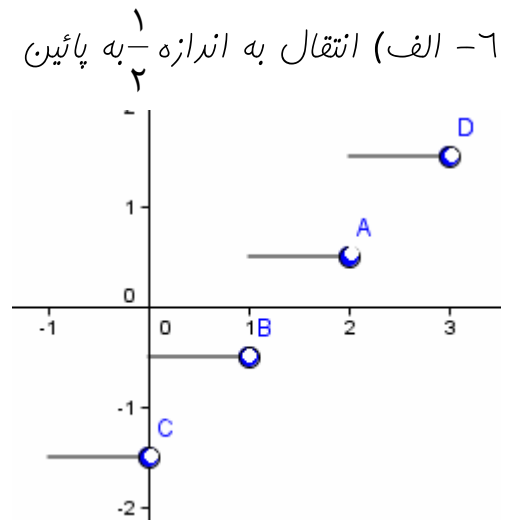
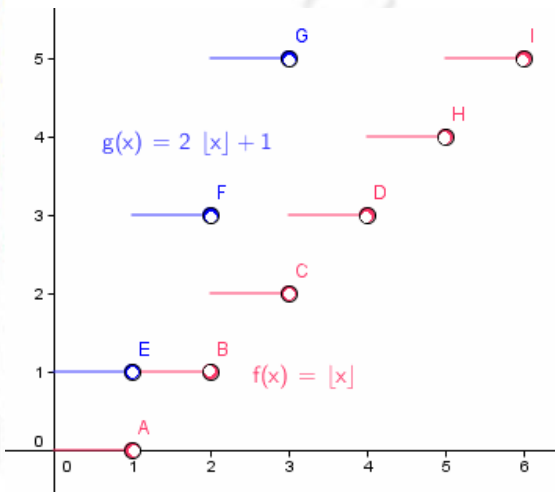
نمودار تابع را در فاصله ای به طول دوره تناوب رسم می کنیم.

$$T = 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x - [x] = x - 0$$

$$\Rightarrow y = x \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 0 \quad 1 \\ \hline y & 0 \quad 1 \end{array}$$

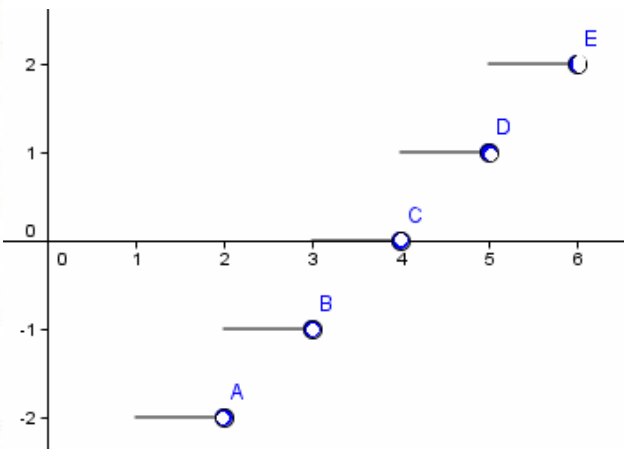


۶- الف) انتقال به اندازه $\frac{1}{2}$ به پائین ب) انبساط با ضریب ۲ در امتداد محور y هاو انتقال یک واحد به بالا



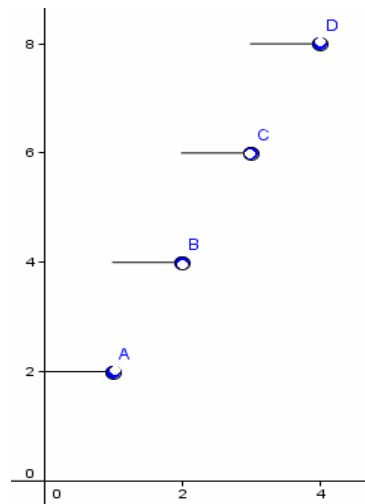
۷- این دو تابع برابرند.

$$y = [x - 3] \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq x - 3 < -1 \Rightarrow [x - 3] = -2 \Rightarrow y = -2 \quad (1 \leq x < 2) \\ -1 \leq x - 3 < 0 \Rightarrow [x - 3] = -1 \Rightarrow y = -1 \quad (2 \leq x < 3) \\ 0 \leq x - 3 < 1 \Rightarrow [x - 3] = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (3 \leq x < 4) \\ 1 \leq x - 3 < 2 \Rightarrow [x - 3] = 1 \Rightarrow y = 1 \quad (4 \leq x < 5) \\ 2 \leq x - 3 < 3 \Rightarrow [x - 3] = 2 \Rightarrow y = 2 \quad (5 \leq x < 6) \end{cases}$$



$$y = [x] - 3 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = -2 \\ 2 \leq x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y = -1 \\ 3 \leq x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow y = 0 \\ 4 \leq x < 5 \Rightarrow [x] = 4 \Rightarrow y = 1 \\ 5 \leq x < 6 \Rightarrow [x] = 5 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < 2 \\ 6 & 2 \leq x < 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2[x] + 2$$



-۸

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \quad -1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5} \text{ (در ربع اول } \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5}, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{4}$$

$$\cos \beta = -\frac{5}{13}, \sin^2 \beta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{12}{13} \text{ (در ربع سوم } \beta) \Rightarrow \sin \beta = -\frac{12}{13}, \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{12}{13} \div -\frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \left(\frac{4}{5} \times -\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{3}{5} \times -\frac{12}{13}\right) = -\frac{56}{65}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \left(\frac{3}{5} \times -\frac{5}{13}\right) + \left(\frac{4}{5} \times -\frac{12}{13}\right) = -\frac{63}{65}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{12}{5}} = \frac{\frac{63}{20}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{63}{16}$$

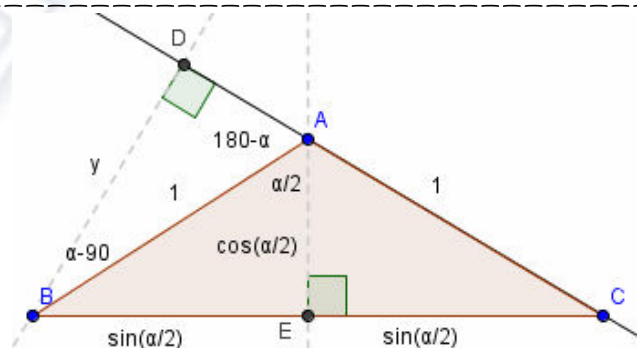
$$\cos(\alpha - 90^\circ) = \frac{y}{1} = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \quad -2$$

$$S_1 = \frac{1 \times y}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

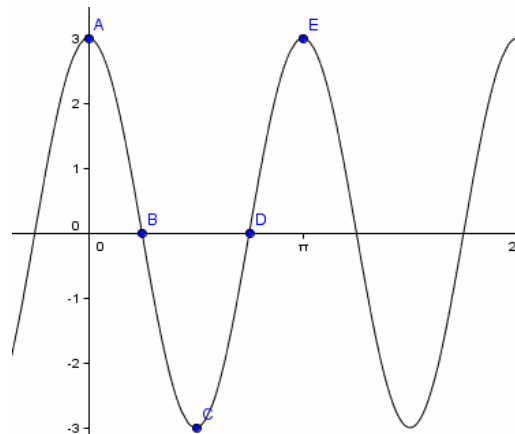
برای S_1 قاعده AC و برای S_2 قاعده BC فرض نموده ایم.



$$y = 3 - 6 \sin^2 x = 3 - 6 \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)$$

$$= 3 - 3 + 3 \cos 2x = 3 \cos 2x$$

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{4} \\ \hline y & 3 & 0 & -3 \end{array} \quad \pi$$



$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \sin \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

-۴

$$\tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \alpha} \Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

-۵

$$\sin \alpha = -\frac{12}{13}, \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13} \quad (\alpha \text{ در ربع سوم})$$

-۶

چون $\frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$ پس $\frac{\alpha}{2}$ در ربع دوم است.

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{13}} \quad (\frac{\alpha}{2} \text{ در ربع دوم})$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{4}{13}} \quad (\frac{\alpha}{2} \text{ در ربع دوم}) \Rightarrow \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) =$$

الف)

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x\right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\sin x + \cos x) = \sin x + \cos x$$

-۷

$$\text{ب) } (\sin x \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + \sin 2x$$

$$\text{ج) } \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos x \times (1)} = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$\text{د) } \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1} = \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 2 \cos^2(2x) - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ \text{ه) } &= 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \end{aligned}$$

ادامه سوال ۷

۱- پاره فطی دلفواه رسم و از نقطه دلفواه بر آن عمودی به طول ۱ رسمو انتهای عمود را A می نامیم. از A به زاویه $90 - \alpha, 90 - \beta$ نسبت به پاره فط AH رسم تا پاره فط اولیه را در B, C قطع کند. برای مسابسه S_1 قاعده را BC و برای مسابسه S_2 قاعده را AC فرض نموده ایم. با توجه به تعریف نسبتهای مثلثاتی

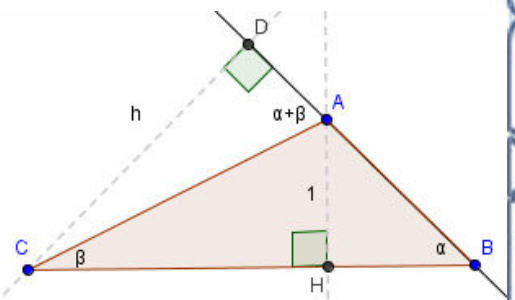
$$CH = \frac{1}{\tan \beta}, \quad BH = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$AC = \frac{1}{\sin \beta}, \quad AB = \frac{1}{\sin \alpha} \Rightarrow h = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \beta} + \frac{1}{\tan \alpha} \right) (1) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \beta \cdot \sin \alpha} \right)$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} \right) \left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} \right)$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow \text{مکمل}$$



۹- با توجه به تعریف نسبتها و قانون سینوسها داریم،

$$AB = \cos \beta = b \cos \alpha$$

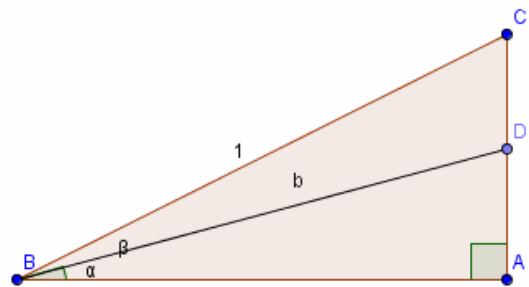
$$AC = \sin \beta, \quad AD = b \sin \alpha$$

$$\frac{\sin(90 + \alpha)}{1} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{x} \Rightarrow x = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$S_{BCD} = S_{ABC} - S_{BDA}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos \alpha} \right) (b \cos \alpha) = \frac{1}{2} (\sin \beta) (b \cos \alpha) - \frac{1}{2} (b \sin \alpha) (\cos \beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \beta$$



$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{الف)} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{or} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \quad -1$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\}$

$$2 \sin \theta \cdot \cos \theta + \sqrt{2} \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta (2 \sin \theta + \sqrt{2}) = 0$$

$$\text{ب)} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \theta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \text{or} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \theta = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \text{or} \\ \theta = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

$$\text{ج)} \quad \tan x \cdot \tan 2x = 1 \Rightarrow \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{\cos x \cdot \cos 2x} = 1 \Rightarrow \cos x \cdot \cos 2x - \sin x \cdot \sin 2x = 0$$

$$\Rightarrow \cos(2x + x) = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6}$$

البته باید توجه داشت که جوابهای مفرج را از جوابهای به دست آمده حذف کنیم یعنی

$$\text{مجموعه جواب} = \left\{ \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} - \left\{ 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k\pi \pm \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$ که اعداد

چون مفرج را صفر می‌کردند از جوابها حذف شدند. $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

$$د) \Delta = ۲^۲ - ۴(۲(-۱)) = ۱۲ > ۰ \Rightarrow \sin t = \frac{-۲ \pm \sqrt{۱۲}}{۴} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۳}}{۲}$$

اکنون می توان دو راه رفت، اول) با ماشین حساب t ، ایباییم که

$$\begin{cases} \sin t = \frac{-۱ - \sqrt{۳}}{۲} < -۱ \Rightarrow t \in \emptyset \\ \text{or} \\ \sin t = \frac{-۱ + \sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow t \approx ۳۷^\circ \Rightarrow t \approx ۲k\pi + \frac{۳۷\pi}{۱۸۰} \text{ or } t \approx ۲k\pi + \pi - \frac{۳۷\pi}{۱۸۰} \end{cases}$$

روش دوم)

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{-۱ + \sqrt{۳}}{۲}\right) \Rightarrow t = ۲k\pi + \sin^{-1}\left(\frac{-۱ + \sqrt{۳}}{۲}\right) \text{ or } t = ۲k\pi + \pi - \sin^{-1}\left(\frac{-۱ + \sqrt{۳}}{۲}\right)$$

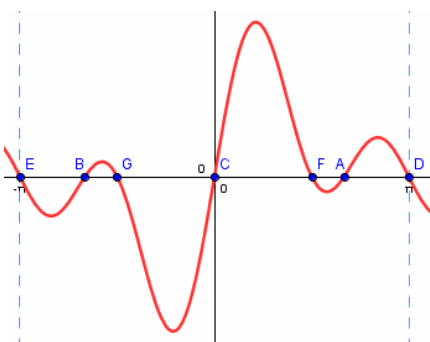
$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

$$ه) \Rightarrow \cos x (۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ \text{or} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\left\{-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}\right\}$

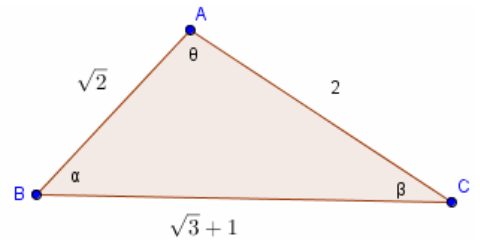
$$\sin x + \sin ۳x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲\sin ۲x \cdot \cos x + \sin ۲x = ۰ \Rightarrow$$

$$و) \sin ۲x (۲\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ \text{or} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$



جوابهای در بازه $[-\pi, \pi]$ عبارتند از $\left\{۰, -\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}, -\pi, \pi, -\frac{۲\pi}{۳}, \frac{۲\pi}{۳}\right\}$

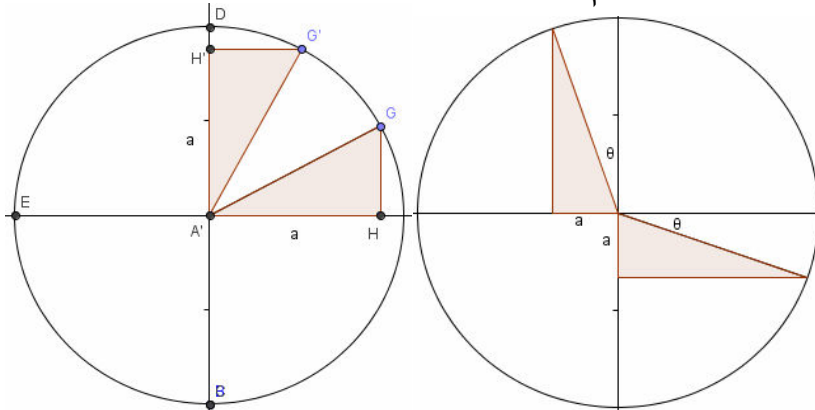
$$\begin{aligned}
 (2)^2 &= (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2(\sqrt{2})(1 + \sqrt{3}) \cos \alpha \\
 \Rightarrow 4 &= 2 + 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \cos \alpha \\
 \Rightarrow \cos \alpha &= \frac{2(1 + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2})^2 &= 2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - 2(2)(1 + \sqrt{3}) \cos \beta & -2 \\
 \Rightarrow 2 &= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 4(1 + \sqrt{3}) \cos \beta \\
 \Rightarrow \cos \beta &= \frac{-2(3 + \sqrt{3})}{-4(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 \Rightarrow \beta &= 30^\circ \Rightarrow \theta = 180 - (30 + 45) = 105^\circ
 \end{aligned}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \cos^{-1} a = \theta, \sin^{-1} a = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \cos^{-1} a + \sin^{-1} a = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} \quad -1$$

$$-1 < a < 0 \Rightarrow \sin^{-1} a = -\theta, \cos^{-1} a = \frac{\pi}{2} + \theta \Rightarrow \sin^{-1} a + \cos^{-1} a = -\theta + \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{\pi}{2}$$

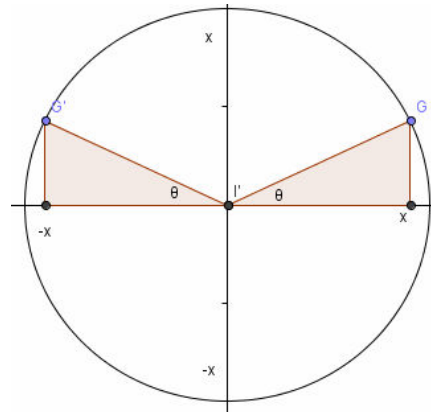
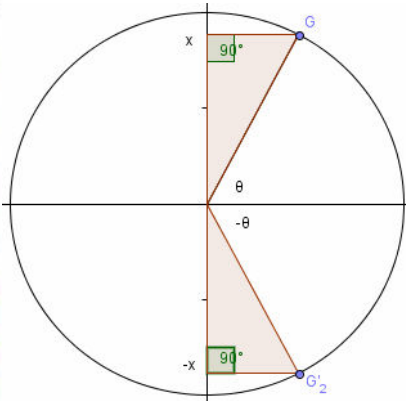


۲- دومیث به حالت وتر و یک ضلع همنهشتند پس اگر

$$\sin^{-1}(x) = \theta \Rightarrow \sin^{-1}(-x) = -\theta \Rightarrow \sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$$

دومیث به حالت وتر و یک زاویه همنهشتند پس اگر

$$\cos^{-1}(x) = \theta \Rightarrow \cos^{-1}(-x) = \pi - \theta \Rightarrow \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$$

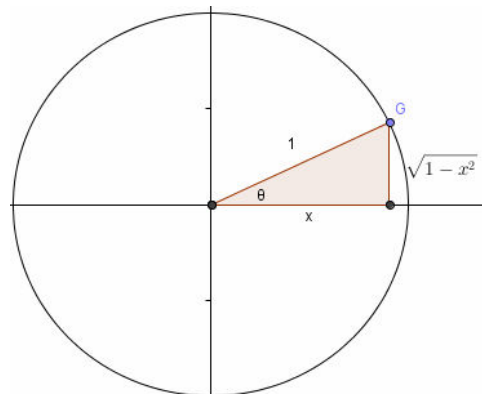


$$\cos \theta = x \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\sin \theta = x \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$



۳-

$$\tan^{-1} x = \theta \Rightarrow \tan \theta = x, \sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \Rightarrow \sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \quad -۴$$

$$\cos(\tan^{-1} x) = \sqrt{1 - \sin^2(\tan^{-1} x)} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

۵- می دانیم برای تابع $y = \sin^{-1} x$ دامنه برابر $[-1, 1]$ است (دامنه متقارن) و طبق مسئله ۲ داریم

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x) \text{ بنابراین تابع معکوس سینوس، فرد است.}$$

همچنین $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ پس $y = \cos^{-1}(x)$ نه زوج و نه فرد است.

و نیز برای $y = \tan^{-1}(x)$ دامنه برابر $(-\infty, +\infty)$ است (دامنه متقارن) و

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}(x) \text{ بنابراین تابع معکوس تانژانت، فرد است.}$$

$$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} \cdot < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2} \\ \cdot < \tan^{-1} \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \cdot < \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} < \pi \quad -۶$$

$$\cos(\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}) = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos(\tan^{-1} x) \cdot \cos(\tan^{-1} \frac{1}{x}) - \sin(\tan^{-1} x) \cdot \sin(\tan^{-1} \frac{1}{x}) = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}\right) - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}}\right)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = 0 = \cos \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

الف)
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -0.1 & -0.01 & -0.001 & \cdot & 0.001 & 0.01 & 0.1 \\ y & -1/1 & -1/10 & -1/100 & ? & -0.999 & -0.99 & -0.9 \end{array}$$

-۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = -1$$

ب)
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -1/1 & -1/10 & -1/100 & -1 & -0.999 & -0.99 & -0.9 \\ y & 2/21 & 2/20 & 2/100 & ? & 2/0.29 & 2/0.29 & 2/271 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} y = 2$$

ج)
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & 1/9 & 1/99 & 1/999 & 2 & 2/0.1 & 2/0.1 & 2/1 \\ y & 1/9 & 1/99 & 1/999 & ? & 4/0.2 & 4/0.2 & 4/1 \end{array}$$

در چپ و راست نابرابر پس تابع در $x = 2$ دارای حد نیست $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} y = 2$

د)
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -0.1 & -0.01 & -0.001 & \cdot & 0.001 & 0.01 & 0.1 \\ y & 0.9994 & 0.9999 & 0.99999 & ? & 0.999999 & 0.99999 & 0.9994 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = 1$$

ه)
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & 0.9 & 0.99 & 0.999 & 1 & 1/0.1 & 1/0.1 & 1/1 \\ y & -1/57 & -4/99 & -15/81 & ? & 15/81 & 4/99 & 1/57 \end{array}$$

تابع در $x = 1$ ندارد $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$

و)
$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -0.1 & -0.01 & -0.001 & \cdot & 0.001 & 0.01 & 0.1 \\ y & 0.499 & 0.49999 & 0.499999 & ? & 0.4999999 & 0.499999 & 0.499 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0.5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = 0.5$$

الف) $y = [x], a = 1/2 \Rightarrow y = \begin{cases} \dots & \dots \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ \dots & \dots \end{cases}$ -۲

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1/2^+} y = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} y = 0, \lim_{x \rightarrow 1/2^+} y = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} y = 1$

ب) $a = 2, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 1/5 & 2 \\ \hline y & 2 & 3/25 & 5 \end{array}$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y = 5, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} y = 5$

ج) $a = 2, y = x - [x] = \begin{cases} \dots & \dots \\ x - 1 & 1 \leq x < 2 \\ x - 2 & 2 \leq x < 3 \\ \dots & \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$

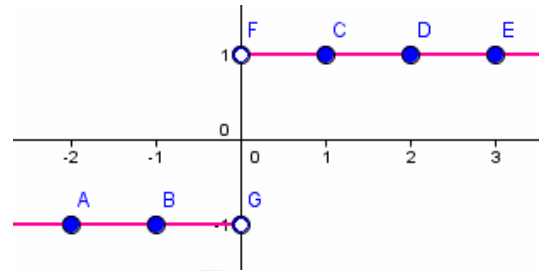
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y = 0, \lim_{x \rightarrow 2^-} y = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} y$ وجود ندارد

د) $a = -3, y = 1 - \sqrt{1-x}$

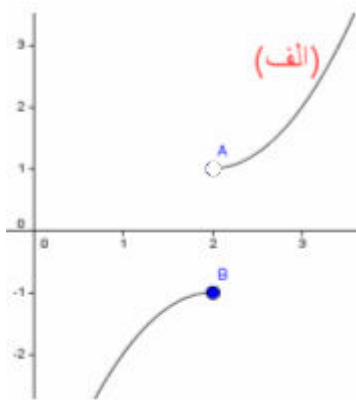
$\Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & -3 & 0 \\ \hline y & -2 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} y = -1$

$$ه) \quad a=0, \quad y = \frac{x}{|x|}, \quad \begin{array}{c|c} x & -2 \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \hline y & -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} y = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y \text{ ندارد}$$

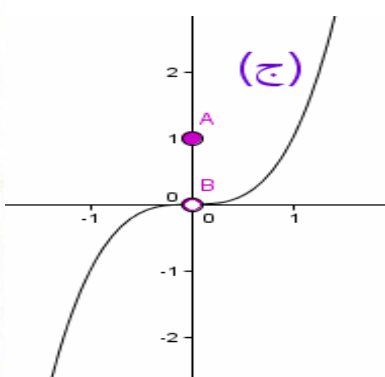
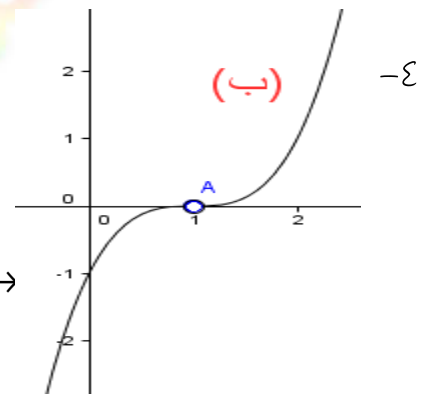


۳- وقتی مقدار x در آن همسایگی به a نزدیک می شود مقدار y برای هر دو تابع f, g یکسان است. یعنی اگر مقدار $f(x)$ به عددی نزدیک شود معادل آن یعنی $g(x)$ هم به همان عدد نزدیک میشود.



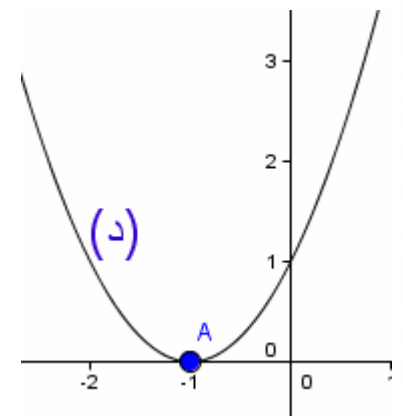
$$\leftarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -1$$

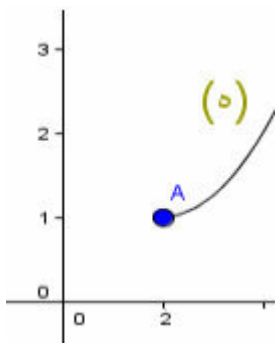
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} y = 0, \quad 1 \notin D_f \rightarrow$$



$$\leftarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0, \quad f(0) = 1$$

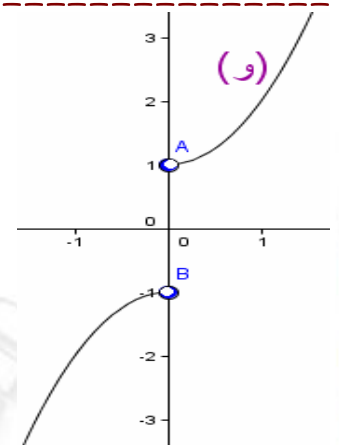
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} y = 0 = f(-1) \rightarrow$$



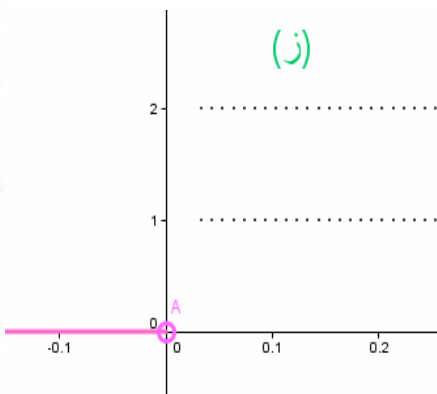


وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 2^-} y$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = 1$ ←

→ $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = -1$, $0 \notin D_f$

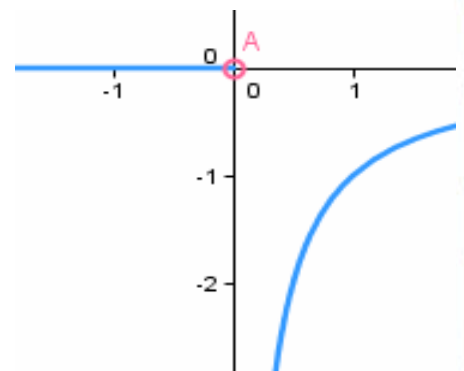


تابع در $x = 0$ دارای حد چپ برابر صفر است ولی از راست چون اعداد گویا و گنگ در بین هم پراکنده اند ، مقدار تابع دو مقدار ۱ ، ۲ اختیار میکنند و به هیچکدام نزدیک نمی شود.



$$f(x) = y = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0, x \in Q \\ 2 & x > 0, x \notin Q \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

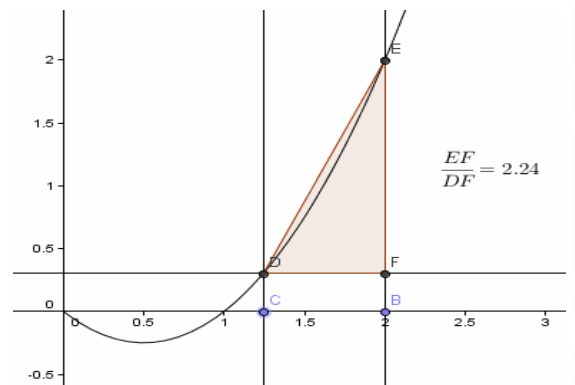


$$x(t) = t^2 - t, t \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{array}$$

-۵

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\frac{x(2/1) - x(2)}{2/1 - 2}$	$\frac{x(2/0.1) - x(2)}{2/0.1 - 2}$	$\frac{x(2/0.01) - x(2)}{2/0.01 - 2}$
answer	۳/۱	۳/۰.۱	۳/۰.۰۱

سرعت متوسط در نزدیکی $t = 2$ به عدد ۳ نزدیک می شود یعنی سرعت لحظه ای در لحظه $t = 2$ برابر ۳ است.



۶- شیب مماس هر میزان تغییرات y به میزان تغییرات x در همسایگی نقطه مورد نظر است.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$\frac{f(1/1)-f(1)}{1/1-1}$	$\frac{f(1/0.1)-f(1)}{1/0.1-1}$	$\frac{f(1/0.01)-f(1)}{1/0.01-1}$
answer	$1/2$	$1/0.2$	$1/0.02$

این میزان به عدد ۱ نزدیک می شود پس شیب در $(-1, +1)$ برابر ۱ است.

$$\text{معادله مماس } A = (1, -1), m = 1, y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 1 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 2$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) = \sqrt{4}+2=4 \quad -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = n - 1 + 1 = n$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1 + 1^2 = 2$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x-1} = \frac{1+1+2}{-1-1} = -2$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} = 0 \times \sin(1) = 0$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) = 2$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2(\frac{x}{2}))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(\frac{x}{2})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \cos \pi}}{\sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x} = -(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

ب)

۲- هنگامی که x به a نزدیک می شود اگر $f(x)$ به L نزدیک شود به معنای آنست که فاصله $f(x)$ تا L کم و کمتر شده و به صفر نزدیک می شود به عبارت دیگر مقدار $f(x) - L$ به صفر

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = 0 \quad \text{نزدیک می شود، یعنی}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - L = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0 \quad \text{به بیان ریاضی می توان نوشت}$$

۳- برای مقادیری از x که $f(x)$ مثبت است (قسمتی از نمودار که بالای محور x هاست) دو تابع $|f|$ ، f برابرند و برای مقادیری از x که $f(x)$ منفی است (زیر محور x ها) به جای آنکه تابع از مقادیر منفی به صفر نزدیک شود از مقادیر مثبت به صفر نزدیک می شود در هر حال 0 است.

۴- برهان خلف) اگر $f + g$ در $x = a$ دارای حد باشد چون f در $x = a$ حد دارد بنا بر قضایای حد $(f + g) - f = g$ هم در $x = a$ حد دارد که خلاف فرض است.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}, (f + g)(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = 0, x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} (f + g)(x) = 0$$

یا $h(x) = \frac{1}{x}$ ، $k(x) = -\frac{1}{x}$ هر دو در $x = 0$ حد ندارند ولی مجموع دو تابع یعنی

در $x = 0$ حد دارد $h(x) + k(x) = 0$

$$f(x) = |x|, g(x) = \frac{|x|}{x}, (f \cdot g)(x) = \frac{|x|^2}{x} = \frac{x^2}{x} = x, x \neq 0 \quad \text{مثال ۱) -۶}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ وجود ندارد}$$

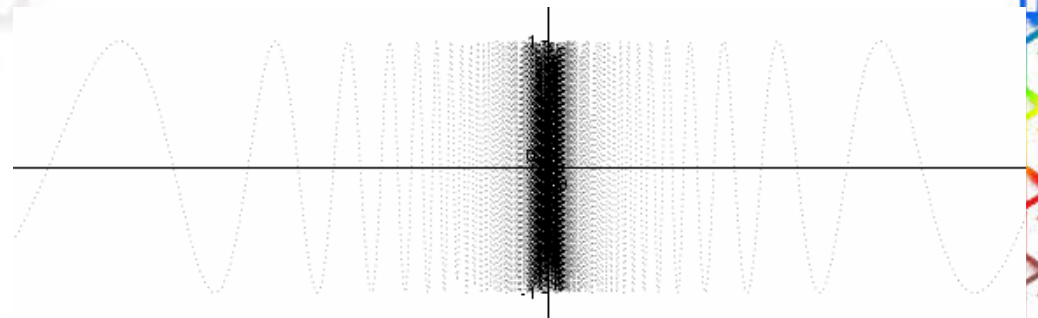
$$\lim_{x \rightarrow 0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

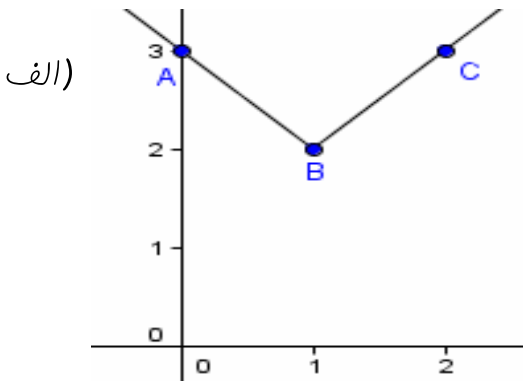
مثال ۲) یا $g(x) = \frac{1}{x}$ یا $f(x) = x$ که f در $x = 0$ حد دارد ولی g دارای حد نیست اما $f(x) \cdot g(x) = x \left(\frac{1}{x}\right) = 1$ در $x = 0$ دارای حدی برابر ۱ است.

۷- بلی در اطراف صفر تعریف شده است. غیر زیرا به ازای $x = \frac{1}{2k\pi}$ مقدار $\sin \frac{1}{x}$ برابر صفر و به ازای $x = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ مقدار $\sin \frac{1}{x}$ برابر ۱ می باشد و این دو عبارت را به ازای k مناسب به هر میزان دلفواه می توان به صفر نزدیک گرفت. بنابراین در همسایگی صفر به هیچ عدد ثابتی نزدیک نمی شود و حد ندارد.

$$|\sin \frac{1}{x}| \leq 1, |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \times |\sin \frac{1}{x}| \leq |x| \times 1 \Rightarrow |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|, \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

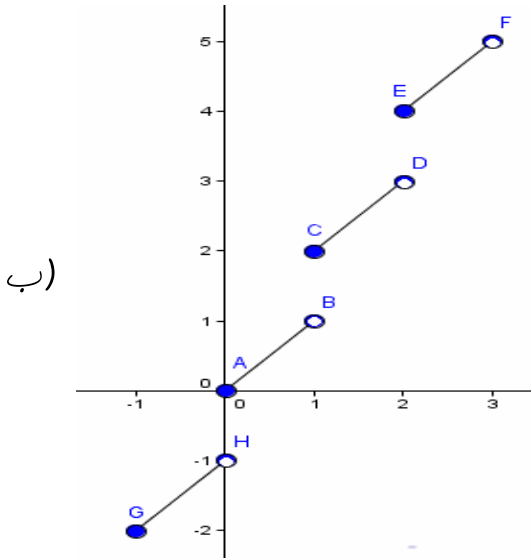
$$\text{پس طبق ق فشرده گی} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$





$$y = |x - 1| + 2 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 2 & 3 \end{array} \quad -1$$

تابع در تمام نقاط پیوسته است و ناپیوستگی ندارد.

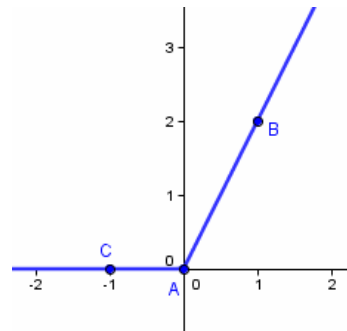


$$y = x + [x] = \begin{cases} \dots & \dots \\ x & 0 \leq x < 1, \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array} \\ x + 1 & 1 \leq x < 2, \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 3 \end{array} \\ x + 2 & 2 \leq x < 3, \quad \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline y & 4 & 5 \end{array} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

تابع در تمام نقاط $x = n \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است.

ج)

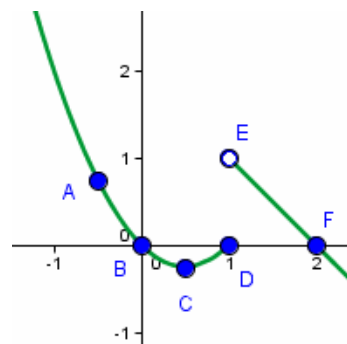
$$y = x + |x| = \begin{cases} 2x & x \geq 0, \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array} \\ x & x < 0, \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 0 \end{array} \end{cases}$$



تابع در تمام نقاط $x \in \mathbb{R}$ پیوسته است و ناپیوستگی ندارد.

د)

$$y = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1, \quad \begin{array}{c|ccc} x & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline y & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \end{array} \\ -x + 2 & x > 1, \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \end{cases}$$



ادامه سوال ۱ قسمت (د)

تابع در تمام نقاط به جز $x = 1$ پیوسته است.

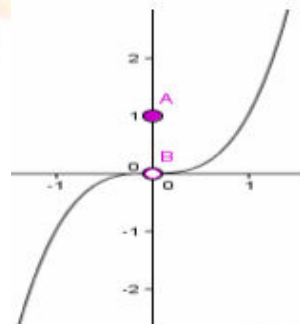
یادآوری: $x(x-1) = x^2 - x = x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ پس، رأس سهمی $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ است.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 2a = 1 - 2a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - ax + 1 = 1 - a + 1 = 2 - a \end{cases} \Rightarrow 1 - 2a = 2 - a \Rightarrow a = -1$$

۳- برای پیوستگی تساوی افیدر باید برقرار باشد که دستگاهی بدون جواب است. پس به ازای هیچ مقدار از a تابع در $x = 0$ پیوسته نیست.

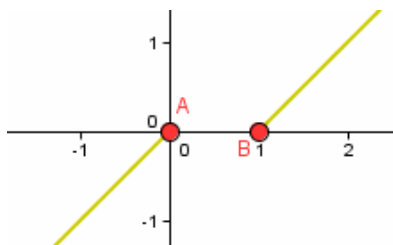
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a \end{cases} \Rightarrow a = -a = 1$$

$f(0) = 1$



۴- تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته نیست.

در دارد، ولی در این نقطه پیوسته نیست.



۵- تابع در $x = 0$ پیوسته است، در $x = 1$ پیوسته نیست.

در این نقاط ناپیوسته است.

۶- اگر دو تابع f, g در $x = a$ پیوسته باشند یعنی $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) \quad \text{آنگاه}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times g(x)$$

به همین روش

$$= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \times g(a) = (f \times g)(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \quad \text{آنگاه} \quad \text{ولی برای تقسیم اگر } g(x) \text{ در یک همسایگی } a \text{ غیر صفر باشد}$$

۷- اگر تابع f در $x = a$ پیوسته بوده و تابع g در $x = f(a)$ پیوسته باشد

$$\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a) \quad \text{آنگاه تابع } g \circ f \text{ در } x = a \text{ پیوسته است و}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0 = f'(a) \quad -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(3x + 5) - (3a + 5)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{3(x - a)}{x - a} = 3 = f'(a)$$

$$\begin{aligned} \text{ج) } \lim_{t \rightarrow a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a} &= \lim_{t \rightarrow a} \frac{t^4 - a^4}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{(t - a)(t^3 + t^2a + ta^2 + a^3)}{t - a} \\ &= a^3 + a^3 + a^3 + a^3 = 4a^3 = x'(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } \lim_{u \rightarrow a} \frac{y(u) - y(a)}{u - a} &= \lim_{u \rightarrow a} \frac{\frac{u}{1+u} - \frac{a}{1+a}}{u - a} = \lim_{u \rightarrow a} \frac{\frac{u + ua - a - au}{(1+u)(1+a)}}{u - a} \\ &= \lim_{u \rightarrow a} \frac{u - a}{(1+u)(1+a)(u - a)} = \lim_{u \rightarrow a} \frac{1}{(1+u)(1+a)} = \frac{1}{(1+a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ه) } \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(x) - k(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{xa}}}{(x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{xa}(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{\sqrt{xa}(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{-1}{2a\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } m = y'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1 - x^2}{2(1+x^2)}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{2(1+x^2)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(1+x)}{2(1+x^2)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad -2 \end{aligned}$$

ادامه سوال ۲ (الف)

$$x = 1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow A(1, \frac{1}{2}) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1$$
 معادله مماس

$$m = -\frac{1}{2} \Rightarrow m' = 2 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - \frac{3}{2}$$
 معادله قائم

$$m = y'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{(x+1)(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{3})}$$

ب)

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{(\sqrt{4-x^2} + \sqrt{3})} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow y(-1) = \sqrt{4-(-1)^2} = \sqrt{3} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}, A(-1, \sqrt{3})$$

$$y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$
 معادله مماس

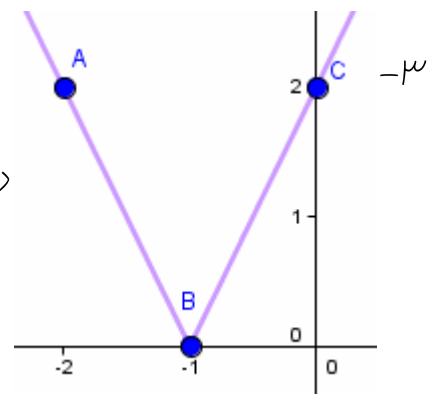
$$m = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m' = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, A(-1, \sqrt{3})$$

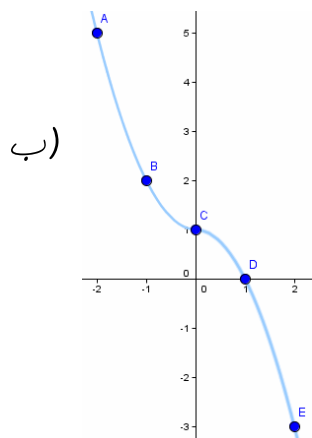
$$\Rightarrow y - \sqrt{3} = -\sqrt{3}(x+1) \Rightarrow y - \sqrt{3} = -\sqrt{3}x - \sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x$$
 معادله قائم

$$\text{الف) } y(x) = 2|x+1| \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 2 & 0 & 2 \end{array}$$

در نقطه $A(-1, 0)$ (نقطه زاویه دار) مشتق پذیر نیست و

$$y'_+(-1) = \frac{2}{1} = 2, y'_-(-1) = \frac{-2}{1} = -2$$





$$y(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & -2 & -1 & 0 \\ \hline y & 5 & 2 & 1 \end{array} \\ -x^2 + 1 & x > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 0 & -3 \end{array} \end{cases}$$

ادامه سوال ۳

در تمام نقاط مشتق پذیر است $y'_+(\cdot) = y'_-(\cdot) = 0$

ج) $y(x) = |1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \text{ or } x < -1 \end{cases}$

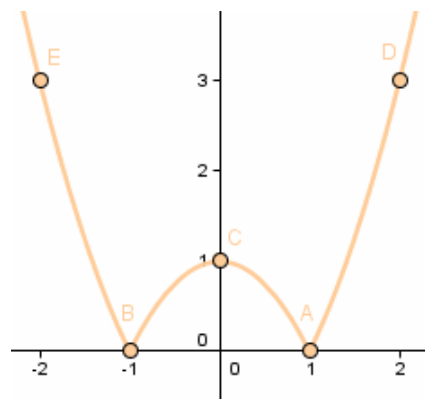
در نقاط $x = 1$, $x = -1$ مشتق پذیر نیست زیرا

$$y'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$y'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2 - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{x-1} = -2$$

$$y'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1 - x^2 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(1-x)(1+x)}{x+1} = 2$$

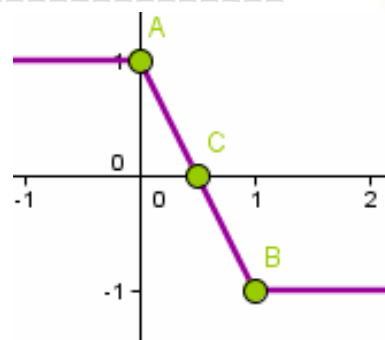
$$y'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = -2$$



د) $y(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -2x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & -1 \end{array}$

در نقاط $x = 0$, $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

$$y'_-(\cdot) = 0, y'_+(\cdot) = -2, y'_+(1) = 0, y'_-(1) = -2$$



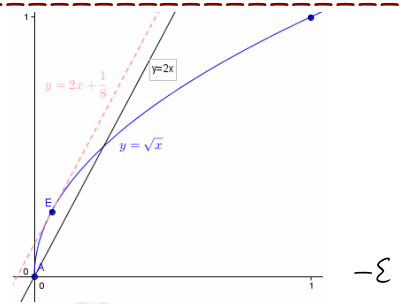
$$y_1(x) = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}, y_2 = 2x \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

$$y_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, y_2'(x) = 2, y_1'(x) = y_2'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{16}, 2\left(\frac{1}{16}\right) + b = \sqrt{\frac{1}{16}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \Rightarrow y = 2x + \frac{1}{8}$$

پس اگر به اندازه $\frac{1}{8}$ نمودار $y = 2x$ را بالا ببریم دو نمودار در $A\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right)$ مماس خواهند شد.



۵- نمودار $g(x)$ از انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه b واحد به بالا یا پایین به دست می آید (علامت b بنا بر این چون دو خط مماس مرسوم موازی می شوند شیب آنها تغییری نمی کند.

یعنی اگر مشتق آنها در نقطه دلخواه موجود باشد با هم برابر است.

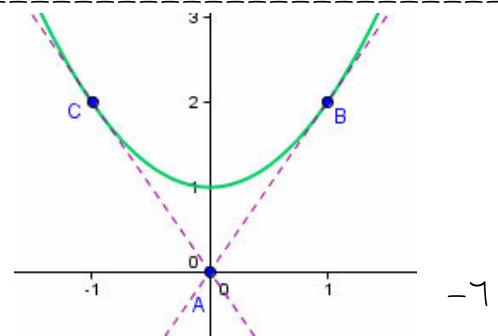
$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + b - (f(a) + b)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$m_{OA} = \frac{a^2 + 1 - 0}{a - 0} = \frac{a^2 + 1}{a}$$

$$m_{OA} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + 1) - (a^2 + 1)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = 2a \Rightarrow \frac{a^2 + 1}{a} = 2a \Rightarrow a^2 + 1 = 2a^2$$

$$\Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow A(1, 2), B(-1, 2)$$



$$g'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{g(x) - g(b)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(ax) - f(ab)}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} a \left(\frac{f(ax) - f(ab)}{ax - ab} \right)$$

$$= af'(ab) \Rightarrow g'(x) = af'(ax)$$

$$الف) y' = 4x^3 + \frac{4}{x^5} \quad ب) y' = (3x^2 - 2x)(x - \sqrt{x} + 5) + (1 - \frac{1}{2\sqrt{x}})(x^3 - x^2 - 1) - 1$$

$$ج) y' = 2(4 - 3x)(x^2 + x + 5) - 3(2x + 1)(x^2 + x + 5) + (2x + 1)^2(4 - 3x)$$

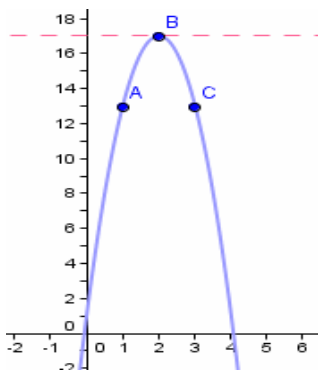
$$د) y' = \frac{-6x^2}{(x^3 - 1)^2} \quad ه) y' = \frac{\sqrt{x} + 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x)}{(\sqrt{x} + 2)^2} = \frac{\sqrt{x} + 4}{2(\sqrt{x} + 2)^2}$$

۲- موازی نیمساز ربع اول و سوم یعنی شیب برابر ۱ ($y'(x) = 1$)

$$y' = 3x^2 - 2 = 1 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(1, -7), B(-1, -5)$$

$$۳- y = -4(x^2 - 4x + 4) + 16 + 1 = -4(x - 2)^2 + 17 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 13 & 17 & 13 \end{array}$$

مماس موازی محور x ها یعنی شیب برابر صفر پس $x = 2$



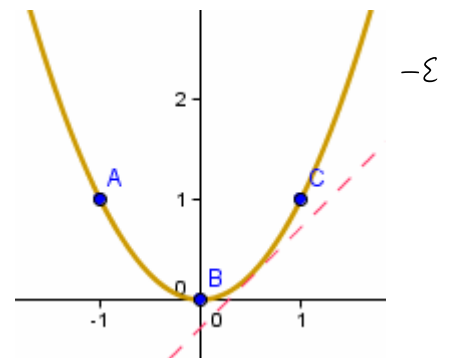
$$x = 2 \Rightarrow y = -4(2 - 2)^2 + 17 = 17 \Rightarrow B(2, 17)$$

فقط در نقطه B (رأس سهمی) مماس بر منحنی موازی محور x هاست،

که این نقطه ماکسیمم تابع است.

$$y = x^2 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{تنها یک نقطه این خاصیت را دارد.}$$

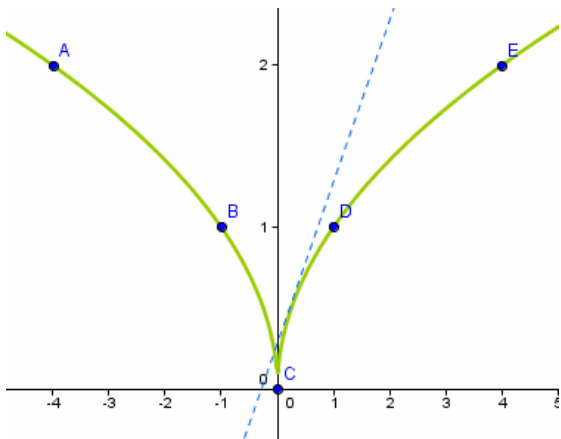
$$\left. \begin{array}{l} y = mx + b \Rightarrow y' = m \\ y = x^2 \Rightarrow y' = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = m \Rightarrow x = \frac{m}{2}$$



ادامه سوال ۴

$$y = \sqrt{|x|} \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{array}{c|c} -4 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + b \Rightarrow y' = m \\ y = \sqrt{|x|} \Rightarrow y' = \frac{|x|}{2x\sqrt{|x|}}, x \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } m > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4m^2} \\ \text{if } m < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4m^2} \end{cases}$$



اگر m مثبت باشد مثل برافورد طول مثبت و
اگر m منفی طول مثل برافورد منفی است.
در هر صورت تنها یک نقطه دارای خاصیت مفروض است.

$$y = x^2 \Rightarrow \frac{x}{y} \begin{array}{c|c} -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

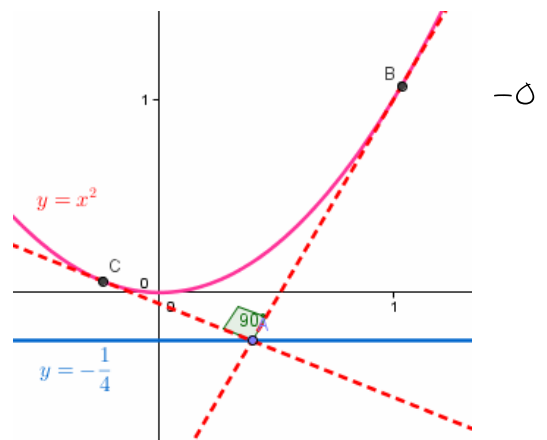
$$m = \frac{y - a^2}{x - a} = 2a \Rightarrow y = 2ax - a^2 \quad (1)$$

$$m' = \frac{y - b^2}{y - b} = 2 \Rightarrow y = 2bx - b^2 \quad (2)$$

$$m \times m' = -1, (1), (2) \Rightarrow 2a \times 2b = -1 \Rightarrow ab = -\frac{1}{4} \quad (3)$$

پس باید مقادیر a, b را چنان یافت که $ab = -\frac{1}{4}$ که بیشمار جواب دارد. در این صورت

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a+b}{2} \\ y = ab = -\frac{1}{4} \end{array} \right. \text{ یعنی مجموعه جواب خط } y = -\frac{1}{4} \text{ است.} \quad (1), (2) \text{ شامل داریم}$$



$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)}}{x - a} \quad -۶$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(f(x) - f(a))}{f(x)f(a)(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-1}{f(x)f(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{f(a)^2} \times f'(a)$$

$$f(x)^k = x \Rightarrow (f(x)^k)' = (x)' \Rightarrow kf'(x)f(x)^{k-1} = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{kf(x)^{k-1}} = \frac{1}{kx^{\frac{k-1}{k}}} = \frac{1}{k}x^{\left(\frac{1}{k}-1\right)} \quad -۷$$

$$r > 0, r = \frac{m}{n} \Rightarrow (x^r)' = (x^{\frac{m}{n}})' = ((x^{\frac{m}{n}})^m)' = m(x^{\frac{m}{n}})^{m-1} (x^{\frac{m}{n}})'$$

$$= m \left(\frac{1}{n}\right) (x^{\frac{m}{n}-1}) (x^{\frac{m}{n}})^{\frac{m-1}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = rx^{r-1} \quad -۸$$

$$r < 0, r = \frac{m}{n} \Rightarrow (x^r)' = ((x^{-r})^{-1})' = (-1)(x^{-r})'(x^{-r})^{-2}$$

$$= (-1)((-r)(x^{-r-1})(x^{2r})) = rx^{r-1}$$

$$y = 6x^{\frac{1}{3}} - 3x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow y' = 6\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1} - 3\left(\frac{1}{4}\right)(x)^{\frac{1}{4}-1}$$

$$\Rightarrow y' = 2x^{-\frac{2}{3}} - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad -۹$$

$$\left. \begin{array}{l} s = \pi R^2 \\ P = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{P}{2\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow S = \pi \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{P^2}{4\pi} \Rightarrow S' = \frac{P}{2\pi} \quad -1$$

$$S_0 = \pi = \pi R_0^2 \Rightarrow R_0 = 1 \Rightarrow P_0 = 2\pi(1) = 2\pi \Rightarrow S' = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

$$\text{الف) } \frac{4}{3}\pi R^3 = 4t \Rightarrow R^3 = \frac{3}{\pi}t \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}t} = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \cdot \sqrt[3]{t} \Rightarrow R'(t) = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9\pi t^2}} \quad -2$$

$$\text{ب) } S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}t} \right)^2 = 4\pi \left(\frac{3}{\pi}t \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow S'(t) = 4\pi \left(\frac{3}{\pi}t \right)^{-\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{\frac{\pi}{3t}} \quad -3$$

$$\text{ج) } S = 4\pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{4\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}} \Rightarrow R'(S) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{S}{4\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\sqrt{\pi S}} \quad -4$$

$$\text{د) } S = 4\pi R^2 \Rightarrow S'(R) = 8\pi R, 450 \cdot \pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{3375} = 15 \\ \Rightarrow S'(R) = 8\pi(15) = 120\pi$$

$$\text{الف) } S(t) = 25t - \frac{5}{2}t^2 = -\frac{5}{2}(t-5)^2 + \frac{125}{2} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} t & 4 & 5 & 6 \\ \hline S(t) & 60 & \frac{125}{2} & 60 \end{array} \quad -5$$

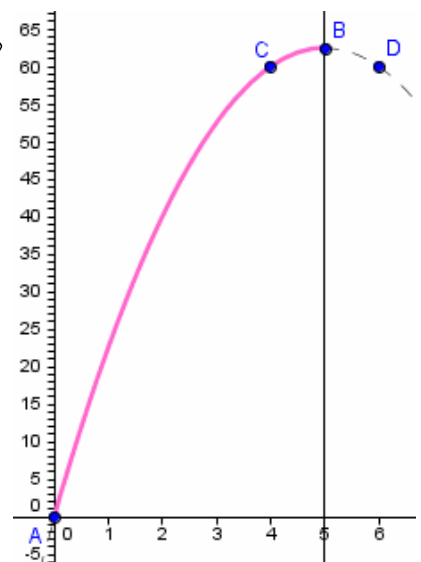
دامنه اعتبار تابع از $t = 0$ تا توقف کامل یعنی $S'(t) = 0$ است که

$$D_S = [0, +\infty] \text{ پس } S'(t) = 25 - 5t = 0 \Rightarrow t = 5$$

$$\text{ب) } V = S'(t) = 25 - 5t = 0, t = 0 \Rightarrow V = 25 - 5(0) = 25 \text{ m/s}$$

$$\text{ج) } V = 0 \Rightarrow 25 - 5t = 0 \Rightarrow t = 5$$

$$\text{د) } t = 5 \Rightarrow S(5) = 25(5) - \frac{5}{2}(5)^2 = \frac{125}{2} = 62.5$$



۴- الف) $300 = 3 \times 100$ متر فاصله را در نه دقیقه طی کرده است.

ب) 100 متر را در دو دقیقه طی کرده است پس $\frac{100}{2} = 50$ یعنی سرعت 50 متر بر دقیقه است.

ج) ایستاده بوده است چون مسافتی طی نشده است.

د) 100 متر را در یک دقیقه طی کرده پس با سرعت 100 متر بر دقیقه به طرف خانه اش حرکت

کرده است. (دوید)

ه) دم در خانه اش ایستاده بوده و برای خودش آواز می خوانده است.

و) چون 300 متر را در 2 دقیقه طی کرده است، می توان گفت با سرعت متوسط 150 متر در

دقیقه به طرف مدرسه می دوید.

ز) دم در مدرسه ایستاده و منتظر بوده بیند آیا معلم ریاضی می آید یا نه !!!

$$الف) y' = 3 \cos 3x \quad ب) y' = \tan \frac{x}{2} + \frac{x}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \quad -۱$$

$$ج) y' = 2(\cos 2x)(2 \sin^2 2x) = 2 \sin 4x \cdot \sin 2x \quad د) y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$ه) y = \frac{1}{\cot x + 1} \Rightarrow y' = -1(-1)(1 + \cot^2 x)(\cot x + 1)^{-2} = \frac{1 + \cot^2 x}{(1 + \cot x)^2}$$

$$و) y' = \frac{(2x - \sin 2x)(1 + \cos^2 x) + \sin 2x(x^2 - \sin^2 x)}{(1 + \cos^2 x)^2}$$

$$y'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin(\frac{x+a}{2}) \cdot \sin(\frac{x-a}{2})}{2(\frac{x-a}{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} -\sin(\frac{x+a}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{(\frac{x-a}{2})} = -\sin(\frac{a+a}{2}) \times 1 = -\sin a \quad -۲$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x, x = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1 = m = \tan \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \quad -۳$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x, x = 0 \Rightarrow 1 + \tan^2 0 = 1 = m = \tan \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \sin 3x \Rightarrow y' = 3 \cos 3x = 0 \quad \text{موازی محور } x \text{ ها است چون شیب صفر است.} \quad -۴$$

$$\cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow A(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, 1), B(\frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, -1)$$

$$y = \sin x + \cos x \quad -۵ \quad \text{شیب خط } y = 3x - 1 \text{ برابر ۳ است.}$$

$$\Rightarrow y' = \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 3 \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{4}) = 3\sqrt{2} > 1 \quad \text{معادله جواب ندارد.}$$

۶- شیب خط $y = mx + 2$ برابر m است و

$$y = \tan 3x \Rightarrow y' = 3(1 + \tan^2 3x) = \frac{3}{\cos^2 3x} = m$$

$$\Rightarrow \cos^2 3x = \frac{3}{m}, \quad 0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{3}{m} \leq 1 \Rightarrow m \geq 3$$

$$y = 1 + 2 \sin^2 2x = 1 + 2\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = 2 - \cos 4x \Rightarrow y' = 4 \sin 4x \quad -7$$

پس حرکت این متحرک به صورت تناوبی با دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{4} = \pi$ است.

$$y' = 0 \Rightarrow 4 \sin 4x = 0 \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} \Rightarrow A\left(\frac{k\pi}{4}, 1\right) \text{ or } B\left(\frac{k\pi}{4}, 3\right)$$

$$y'_{\max} = 4, \quad \sin 4x = \pm 1 \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = (k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$\text{الف) } y' = \frac{2x(1+x^2) - 2x(x^2)}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{x}{(1+x^2)^2} \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} \quad -1$$

تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست.

$$\text{ب) } f(t) = \cos \sqrt[3]{t} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \times -\sin \sqrt[3]{t} = -\frac{\sin \sqrt[3]{t}}{3\sqrt[3]{t^2}}.$$

در $t=0$ مشتق پذیر نیست.

$$\text{ج) } g(\alpha) = \sqrt[5]{1+\tan \alpha} \Rightarrow g'(\alpha) = (1+\tan^2 \alpha) \left(\frac{1}{5\sqrt[5]{(1+\tan \alpha)^4}} \right) = \frac{1+\tan^2 \alpha}{5\sqrt[5]{(1+\tan \alpha)^4}}$$

اگر $\tan \alpha = -1$ یعنی $\alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}$ مشتق پذیر نیست.

البته در $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$ مشتق پذیر نیست که جزء دامنه نمی باشد.

$$y(\alpha) = \tan^2 \left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha \right)$$

$$\Rightarrow y'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} (1+\tan^2 \left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha \right)) (2 \tan \left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1} \alpha \right))$$

اگر $\alpha = \pm 1$ تابع مشتق پذیر نیست.

البته در $\alpha = \frac{1}{2}$ مشتق پذیر نیست که جزء دامنه نمی باشد.

$$\text{د) } x(t) = \sqrt{1+\sqrt{1+t^2}} \Rightarrow x'(t) = 2t \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}} \right) = \frac{t}{2\sqrt{1+t^2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}}$$

زیر، اذیکالها مثبت و مفرج هیچگاه صفر نمی شود پس در تمام نقاط مشتق پذیر است.

$$k(z) = \sqrt{1 + \cos^2} \sqrt{1 + z^2}$$

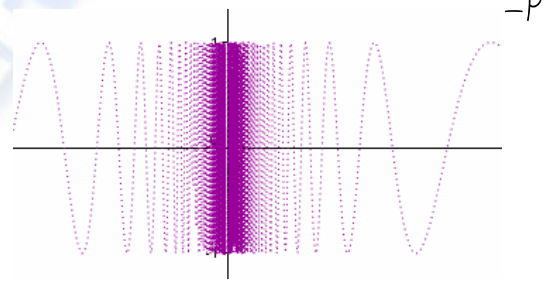
$$و) \Rightarrow k'(z) = 2z \left(\frac{1}{2\sqrt{1+z^2}} \right) (-\sin \sqrt{1+z^2}) (2 \cos \sqrt{1+z^2}) \left(\frac{1}{2\sqrt{1+\cos^2} \sqrt{1+z^2}} \right)$$

$$\Rightarrow k'(z) = \frac{-z \sin 2\sqrt{1+z^2}}{2\sqrt{1+z^2} \cdot \sqrt{1+\cos^2} \sqrt{1+z^2}}$$

زیر، اذینکالها مثبت و مفرج هیپکاه صفر نمی شود پس در تمام نقاط مشتق پذیر است.

$$f'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} \sin \frac{1}{x} \quad \text{وجود ندارد}$$

$$g'(\cdot) = \lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow \cdot} x \cdot \sin \frac{1}{x} = \cdot$$



زیرا $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq x$ و هر دو طرف نامساوی صفر است،

پس طبق قضیه فشردگی $(\lim_{x \rightarrow \cdot} x \sin \frac{1}{x} = \cdot)$

$$Df = [-\infty, +\infty] = R, \quad Rf = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

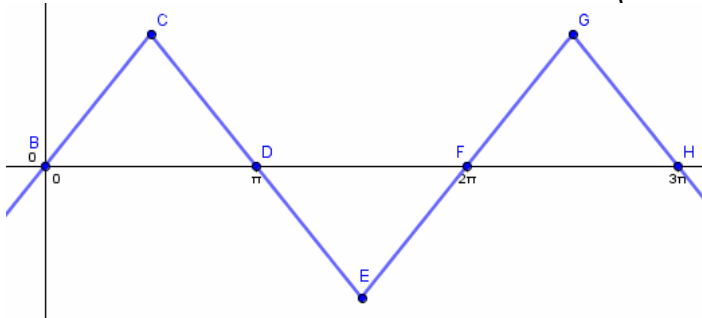
$$T = 2\pi \Leftrightarrow f(x + 2\pi) = \sin^{-1}(\sin(x + 2\pi)) = \sin^{-1}(\sin(x)) = f(x) \quad -3$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
$f(x) = \sin^{-1}(\sin x) \Rightarrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	\cdot	$-\frac{\pi}{2}$	\cdot	$\frac{\pi}{2}$	\cdot

ادامه سوال ۳ در نقاطی که $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ مشتق ناپذیر است.

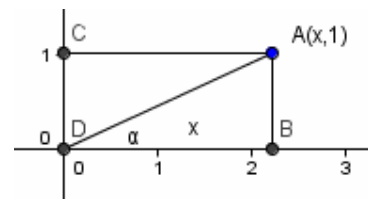
در نقاطی که $(4k - 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 1)\frac{\pi}{2}$ شیب $+1$ است پس $f'(x) = +1$

در نقاطی که $(4k + 1)\frac{\pi}{2} < x < (4k + 3)\frac{\pi}{2}$ شیب -1 است پس $f'(x) = -1$



$$\tan \alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), D_{\alpha(x)} = R, R_{\alpha(x)} = (0, \pi)$$

$$\alpha'(x) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$



-۴

مقدار α ب افزایش x کاهش می یابد و علامت $\alpha'(x)$ همواره منفی بنابراین تابع آکیدا نزولی.

$$L^2 = 2^2 + 4^2 - 2(2 \times 4) \cos \alpha = 20 - 16 \cos \alpha, 0 < \alpha < 180$$

الف)

$$\Rightarrow D_{L(\alpha)} = (0, 180), L = \sqrt{20 - 16 \cos \alpha}, L > 0 \Rightarrow R_{L(\alpha)} = (0, +\infty)$$

-۵

نکته) چون $\cos \alpha \leq 1$ بنابراین $20 - 16 \cos \alpha > 0$ همواره برقرار است.

$$\text{ب) } L^2 = 20 - 16 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{20 - L^2}{16} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{20 - L^2}{16}\right)$$

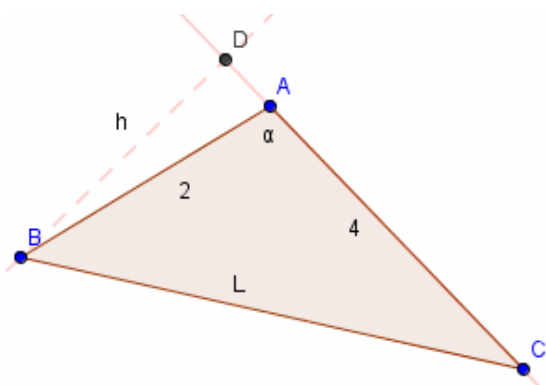
$$\sin(180 - \alpha) = \frac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \sin \alpha, S = \frac{4 \times h}{2} = 2h = 4 \sin \alpha$$

ج)

$$\Rightarrow S'(\alpha) = 4 \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow S'(\alpha) > 0 \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow S'(\alpha) < 0 \end{cases}$$

ادامه سوال ۵ برای $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ آهنگ افزایش مساحت صعودی است (هنگامیکه زاویه α تند است)

برای $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ آهنگ افزایش مساحت نزولی است (هنگامیکه زاویه α باز است)



$$S'(\alpha) = 0 \Rightarrow \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

مساحت زمانی است که مثلث قائمه الزویه است.

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$R = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{l}{2} \Rightarrow l = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$R = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{h}{2} \Rightarrow h = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \times h = \frac{1}{2} l \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} (2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \alpha$$

$$S = \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \quad \text{①}$$

S = \alpha مساحت قطاع $S = \alpha$ هاشور، α (سبز)

$$l = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \sin^{-1}\left(\frac{l}{2}\right) \quad \text{②}$$

$$\text{①, ②} \Rightarrow S = \sin^{-1}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \sin^{-1}\left(\frac{l}{2}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{l}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}$$

$$\Rightarrow S = \sin^{-1}\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{l}{4} \sqrt{4 - l^2} \quad \text{③}$$

$$\text{①} \Rightarrow S'(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \alpha, \quad \text{②} \Rightarrow \alpha'(l) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{4 - l^2}}$$

$$\text{③} \Rightarrow S'(l) = \frac{1}{\sqrt{4 - l^2}} - \frac{1}{4} \sqrt{4 - l^2} + \frac{l^2}{4\sqrt{4 - l^2}} = \frac{l^2}{2\sqrt{4 - l^2}}$$

