
**امام مهدی (ع):**

**ما از رسیدگی به و سرپرستی شما کوتاهی نمی کنیم و یاد شما را از خاطر نمی بریم که اگر جز این بود نابسامانی ها و مصیبت ها بر سرتان فرود می آمد و دشمنان، شما را در هم می شکستند.**



# معادلات دیفرانسیل

Subject:

Year. 200 Month. Day.

معادلات دیفرانسیل :

منابع : - سیمونز (ترجمه عادلزاده)
- کرایف ( " )
- کلاته‌ای
- جزوه استاد

سرفصل ها : - معادلات دیفرانسیل - تعاریف - جواب
- معادله دیفرانسیل مرتبه اول (جدائی پذیر - همگن - لاگرانژ ...)
- معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر
- حل به کمک اپراتورها و اپراتورهای معکوس
- تبدیلات لاپلاس و حل معادلات به کمک آنها
- حل معادلات به کمک دستگاه

معادله دیفرانسیل : هر معادله که به فرم $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ که در آن $x$ متغیر و $y^{i}$ $1 \leq i \leq n$ مشتقات مختلف تابع می باشد.

$xy' + y = 0$ (مرتبه اول) $\qquad y''' + 4xy'' + 2xy' = 0$ (مرتبه سوم)

$y'' + 2xy' + y = 0$ (مرتبه دوم) $\qquad y^{(4)} - 4y'' = 0$ (مرتبه چهارم)

مرتبه معادله دیفرانسیل : بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله دیفرانسیل مرتبه معادله دیفرانسیل می گویند

جواب معادله دیفرانسیل : منظور از جواب یک معادله دیفرانسیل تابعی است مانند $y = f(x)$ و یا $f(x, y) = 0$ به طوری که در معادله دیفرانسیل صدق کند

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل : کلی ترین جواب یک معادله دیفرانسیل را جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل و اگر این جواب را تحت شرایط خاص به کار ببریم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می گویند.

EX: $y' - y = 0 \implies y = e^{x}$

جواب خصوصی $x$

$$\implies \begin{cases} y = ce^{x} \\ y' = ce^{x} \end{cases}$$

جواب عمومی $x$ ها

معادله مرتبه اول: هر معادله به فرم $f(x, y, y') = 0$ باشد معادله مرتبه اول است.

برای حل معادله مرتبه اول آن ها را دسته بندی می کنیم و روش حل هر یک به صورت زیر است:

الف) معادله جدائی پذیر (تفکیک پذیر): هر معادله ای که در آن بتوان متغیرهای $x$ و $y$ را از یکدیگر جدا کرد معادله تفکیک پذیر نامیده می شود و برای حل آن به طریقه زیر عمل می کنیم

$$f(x, y, y') = 0 \Rightarrow y' = f(x, y) \rightarrow y' = P(x)\,q(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = P(x)\,q(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{q(y)} = \int P(x)\,dx$$

مثال: معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

1) $xy' + y = 0$

$xy' = -y$

$y' = \frac{-y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

$\frac{-dy}{y} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$

$\ln y = -\ln x + \ln c$

$\ln y = \ln \frac{c}{x}$

$y = \frac{c}{x}$ جواب عمومی

۲) $y' = \frac{xy + x}{xy + y}$

$y' = \frac{x(y+1)}{y(x+1)}$

$y'y\ (x+1) = x(y+1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+1)}{y(x+1)}$

$\frac{dy \cdot y}{y+1} = \frac{x \cdot dx}{x+1}$

$\frac{x+1-1}{x+1}dx + \frac{y+1-1}{y+1}dy = 0$

$\int \left[1 - \frac{1}{x+1}\right] dx + \int \left[1 - \frac{1}{y+1}\right] dy = 0$

$\int dx - \int \frac{1}{x+1} dx + \int dy - \int \frac{1}{y+1} dy = 0$

$x - \ln(x+1) + y - \ln y+1 = 0$

۳) $y' + xy + y + x + 1 = 0$

$y' + y(x+1) + x + 1 = 0$

$y' + [x+1][y+1] = 0$

$y' = -(x+1)(y+1)$

$\frac{dy}{dx} = -(x+1)(y+1)$

$\frac{dy}{(y+1)} = -(x+1)dx$

$\ln(y+1) = -\frac{1}{2}x^2 + x + C$

$y+1 = e^{-1/2 + x + C} = C_1 e^{-1/2 x^2 - x}$

$y = C_1 e^{-1/2 x^2 - x} - 1$

۴) $e^{x+2y} = y'$

$\frac{dy}{dx} = e^{x+2y}$

$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{2y}$

$\frac{dy}{e^{2y}} = e^x \cdot dx$

$\int e^{-2y} \cdot dy = \int e^x \cdot dx$

$-\frac{1}{2}e^{-2y} = e^x + C$

۵) $e^{y}dx + x\ln x\, dy = 0$

$e^{y}dx = -x\ln x\, dy$

$$\frac{dx}{x\ln x} = \frac{-dy}{e^{y}}$$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{-dy}{e^{y}}$$

$\ln(\ln x) + \ln c = e^{-y}$

$\ln(c\ln x) = e^{-y}$

۶) $$y' = \frac{3e^{x}\,tg\, y}{(e^{x}-2)\sec^{2}y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{x}\,tg\, y}{(e^{x}-2)\sec^{2}y}$$

$$\frac{\sec^{2}y\, dy}{tg\, y} = \frac{3e^{x}\,dx}{e^{x}-2}$$

$\ln tg\, y = 3\ln(e^{x}-2) + \ln c$

$\ln(tg\, y) = \ln(e^{x}-2) + \ln c$

$\cancel{\ln}(tg\, y) = \cancel{\ln}\, c(e^{x}-2)$

$tg\, y = c(e^{x}-2)$

۷) $$y' = \frac{\sin x}{1-3y^{2}} \qquad y(0)=1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1-3y^{2}}$$

$(1-3y^{2})dy = \sin x\, dx$

$\int dy - \int 3y^{2}dy = \int \sin x\, dx$

$y - \frac{3}{3}y^{3} = -\cos x + c$

$y - y^{3} = -\cos x + c$

$\xrightarrow{x=0,\ y=1}$ $\underbrace{1-1}_{0} = \overbrace{-\cos 0}^{-1} + c$

$c = 1$

$\Longrightarrow y - y^{3} = -\cos x + 1$

ب) معادلات قابل تبدیل به معادلات جدائی پذیر:

۱- هر معادله که به فرم $y' = f(ax+by+c)$ باشد با تغییر متغیر زیر قابل تبدیل به یک معادله جدائی پذیر میباشد.

$$ax+by+c=u$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \quad a+by'=u'$$

$$by' = u'-a$$

$$y' = \frac{u'-a}{b}$$

$$\frac{u'-a}{b} = f(u)$$

$$u' = bf(u)+a = F(u)$$

$$\frac{du}{dx} = F(u)$$

$$\int \frac{du}{F(u)} = \int dx$$

معادلات زیر را حل کنید.

1) $y' = 3x+2y+5$

$$3x+2y+5=u \implies 3+2y'=u'$$

$$y' = \frac{u'-3}{2} \to \frac{u'-3}{2} = u$$

$$u' = 2u+3 \qquad \frac{du}{dx} = 2u+3$$

$$\frac{du}{2u+3} = dx \qquad \int \frac{du}{2u+3} = \int dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(2u+3) = x+c \qquad \frac{1}{2}\ln(6x+4y+13) = x+c$$

۲) $y' = tg(x+y) - 1$

$x+y=u$ $\qquad$ $1+y'=u'$

$y'=u'-1$ $\qquad$ $u'-1=u$

$u'\cancel{-1} = tg(x+y)\cancel{-1}$ $\qquad$ $u'=tg(x+y)$

$u'=tg(u)$ $\qquad$ $\frac{du}{dx}=tgu$

$\frac{du}{tgu}=dx$ $\qquad$ $\int\frac{du}{tgu}=\int dx$

$\int\frac{\cos u}{\sin u}du=\int dx$ $\qquad$ $Ln|\sin u|=x+c$

$\sin u = e^{x+c} = c_1 e^{x}$ $\therefore$ $\sin(x+y)=c_1 e^{x}$

۳) $y'=(x+y)^2$ $\qquad$ $x+y=u$ $\qquad$ $1+y'=u'$

$y'=u'-1 \xrightarrow{x+y=u} u^2=u'-1$

$u'=u^2+1$ $\qquad$ $\frac{du}{dx}=u^2+1$

$\frac{du}{u^2+1}=dx$ $\qquad$ $\int\frac{du}{u^2+1}=\int dx$

$Arctg\,u = x+c$ $\qquad$ $Arctg(x+y)=x+c$

۲) معادله همگن:

تابع همگن: تابع $f(x,y)=0$ همگن از درجه $n$ نامیم درصورتی که
$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ باشد.

مثال: $f(x,y)=xy+y^2$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x.\lambda y+(\lambda y)^2=\lambda^2 xy+\lambda^2 y^2=\lambda^2\underbrace{(xy+y^2)}_{\text{خود معادله}}$$

همگن از درجه ۲ (چون توان $\lambda$ درجه ۲ است)

EX2: $f(x,y)=x+y^2+1$

$\Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x+(\lambda y)^2+1=\lambda x+\lambda^2 y^2+1$ غیرهمگن

معادله همگن: معادله $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ همگن نامیم در صورتی که $P$ و $Q$ به عنوان ۲ تابع همگن دارای یک درجه همگن باشد.

EX: $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ همگن

$(x+1)dx+(y+1)dy=0$ غیرهمگن

$(xy+x^2)dx+(x-y)dy=0$ غیرهمگن

روش حل معادلات همگن: اگر معادله $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ همگن باشد با تغییر متغیر $y = xv$ قابل تبدیل به یک معادله جدائی پذیر میباشد

$$dy = v\,dx + x\,dv$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad y' = v + xv'$$

مثال:

1) $(x+y)\,dx + (x-y)\,dy = 0$

$$y = xv \Longrightarrow dy = v\,dx + x\,dv$$

$$(x + xv)\,dx + (x - xv)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$\left[x(1+v)\,dx\right] + \left[x(1-v)(v\,dx + x\,dv)\right] = 0$$

$$(1+v)\,dx + (1-v)(v\,dx + x\,dv) = 0$$

$$(1 + v + v - v^2)\,dx + (1-v)\,x\,dv = 0$$

$$(1 + 2v - v^2)\,dx = -x(1-v)\,dv$$

$$\frac{(1-v)\,dv}{1+2v-v^2} = \frac{-dx}{x} \qquad \frac{1}{2}\ln(1+2v-v^2) = -\ln x + \ln c$$

$$\cancel{\ln}(1+2v-v^2) = \cancel{\ln}\frac{c}{x}$$

$$\sqrt{1 + \frac{2y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{c}{x}$$

۲) $y' = \frac{2xy + y^2}{x^2}$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(xv) + (xv)^2}{x^2}$

$dy = \frac{2x^2 v + x^2 v^2}{x^2} dx$ $\qquad$ $dy = \frac{\cancel{x^2}(2v + v^2)}{\cancel{x^2}} dx$

$dy = v\,dx + x\,dv \Longrightarrow$ یا $\frac{dy}{dx} = v + xv' \Longrightarrow$

$\frac{dy}{dx} = 2v + v^2$ $\qquad$ $v + xv' = 2v + v^2$

$xv' = v + v^2$ $\qquad$ $\frac{dv}{v(1+v)} = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{A\,dv}{v} + \int \frac{B\,dv}{v+1} = \int \frac{dx}{x}$ $\qquad$ $A \ln v + B \ln(v+1) = \ln x + \ln c$

معادلاتی که قابل تبدیل به معادلات همگن می باشند:

هر معادله ای که به فرم $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right)$ باشد قابل تبدیل به یک معادله همگن میباشد برای این منظور دو حالت زیر را در نظر میگیریم و در هر حالت روش حل را برای هر آن بررسی می نمائیم.

با توجه به اینکه صورت و مخرج عبارت داخل f دو خط هستند ۲ حالت زیر را در نظر می گیریم

الف) موازی باشند $\qquad$ ب) دو خط متقاطع باشند

شرط موازی $\Longrightarrow ab' - a'b = 0$

شرط متقاطع $\Longrightarrow ab' - ba' \neq 0$

شرط موازی بودن: الف) $ab' - ba' = ۰$

$ax + by = u \qquad a'x + b'y = k(ax+by)$

$\Rightarrow a + by' = u' \rightarrow \begin{cases} y' = \dfrac{u'-a}{b} & I \\ y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) & II \end{cases}$

$I, II \Rightarrow \dfrac{u'-a}{b} = f\left(\dfrac{u+c}{ku+c'}\right) \qquad u' = bf\left(\dfrac{u+c}{ku+c'}\right) + a$

$u' = f(u) \qquad \dfrac{du}{dx} = f(u) \qquad \dfrac{du}{f(u)} = dx$

$\int \dfrac{du}{f(u)} = \int dx$

مثال:

EX: $y' = \dfrac{x+۲y+۵}{۲x+۴y-۶}$

$x + ۲y = u$

$۱ + ۲y' = u'$

$y' = \dfrac{u'-۱}{۲}$

$\dfrac{u'-۱}{۲} = \left(\dfrac{u+۵}{۲u-۶}\right)$

$u' = \dfrac{۲u+۱۰}{۲u-۶} + ۱$

$u' = \dfrac{۲u+۱۰+۲u-۶}{۲u-۶}$

$u' = \dfrac{۴u+۴}{۲u-۶} = \dfrac{۴(u+۱)}{۲(u-۳)}$

$u' = \dfrac{۲u+۲}{u-۳}$

$\dfrac{du}{dx} = \dfrac{۲u+۲}{u-۳}$

$\dfrac{u-۳}{۲u+۲}\, du = dx$

$\int \dfrac{u-۳}{۲u+۲}\, du = \int dx$

$$\int \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{2u+2}\right) du = \int dx$$

$$\begin{array}{r|l} u-3 & 2u+2 \\ \cline{2-2} -(u+1) & \frac{1}{2} \\ \hline -4 & \end{array}$$

$$\int \frac{1}{2} du - 2\int \frac{2}{2u+2} du = \int dx$$

$$\frac{1}{2}u - 2\ln(2u+2) = x + C$$

$$\frac{1}{2}(x+2y) - 2\ln(2x+4y+2) = x + C$$

EX: $$y' = \frac{2x-y+5}{4x-2y-1}$$

$$2x - y = u \qquad u' = \frac{3u-7}{2u-1}$$

$$2 - y' = u' \qquad \frac{du}{dx} = \frac{3u-7}{2u-1}$$

$$y' = 2 - u' \qquad \left(\frac{2u-1}{3u-7}\right) du = dx$$

$$2 - u' = \left(\frac{u+5}{2u-1}\right)$$

$$\begin{array}{r|l} 2u-1 & 3u-7 \\ \cline{2-2} 2u-\frac{14}{3} & \frac{2}{3} \\ - \quad + & \\ \hline -1+\frac{14}{3} = \frac{14-3}{3} = \frac{11}{3} & \end{array}$$

$$u' = -\left(\frac{u+5}{2u-1}\right) + 2$$

$$u' = \frac{-u-5+4u-2}{2u-1} \qquad \int \left(\frac{2}{3} + \frac{11/3}{3u-7}\right) du = \int dx$$

$$\int \frac{2}{3} du + \int \frac{11/3}{3u-7} du = \int dx \qquad \frac{2}{3}u + \frac{11}{9}\ln|3u-7| = x + C$$

$$\frac{2}{3}(2x-y) + \frac{11}{9}\ln|6x-3y-7| = x + C$$

تمرین:
معادلات همگن زیر را حل نمائید.

$(x^2+y^2)dx+2xy\,dy=0 \qquad y=xv \qquad dy=v\,dx+x\,dv$

$(x^2+x^2v^2)dx+2x\cdot xv(v\,dx+x\,dv)=0$

$(\cancel{x^2}+\cancel{x^2}v^2)dx+(2\cancel{x^2}v)(v\,dx+x\,dv)=0$

$(1+v^2)dx+2v(v\,dx+x\,dv)=0$

$(1+v^2)dx+2v^2dx+2vx\,dv=0$

$(1+v^2+2v^2)dx+2vx\,dv=0$

$(1+3v^2)dx+2vx\,dv=0 \qquad 1+3v^2dx=-2vx\,dv$

$\dfrac{dx}{-2x}=\dfrac{v\,dv}{1+3v^2} \qquad \begin{cases}1+3v^2=u\\ du=6v\,dv\end{cases}$

$\frac{1}{6}du=v\,dv$

$\dfrac{-1}{2}\dfrac{dx}{x}=\dfrac{1}{6}\dfrac{du}{u} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}\ln x+\ln c=\dfrac{1}{6}\ln u$

$-\dfrac{1}{2}\ln cx=\dfrac{1}{6}\ln(1+3v^2) \qquad \ln cx=\dfrac{-1}{3}\ln(1+3v^2)$

$\ln cx=\dfrac{-1}{3}\ln\left(1+3\dfrac{y^2}{x^2}\right)$

۲) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ $\qquad \begin{cases} y' = v + v'x \\ y = xv \end{cases}$

$x(v + v'x) = \sqrt{x^2 - x^2v^2} + xv$

$x(v + v'x) = \sqrt{x^2(1-v^2)} + xv$

$\cancel{x}(v + v'x) = \cancel{x}\sqrt{(1-v^2)} + \cancel{x}v$

$\cancel{v} + v'x = \sqrt{1-v^2} + \cancel{v}$

$v'x = \sqrt{1-v^2} \Longrightarrow \frac{dv}{dx} \cdot x = \frac{\sqrt{1-v^2}}{1} \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$

$\int \frac{dx}{x} = \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} \qquad \ln x + c = \operatorname{Arc\,sin} v$

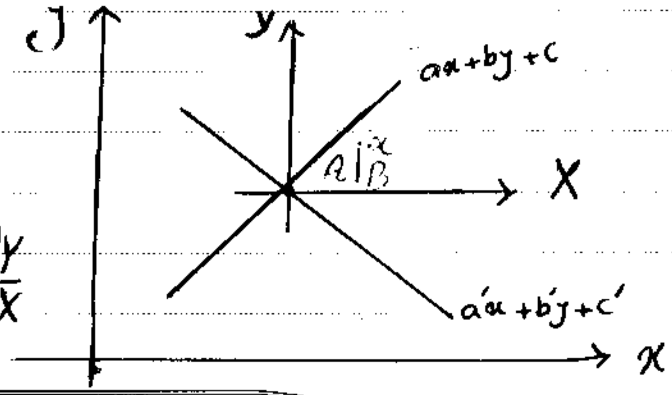
$\ln xc = \arcsin v \qquad e^{\operatorname{Arc\,sin} v} = xc$

$cx = e^{\operatorname{Arc\,sin}\left(\frac{y}{x}\right)}$

ب) معادلاتی که میتوان به معادلات همگن تبدیل کرد. (حالت متقاطع)

اگر دو خط متقاطع باشند بنابراین در نقطه‌ای همدیگر را قطع می‌کنند. مبدأ را به محل برخورد منتقل می‌کنیم. در دستگاه جدید معادله بدست آمده یک معادله همگن است.

$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$




$\left.\begin{matrix} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} dx = dX \\ dY = dy \end{matrix}\right\} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$

EX = $y' = \frac{x+y-2}{x-y+4}$ $\quad ab' - a'b \neq 0$ شرط تقاطع

$(1)(-1) - (1)(1) \neq 0 \implies -2 \neq 0$ متقاطعند

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y+4=0 \end{cases}$$

$$2x+2=0$$

$$\boxed{\begin{matrix} x=-1 \\ y=3 \end{matrix}} \implies A\Big|\begin{matrix}-1\\3\end{matrix} \implies \begin{cases} x = X-1 \\ y = Y+3 \end{cases}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(X-1)+(Y+3)-2}{(X-1)-(Y+3)+4} = \frac{X-1+Y+3-2}{X-1-Y-3+4} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

$$\begin{cases} Y = Xv \\ \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \end{cases}$$

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{X+Xv}{X-Xv} = \frac{1+v}{1-v} \qquad v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v}$$

$$X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v} - v \qquad X\frac{dv}{dX} = \frac{1+\cancel{v}-\cancel{v}+v^2}{1-v}$$

$$X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v^2}{1-v} \qquad \frac{dX}{X} = \frac{(1-v)}{1+v^2}\,dv$$

$$\int\frac{1}{1+v^2}\,dv - \int\frac{v}{1+v^2}\,dv = \int\frac{dX}{X}$$

$$\operatorname{arctg} v - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1+v^2) = \operatorname{Ln} cX$$

$$\operatorname{arctg}\frac{Y}{X} - \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(1+\frac{Y^2}{X^2}\right) = \operatorname{Ln} cX$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y-3}{x+1} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right) = \ln c(x+1)$$

تذکر مهم: بعضی از معادلات با تغییر متغیر $y = z^{\alpha}$ ، $dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$ برای $\alpha$ مناسب قابل تفکیک به یک معادله همگن میباشد در این گونه معادلات چنانچه $\alpha$ موجود باشد پس پیدا کردن $\alpha$ با رعایت شرط همگنی معادله را حل می کنیم.

مثال:

1) $(x^2y^2-1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0$

$$y = z^{\alpha} \Rightarrow dy = \alpha z^{\alpha-1}\,dz$$

$$(x^2 z^{2\alpha}-1)\,\alpha z^{\alpha-1}\,dz + 2x z^{3\alpha}\,dx = 0$$

$$\alpha(x^2 z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1})\,dz + 2x z^{3\alpha}\,dx = 0$$

$$2 + 3\alpha \cancel{-1} = \alpha \cancel{-1} \qquad -2\alpha = 2 \qquad \underline{\alpha = -1}$$

$$\left(-1(x^2 z^{-4} - z^{-2})\,dz + 2x z^{-3}\,dx = 0\right) \times x z^4$$

$$(x^2 - z^2)\,dz - 2xz\,dx = 0 \qquad \begin{cases} z = xv \\ dz = x\,dv + v\,dx \end{cases}$$

$$(x^2 - (xv)^2)\,x\,dv + v\,dx - 2x\,(xv)\,dx = 0$$

$$(x^2 - x^2v^2)\,x\,dv + v\,dx - 2x^2 v\,dx = 0$$

$$(\cancel{x^2} - \cancel{x^2}v^2)(x\,dv + v\,dx) - 2\cancel{x^2}v\,dx = 0$$

$(1-v^2)(x\,dv+v\,dx)-2v\,dx=0$

$\int \frac{(1-v^2)}{v+v^3}\,dv=\ln cx \qquad \int \frac{1-v^2}{v(1+v^2)}\,dv=\ln cx$

$\int \frac{A\,dv}{v}+\int \frac{Bv+C}{1+v^2}\,dv=\ln cx$

EX: $(x+2y+3)\,dx-(2x-y+4)\,dy=0$

$(x+2y+3)\,dx=(2x-y+4)\,dy$

$(x+2y+3)=(2x-y+4)\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y+3}{2x-y+4} \qquad ab'-ba'\neq 0 \qquad (1)(-1)-2(2)=-5\neq 0$

متقاطعند

$2\begin{cases}x+2y+3=0\\2x-y+4=0\end{cases} \quad \begin{cases}x+2y+3=0\\4x-2y+8=0\end{cases}$

$5x+11=0 \qquad 5x=-11 \qquad x=\frac{-11}{5}$

معادلات کامل: معادله $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ کامل نامیم در صورتی که

تابعی مانند $u(x,y)=c$ یافت شود به طوری که

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$$

قضیه: معادله $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ معادله کامل است اگر و فقط اگر $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

EX: $\underbrace{(x^2+2y)}_{\frac{\partial P}{\partial y}=2}dx + \underbrace{(y^2+2x)}_{\frac{\partial Q}{\partial x}=2}dy = 0 \Rightarrow$ کامل است.

روش حل معادلات کامل: اگر معادله $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ معادله کامل باشد با توجه به

تعریف معادلات کامل تابعی مانند $u(x,y)=c$ یافت می‌شود به طوری که:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$\int \frac{\partial u}{\partial x}\,dx = \int P(x,y)\,dx + g(y)$$

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + g'(y)$$

$$Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx = g'(y)$$

$$g'(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx\right)dy$$

EX: $(x^2+2y)dx+(y^2+2x)dy=0$

شرط کامل بودن $\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$ کامل است.

$u(x,y)=\int(x^2+2y)\,dx+g(y)$

$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+2xy+g(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2x+g'(y) \implies y^2+\cancel{2x}=\cancel{2x}+g'(y)$

$g'(y)=y^2 \quad \int g'(y)=\int y^2 \implies g(y)=\frac{1}{3}y^3$

$u(x,y)=\frac{1}{3}x^3+2xy+\frac{1}{3}y^3$ جواب کلی

EX: $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy=0$

شرط کامل بودن $\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=2xy = \frac{\partial Q}{\partial x}=2xy \implies$ کامل است

$u(x,y)=\int(x^2y+y^3)\,dy+g(x)=\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4+g(x)$

$\frac{du}{dx}=\frac{2}{2}xy^2+g'(x)=xy^2+g'(x)$

$x^3+\cancel{xy^2}=\cancel{xy^2}+g'(x) \implies g'(x)=x^3 \to \int g'(x)=\int x^3dx$

$g(x)=\frac{1}{4}x^4+C$

$\implies u(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{4}x^4+C$

EX: $\overbrace{(\sin xy + xy\cos xy)}^{\frac{du}{dx}}dx + \overbrace{(x^{2}\cos xy)}^{\frac{du}{dy}}dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = x\cos xy + x\cos xy + (-x)\sin xy \cdot (xy)$

$= x\cos xy + x\cos xy - x^{2}y\sin xy = 2x\cos xy - x^{2}y\sin xy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \cdot \cos xy + (-y)\sin xy \cdot (x^{2}) = 2x\cos xy - x^{2}y\sin xy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ کامل است.

$u(x,y) = \int (x^{2}\cos xy)\,dy + g(x) = x^{2} \times \frac{1}{x}\sin xy + g(x) = x\sin xy + g(x)$

$\frac{du}{dx} = \sin xy + y\cos xy\,(x) + g'(x) = \sin xy + xy\cos xy + g'(x)$

$\cancel{\sin xy} + \cancel{xy\cos xy} = \cancel{\sin xy} + \cancel{xy\cos xy} + g'(x) \qquad g'(x) = 0$

$g(x) = C \quad \Rightarrow \quad \underline{u(x,y) = x\sin xy + C}$

EX: $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^{2}}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^{2}} + x^{2} - \ln x\right)dy = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^{2}}} + 2x - \frac{1}{x} \\ \qquad = \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^{2}}} + 2x - \frac{1}{x} \end{array}\right\}$$

چون شرط برقرار است معادله کامل میباشد

$$\sec^2 x = (1+tg^2 x)$$



$$u = \int \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right) dy + g(x)$$

$$u = y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - y\ln x + g(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} + g'(x) = \frac{yx}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} + g'(x)$$

$$\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x} + g'(x) \qquad g'(x) = 0 \qquad g(x) = C$$

$$u = y\sqrt{1+x^2} + x^2 y - y\ln x + C$$

EX: $\left(3x^2 \, tg\, y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(x^3 \sec^2 y + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= 3x^2(1+tg^2 y) - \frac{2}{x^3}\cdot 3y^2 = 3x^2(1+tg^2 y) - \frac{6}{x^3}y^2 \\ \frac{dQ}{dx} &= 3x^2\sec^2 y - \frac{6y^2 \cdot x}{x^4} = 3x^2(1+tg^2 y) - \frac{6y^2}{x^3} \end{aligned}\right\} \text{شرط کامل بودن برقرار}$$

$$u = \int\left(3x^2\, tg\, y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + g(y) = tg\, y \cdot \frac{3}{3}x^3 - \int 2y^3 \cdot x^{-3} + g(y)$$

$$x^3\, tg\, y - \frac{2y^3}{-2}x^{-2} = x^3\, tg\, y + \frac{y^3}{x^{2}} + g(y)$$

$$u = x^3\, tg\, y + \frac{y^3}{x^2} + g(y)$$

$$\frac{du}{dy} = x^3(1+tg^2 y) + \frac{1}{x^2}\times 3y^2 + g'(y) = x^3(1+tg^2 y) + \frac{3y^2}{x^2} + g'(y)$$

$$x^3 \cancel{\sec^2 y} + 4y^3 + \cancel{\frac{3y^2}{x^2}} = x^3(\cancel{1+tg^2 y}) + \cancel{\frac{3y^2}{x^2}} + g'(y)$$

$$g'(y) = 4y^3 \implies \int g'(y) = \int 4y^3 \qquad g(y) = \frac{4}{4}y^4 = y^4$$

$$u = x^3 + 9y + \frac{y^3}{x^2} + y^4 + c$$

فاکتورهای انتگرال:

اگر معادله $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ تابع کامل نباشد و تابع $f(x,y)$ یافت شود به طوری که چنانچه این تابع را در معادله ضرب نمائیم معادله به یک معادله کامل تبدیل شود در این صورت $f(x,y)$ را یک فاکتور انتگرال یا یک عامل انتگرال ساز می‌نامیم.

مثال) نشان دهید تابع $f(x,y) = \frac{1}{x^2}$ یک تابع فاکتور انتگرال معادله $(x+y^2)dx - 2xy\,dy = 0$ می‌باشد.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \qquad \frac{1}{x^2} \times \left[(x+y^2)dx - 2xy\,dy\right] = 0$$

$$\left(\frac{x}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2xy}{x^2}dy = 0 \Longrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2y}{x}dy = 0$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \times 2y = \frac{2y}{x^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{x^2} \end{array} \right\} =$$ معادله به کامل تبدیل شد

روش های پیدا کردن فاکتورهای انتگرال:

اگر معادله $P(x,y) + Q(x,y) = 0$ معادله کامل نباشد در حالات زیر میتوان فاکتور انتگرال برای آن پیدا کرد

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \neq 0$ کامل نباشد $\Longrightarrow P(x,y) + Q(x,y) = 0$

حالت اول: کامل نباشد $\Rightarrow \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x)$

فاکتور انتگرال $f(x,y)=e^{\int f(x)\,dx}$

$$EX:\ \overbrace{(x+y^2)}^{P}dx-\overbrace{2xy}^{Q}dy=0$$

$$\left\{\frac{\partial P}{\partial y}=2y \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y\right. \Longrightarrow \text{کامل نیست}$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=f(x) \Longrightarrow \frac{1}{-2xy}(2y+2y)=\frac{4y}{-2xy}=\frac{-2}{x}$$

فاکتور انتگرال $f(x,y)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\int \frac{1}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}$

$$=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

$$EX:\ \overbrace{(x^4\ln x-2xy^3)}^{P}dx+(\overbrace{3x^2y^2}^{Q}dy)=0$$

$\frac{\partial P}{\partial y}=-6xy^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=6xy^2$ کامل نیست.

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=\frac{1}{3x^2y^2}(-6xy^2-6xy^2)=\frac{1}{3x^2y^2}(-12xy^2)=$$

$$\frac{-12xy^2}{3x^2y^2}=\frac{-4}{x}$$

$$f(x,y)=e^{\int f(x)dx}=e^{\int\frac{-4}{x}dx}=e^{-4\int\frac{1}{x}dx}=e^{-4\ln x}=$$

$$e^{\ln x^{-4}}=e^{\log_e x^{-4}}=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$$

حال با فاکتور انتگرال $\frac{1}{x^4}$ معادله را تبدیل به کامل می‌کنیم.

$$\frac{1}{x^4}\left[(x^4\ln x-2xy^3)\,dx+(3x^2y^2\,dy)\right]=0$$

$$\left(\frac{x^4\ln x}{x^4}-\frac{2xy^3}{x^4}\right)dx+\left(\frac{3x^2y^2}{x^4}\right)dy=0$$

$$\left(\ln x-\frac{2y^3}{x^3}\right)dx+\left(\frac{3y^2}{x^2}\right)dy=0$$

$$u=\int\frac{3y^2}{x^2}\,dy+g(x)=\frac{3}{x^2}\times\frac{1}{3}\cdot y^3+g(x)=\frac{y^3}{x^2}+g(x)$$

$$\frac{du}{dx}=-\frac{2x\cdot y^3}{x^4}+g'(x)=-\frac{2y^3}{x^3}+g'(x)$$

$$\ln x-\cancel{\frac{2y^3}{x^3}}=-\cancel{\frac{2y^3}{x^3}}+g'(x)\qquad g'(x)=\ln x$$

$$g(x)=\int\ln x=x\ln x-x+c$$

$$u=\frac{y^3}{x^2}+x\ln x-x+c\ :\ \text{جواب کلی}$$

EX: یک فاکتور انتگرال برای معادله زیر پیدا کنید.

$$(2x^2y+2y+5)\,dx+(2x^3+2x)\,dy=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x^2+2\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}=6x^2+2\ \longrightarrow\ \text{کامل نیست}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=(6x^2+2)-(2x^2+2)=-4x^2$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{2x^3+2x}(-4x^2)=\frac{-4x^2}{2x(x^2+1)}=\frac{-2x}{1+x^2}$$

فاکتور انتگرال: $f(x,y)=e^{\int R(x)dx}=e^{\int\frac{-2x}{1+x^2}}=e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}}=e^{-\ln(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$

حالت دوم: اگر معادله $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ کامل نباشد و داشته باشیم $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$ در آن صورت فاکتور انتگرال می‌شود

$$f(x,y) = e^{-\int f(y)dy}$$

EX: با پیدا کردن فاکتور انتگرال معادله زیر را حل نمائید.

$$(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy - 9y^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3y^2$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = (4xy - 9y^2) - (-3y^2) = 4xy - 9y^2 + 3y^2 = 4xy - 6y^2$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy^2 - 3y^3}(4xy - 6y^2) = \frac{2y(2x - 3y)}{y^2(2x - 3y)} = \frac{2y}{y^2} = \frac{2}{y}$$

$$f(x,y) = e^{-\int f(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\int\frac{dy}{y}} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$$

حال فاکتور انتگرال را در معادله ضرب می‌کنیم.

$$\frac{1}{y^2}\left[(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy\right] = 0$$

$$(2x - 3y)dx + \left(\frac{7}{y^2} - 3x\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -3 \longrightarrow$$ کامل می‌شد

$$u(x,y) = \int (2x - 3y)dx + g(y) = \frac{2}{2}x^2 - 3xy + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -3x + g'(y) \qquad \frac{7}{y^2} - 3x = -3x + g'(y)$$

$$g'(y) = \frac{7}{y^2} \implies \int g'(y) = \int \frac{7}{y^2}\,dy \qquad g(y) = -\frac{7}{y} + c$$

$$u(x,y) = x^2 - 3xy - \frac{7}{y} + c$$

با پیدا کردن فاکتور انتگرال معادله زیر را حل نمائید.

$$(2xy \ln y)\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\,dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (2x \cdot \ln y) + \left(\frac{1}{y} \cdot 2xy\right) = 2x \ln y + 2x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = (2x \ln y + 2x) - (2x) = 2x \ln y$$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{2xy \ln y} \cdot 2x \ln y = \frac{1}{y}$$

$$f(x) = e^{-\int P(y)\,dy} = e^{-\int \frac{1}{y} dy} = e^{-\ln y} = y^{-1} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{y}\left[(2xy \ln y)\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\,dy\right] = 0$$

$$(2x \ln y)\,dx + \left(\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{y} \implies$$ کامل است

$$u(x,y) = \int 2x \ln y + g(y) = x^2 \ln y + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^2}{y} + g'(y) \implies \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1} = \frac{x^2}{y} + g'(y)$$

$$g'(y) = y\sqrt{y^2+1}$$

$g'(y) = \frac{1}{2} \times 2y\sqrt{y^2+1}$ $\qquad g(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(y^2+1)$

$\Longrightarrow u(x,y) = x^2 \operatorname{Ln} y + \frac{1}{3}(y^2+1)$

حالت سوم:

معادله $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ کامل نباشد. فرض می‌کنیم فاکتور انتگرال به شکل $f(x,y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ این فاکتور را در معادله ضرب می‌کنیم سپس شرط کامل بودن را بررسی می‌کنیم اگر برای $\alpha$ و $\beta$ جواب حقیقی بدست آید در این صورت معادله با این روش قابل حل میباشد

EX: $y(2-3xy)dx - x\,dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 - 6xy \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 3 - 6xy$

$\xrightarrow{x^{\alpha}y^{\beta} \times} y(2-6xy)dx - x\,dy = 0 \Longrightarrow (2y - 3xy^2)dx - x\,dy = 0$

$\Longrightarrow (2x^{\alpha}y^{\beta+1} - 3x^{\alpha+1}y^{2+\beta})dx - (x^{\alpha+1}y^{\beta})dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ شرط کامل بودن $\Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$2x^{\alpha}(\beta+1)y^{\beta} - 3x^{\alpha+1}(2+\beta)y^{\beta+1} = -(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$

$2(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} - 3(2+\beta)x^{\alpha+1}y^{\beta+1} = -(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}$

$$\begin{cases} 2\beta+2 = -(\alpha+1) \\ 2+\beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = -\alpha-1 \\ \beta = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases} \qquad f(x,y) = xy^{-2}$$

با استفاده از فاکتور انتگرال معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید.

$$y(y^2-2x^2)dx + x(2y^2-x^2)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2-2x^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y^2-3x^2$$

$$\xrightarrow{x^\alpha y^\beta} \times \left\{ (y^3-2x^2y)dx + (2xy^2-x^3)dy = 0 \right\}$$

$$(x^\alpha y^{3+\beta} - 2x^{2+\alpha}y^{\beta+1})dx + (2x^{1+\alpha}y^{2+\beta} - x^{3+\alpha}y^\beta)dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow$$

$$(\beta+3)x^\alpha y^{\beta+2} - 2(\beta+1)x^{\alpha+2}y^\beta = 2(1+\alpha)x^\alpha y^{\beta+2} - (\alpha+3)x^{\alpha+2}y^\beta$$

$$\begin{cases} \beta+3 = 2(1+\alpha) \\ (\alpha+3) = 2(\beta+1) \end{cases} \quad \begin{cases} \beta+3 = 2+2\alpha \\ \alpha+3 = 2\beta+2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha-\beta = 1 \\ (-\alpha+2\beta = 1)\times 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha-\beta = 1 \\ -2\alpha+4\beta = 2 \end{cases}$$

$$+3\beta = 3 \qquad \beta = 1 \qquad \alpha = 1$$

$f(x,y) = xy$ فاکتور انتگرال گیری

معادلات خطی مرتبه یک : هر معادله که به فرم $A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y+C(x)=0$

معادله خطی مرتبه 1 است و برای حل آن ابتدا آن را به فرم استاندارد در می‌آوریم و سپس

به روش معادلات کامل فاکتور انتگرال برای آن پیدا می‌کنیم و فرمول کلی حل آن را بیان می‌کنیم

$$\frac{1}{A(x)}\left[A(x)\frac{dy}{dx}+B(x)y+C(x)\right]=0$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{B(x)}{A(x)}y=\frac{-C(x)}{A(x)} \longrightarrow y'+P(x)y=q(x)$$ فرم استاندارد

حال اگر

$q(x)=0 \Rightarrow y'+P(x)y=0$ همگن است و از روش جدائی پذیر حل می‌شود.

$q(x)\neq 0 \Rightarrow$ روش کلی حل را بیان می‌کنیم

$$y'+P(x)y=q(x) \xrightarrow{\times dx} \left[\frac{dy}{dx}\times dx\right]+P(x).y.dx=q(x).dx$$

$$P(x)y\,dx-q(x)dx+dy=0 \longrightarrow \underbrace{(P(x)y-q(x))}_{P}dx+\underbrace{dy}_{Q}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=P(x) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=P(x) \longrightarrow$$ فاکتور انتگرال گیری $f(x,y)=e^{\int P(x)dx}$

$$y'e^{\int P(x)dx}+P(x)y\,e^{\int P(x)dx}=q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

$$\rightarrow \int\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int P(x)dx}\right)=\int q(x)\,e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad y e^{\int p(x)dx} = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx$$

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx$$ فرمول کلی

معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y' + 2y = e^{x}$$ فرم استاندارد است

$$y = e^{-\int 2dx} \int e^{\int 2dx} e^{x} dx = e^{-2x} \int e^{2x} . e^{x} . dx = e^{-2x} \int e^{3x} dx$$

$$= e^{-2x} \left(\frac{1}{3} e^{3x} + c\right) = \frac{1}{3} e^{x} + c e^{-2x}$$

مثال:

$$tg x\, y' + y = 3x \sec x$$

$$\frac{1}{tg x} \left[ tg x\, y' + y = 3x \sec x \right]$$

$$y' + \frac{y}{tg x} = \frac{3x \sec x}{tg x} \qquad y' + y \cot x = 3x \csc x$$

$$y = e^{-\int \cot x . dx} \int e^{\int \cot x . dx} . 3x \csc x . dx =$$

$$y = e^{-\ln|\sin x|} \int e^{\ln|\sin x|} 3x . \csc x . dx =$$

$$\frac{1}{\sin x} \int \sin x . \left(3x \times \frac{1}{\sin x}\right) dx = \frac{1}{\sin x} \left(\frac{3}{2} x^2 + c\right)$$

تذکر: اگر در معادله ای $x$ تابعی از $y$ باشد نقش $x$ و $y$ عوض می شود در این گونه معادلات

معادلات را بر حسب $x$ مرتب می کنیم پس از روش حل معادلات خطی مرتبه 1 استفاده

می کنیم.

$$x' + P(y)\,x = q(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \longrightarrow x = e^{-\int P(y)\,dy} \int e^{\int P(y)\,dy}\, q(y)\, dy$$

EX: $$y' = \frac{y}{x + y^3} \xrightarrow{\text{معکوس می کنیم}} x' = \frac{x + y^3}{y}$$

$$x' = \frac{x}{y} + \frac{y^3}{y} \qquad x' - \frac{x}{y} = y^2$$

$$\rightarrow x = e^{\int \frac{1}{y} \cdot dy} \int e^{\int -\frac{1}{y} \cdot dy} \cdot y^2 \cdot dy =$$

$$x = e^{\ln y} \int e^{-\ln y} \cdot y^2\, dx = y\left(\frac{y^2}{2} + c\right)$$

معادله دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$(1+y^2)\,dx - \left(\sqrt{1+y^2}\,\cos y - xy\right) dy = 0$$

$$(1+y^2)\,dx = \left(xy - \sqrt{1+y^2}\,\cos y\right) dy$$

$$1+y^2 = y'\left(xy - \sqrt{1+y^2}\,\cos y\right) \Longrightarrow y' = \frac{1}{x'}$$

$$x'(1+y^2) = xy - \sqrt{1+y^2}\,\cos y$$

$$x' = \frac{xy}{1+y^2} - \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2}\cos y \qquad x' - \frac{y}{1+y^2}x = \frac{-\cos y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$x = e^{-\int p(y)\,dy}\int e^{\int p(y)\,dy}\, q(y)\,dy \Rightarrow$$

$$x = -e^{\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy}\int e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2}dy}\,\frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}} = -e^{\ln(1+y^2)}\int \cos y\,dy$$

$$x = -(1+y^2)(\sin y + C)$$

معادلاتی که قابل تبدیل به معادله خطی مرتبه یک می‌باشد:

۱- معادله برنولی: هر معادله‌ای که به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^n \ (n \neq 0,1)$ باشد

معادله برنولی نامیده می‌شود برای حل آن با انتخاب متغیر مناسب می‌توان آن را به یک

معادله خطی تبدیل کرد. و سپس حل نمود.

طرفین معادله $\div y^n \Rightarrow \dfrac{y'}{y^n} + \dfrac{p(x)y}{y^n} = \dfrac{q(x)y^n}{y^n}$

$$\Longrightarrow y'y^{-n} + p(x)\,y^{1-n} = q(x) \quad \text{(I)}$$

$$y^{1-n} = u \Rightarrow u' = (1-n)\,y'\,y^{-n} \quad \text{(II)}$$

$$\text{(I)(II)} \Rightarrow \frac{u'}{1-n} + p(x)u = q(x) \qquad u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

$\underline{u' + P(x)u = Q(x)}$ خطی مرتبه ۱ برحسب $u$

مثال ۱) $y' - y = xy^2$

$\div y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} - \frac{y}{y^2} = \frac{xy^2}{y^2} \Rightarrow y'y^{-2} - y^{1-2} = x$

$y'y^{-2} - y^{-1} = x$ (I)   $\begin{cases} y^{-1} = u & (II) \\ u' = -y'y^{-2} \end{cases}$

$\xrightarrow{(I),(II)} -u' - u = x \Rightarrow \underline{u' + u = -x}$   خطی مرتبه ۱

$\Rightarrow u = e^{-\int dx} \int e^{\int dx}(-x)\,dx = e^{-x}\int e^{x}(-x)\,dx = ?$

بقیه را حل کنیم

مثال ۲) $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$

$\div 3x \Rightarrow \frac{3xy'}{3x} - \frac{2y}{3x} = \frac{x^3}{3xy^2} \Rightarrow y' - \frac{2y}{3x} = \frac{x^2}{3y^2}$

$\times y^2 \Rightarrow y'y^2 - \frac{2y^3}{3x} = \frac{x^2}{3}$ (I)

$\{ y^3 = u \rightarrow 3y^2y' = u'$ (II)   $\frac{u'}{3} = y^2y'$

$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{u'}{3} - \frac{2}{3x}u = \frac{1}{3}x^2 \xrightarrow{\times 3} \underline{u' - \frac{2}{x}u = x^2}$

معادله خطی مرتبه ۱

$\Rightarrow u = e^{\int \frac{2}{x}dx} \int e^{-\int \frac{2dx}{x}} (x^2)\,dx =$

$= e^{2\ln x} \int e^{-2\ln x}(x^2)\,dx = x^2 \int \frac{1}{x^2} x^2\,dx = x^2 \int dx =$

$= x^2(x + c)$   $\underline{y^3 = x^3 + cx^2}$

تذکر: اگر در معادله برنولی شکل معادله به فرم $\frac{dx}{dy}+x f(y)=x^n g(x)$ باشد یعنی نقش x و y عوض شده باشد ابتدا طرفین را بر $x^n$ تقسیم می‌کنیم آنگاه $x^{1-n}$ را u در نظر می‌گیریم.

$$y'=\frac{3x^2}{x^3+y+1} \qquad \frac{1}{x'}=\frac{3x^2}{x^3+y+1} \Longrightarrow 3x^2x'=x^3+y+1$$

$$3x^2x'-x^3=y+1 \qquad u'-u=(y+1) \qquad \begin{cases} x^3=u \\ 3x^2x'=u' \end{cases}$$

$$\Longrightarrow u=e^{\int dy}\left(\int e^{-\int dy}(y+1)\,dy\right) \Rightarrow$$

$$x^3=e^{y}\left(\int e^{-y}(y+1)\,dy\right)=e^{y}\int(ye^{-y}+e^{-y})\,dy=$$

جزء به جزء

$$x^3=e^{y}(ye^{-y}-2e^{-y}+c)$$

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y^2-4} \qquad \frac{1}{x'}=\frac{2xy}{x^2-y^2-4} \qquad 2xx'y=x^2-y^2-4$$

$$\xrightarrow{\div y} \quad 2xx'=\frac{x^2}{y}-y-\frac{4}{y} \quad \text{یا} \quad 2xx'=\frac{x^2}{y}-\frac{(y^2+4)}{y}$$

$$\begin{cases} x^2=u \\ 2xx'=u' \end{cases} \longrightarrow u'-\frac{1}{y}u=-\frac{y^2+4}{y}$$

$$u=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(-\int e^{-\int\frac{1}{y}dy}\left(\frac{y^2+4}{y}\right)dy\right) \longrightarrow x^2=y\left(-\int\frac{y^2+4}{y}\,dy\right)$$

$x^2=y(-y+\frac{4}{y}+c)$ جواب عمومی

۲) معادله ریکاتی: هر معادله به فرم $y' + P_1(x)y^2 + P_2(x)y + P_3(x) = 0$ ($P_1(x) \neq 0$) باشد معادله ریکاتی نامیده می‌شود.

در صورتیکه یک جواب خصوصی آن مانند $y_1 = f_1(x)$ در اختیار باشد جواب عمومی آن به فرم $y = y_1 + \frac{1}{z}$ در نظر می‌گیریم و سپس به شکل زیر $z$ را از حل معادله خطی مرتبه یک زیر بدست می‌آوریم.

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \longrightarrow y' = y_1' - \frac{z'}{z^2}$$

$$y_1' - \frac{z'}{z^2} + P_1(x)\left(y_1^2 + \frac{2y_1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + P_2(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + P_3(x) = 0$$

$$\underbrace{\left(y_1' + P_1(x)y_1^2 + P_2(x)y_1 + P_3(x)\right)}_{0} + \left(\frac{-z'}{z^2} + \frac{P_1(x)(2y_1)}{z} + \frac{P_1(x)}{z^2} + \frac{P_2(x)}{z}\right) = 0$$

$$z' - P_1(x)(2y_1)z - P_1(x) - zP_2(x) = 0$$

$$z' - \left(2y_1 P_1(x) + P_2(x)\right)z = P_1(x) \qquad z = ?$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل نمائید.

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \qquad y_1(x) = x$$

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \Longrightarrow y = x + \frac{1}{z} \Longrightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2}$$

$$1 - \frac{z'}{z^2} = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \longrightarrow 1 - \frac{z'}{z^2} = 1 + \left(x + \frac{1}{z}\right)\frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 \frac{1}{x^2}$$

$$\cancel{1} - \frac{z'}{z^2} = \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{1}{xz} - \cancel{1} - \frac{2}{xz} - \frac{1}{z^2 x^2}$$

$$z' - \frac{1}{x} z + \frac{2}{x} z = \frac{1}{x^2}$$

$$z' + \left(\frac{1}{x}\right) z = \frac{1}{x^2} \xrightarrow{\text{خطی رتبه اول}} z = ?$$

EX2) $y' = 2\operatorname{tg} x \sec x - y^2 \sin x \qquad y_1(x) = \sec x$

$$y' + y^2 \sin x - 2\operatorname{tg} x \sec x = 0 \qquad \begin{cases} P_1(x) = \sin x \\ P_2(x) = 0 \\ P_3(x) = -2\operatorname{tg} x \sec x \end{cases}$$

$$z' - (2\sec x \times \sin x + 0) z = \sin x \longrightarrow z' - 2\operatorname{tg} x\, z = \sin x$$

خطی رتبه اول $\quad z = e^{\int 2\operatorname{tg} x\, dx} \int e^{-\int 2\operatorname{tg} x\, dx} \sin x \, dx$

$$= e^{-2\ln \cos x} \int e^{2\ln \cos x} \sin x \, dx = \frac{1}{\cos^2 x} \int \cos^2 x \sin x \, dx =$$

$$\left(\frac{-\cos^3 x}{3} + C\right) \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{3} \cos x + \frac{C}{\cos^2 x}$$

تذکر: بعضی از معادلات با انتخاب متغیرهای مناسب قابل تبدیل به یک معادله خطی مرتبه ۱ می باشند به طور مثال:

$$\underbrace{y' \cos y}_{u'} + \underbrace{\sin y}_{u} = x + 1$$

$$u' + u = x + 1 \longrightarrow \sin y = e^{-\int dx} \int e^{\int dx} (x+1)\, dx =$$

$$= e^{-x} \int e^{x} (x+1)\, dx = e^{-x}(x e^{x} + C)$$

$xy' + 2y = \frac{\ln x}{x^2}$ فرض $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

$\div x \longrightarrow y' + \frac{2}{x} y = \frac{\ln x}{x^3}$

$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \int e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\frac{\ln x}{x^3}\right) dx = e^{-2\ln x} \int e^{2\ln x} \left(\frac{\ln x}{x^3}\right) dx =$

$e^{\ln x^{-2}} \int e^{\ln x^2} \left(\frac{\ln x}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2} \int x^2 \left(\frac{\ln x}{x^3}\right) dx = \frac{1}{x^2} \int \frac{\ln x}{x} dx =$

$y = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2} \ln^2(x) + C\right)$ جواب عمومی

$\xrightarrow[y=3]{x=1} 3 = \frac{1}{1}\left(1/2 \ln^2(1) + C\right) \Longrightarrow C = 3$

$\Longrightarrow y = \frac{\ln^2 x}{2x^2} + \frac{3}{x^2}$ جواب خصوصی

تمرین:

$y' + 4xy = 2x e^{-x^2} \sqrt{y}$

معادلاتی که نسبت به مشتق حل نشده

۸- هر معادله‌ای را نتوان $y'$ را برحسب $y$ و $x$ حساب کرد اصطلاحاً گوئیم نسبت به مشتق حل نشده

برای حل چنین معادلاتی در هر یک از حالات زیر روش‌های جداگانه‌ای بیان می‌کنیم.

حالت اول ) معادله فاقد $y$ و $x$ باشد: در این حالت با انتخاب $y'=P$ معادله به یک معادله معمولی تبدیل شده و به صورت زیر حل می‌شود.

$1)\ F(y')=0$ فاقد $x$ باشد

$$y'=P \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=P \longrightarrow dy=P\,dx \qquad F(P)=0$$

مثال:

$$y'^2-3y'+2=0 \qquad y'=P \qquad P^2-3P+2=0 \quad \begin{cases} P=2 \\ P=1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$P=\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2 & dy=2dx & \boxed{y=2x+c_1} \\ \dfrac{dy}{dx}=1 & dy=dx & \boxed{y=x+c_2} \end{cases}$$

حالت دوم ) معادله‌ای که فاقد $x$ باشد:

$$F(y,y')=0 \longrightarrow y=f(y') \qquad y'=P$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx}=P \longrightarrow dy=P\,dx \qquad y=f(P)$$

$$dy=f'(P)dP \longrightarrow P\,dx=f'(P)\,dP \qquad dx=\frac{f'(P)}{P}dP$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=\displaystyle\int \frac{f'(P)}{P}dP \\ y=f(P) \end{cases}$$

جواب پارامتری

Subject:

Year. 200 Month. Day.

EX: $y = y'^2 e^{y'}$ ← y تابعی از $y'$ است

$$\begin{cases} y' = p \\ dy = p\,dx \end{cases} \qquad y = p^2 e^p \longrightarrow dy = (2pe^p + e^p p^2)\,dp$$

$$\longrightarrow p\,dx = (2pe^p + e^p p^2)\,dp \xrightarrow{\div p} dx = (2e^p + e^p p)\,dp$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = \int (2e^p + e^p p)\,dp \\ y = p^2 e^p \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2e^p + pe^p - e^p = e^p + pe^p \\ y = p^2 e^p \end{cases}$$

۴) حالت سوم: معادله فاقد y باشد: در این حالت $y' = p$ و معادله را به شکل زیر بررسی می‌کنند

$$f(x, y') = 0 \qquad x = f(y') \qquad y' = p \longrightarrow \frac{dy}{dx} = p \longrightarrow \frac{dy}{p} = dx$$

$$x = f(p) \longrightarrow dx = f'(p)\,dp \longrightarrow \frac{dy}{p} = f'(p)\,dp$$

$$dy = p f'(p)\,dp \longrightarrow \begin{cases} y = \int p f'(p)\,dp \\ x = f(p) \end{cases}$$

EX: $x = \ln y' + \sin y'$ فاقد y است $\longrightarrow y' = p \longrightarrow dx = \frac{dy}{p}$

$$x = \ln p + \sin p \xrightarrow{\text{مشتق}} dx = \frac{dp}{p} + \cos p \cdot dp$$

$$\frac{dy}{p} = \frac{dp}{p} + \cos p \cdot dp \xrightarrow{\times p} dy = dp + \cos p \cdot p \cdot dp$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = \int dp + \int p \cdot \cos p \cdot dp = p + \int p \cdot \cos p \cdot dp \\ x = \ln p + \sin p \end{cases}$$

$EX_2)\quad x = y'^2 + y'^3$ ناقص است $\quad y' = p \rightarrow \frac{dy}{p} = dx$

$x = p^2 + p^3 \xrightarrow{\text{مشتق}} dx = 2p\,dp + 3p^2\,dp \longrightarrow \frac{dy}{p} = (2p + 3p^2)\,dp$

$dy = (2p^2 + 3p^3)\,dp \Longrightarrow \begin{cases} y = \int (2p^2 + 3p^3)\,dp = \frac{2}{3}p^3 + \frac{3}{4}p^4 + c \\ x = p^2 + p^3 \end{cases}$

۴) معادله کلرو: هر معادله که به فرم $y = xy' + f(y')$ باشد معادله کلرو نامیده شد

برای حل آن با انتخاب $y' = p$ آن را حل می‌کنیم.

$\begin{cases} y = xy' + f(y') \\ y' = p \Rightarrow dy = p\,dx \end{cases} \longrightarrow y = px + f(p) \longrightarrow dy = p\,dx + x\,dp + f'(p)\,dp$

$\cancel{p\,dx} = \cancel{p\,dx} + x\,dp + f'(p)\,dp \longrightarrow (x + f'(p))\,dp = 0$

$\begin{cases} dp = 0 \longrightarrow \boxed{p = c} \xrightarrow[\text{شود}]{\text{در معادله گذاشته}} y = cx + f(c) \\ x + f'(p) = 0 \quad x = -f'(p) \quad \text{جواب غیرعادی} \end{cases}$

$EX:\quad y = xy' + y'^2$ معادله کلرو $\quad y' = p \quad \frac{dy}{dx} = p \quad dy = p\,dx$

$y = xp + p^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} dy = p\,dx + x\,dp + 2p\,dp$

$\cancel{p\,dx} = \cancel{p\,dx} + x\,dp + 2p\,dp \longrightarrow (x\,dp + 2p\,dp) = 0$

$\longrightarrow (x + 2p)\,dp = 0 \longrightarrow \begin{cases} dp = 0 \quad \boxed{p = c} \\ x + 2p = 0 \quad x = -2p \quad \text{غیرعادی} \end{cases}$

$\Longrightarrow \boxed{y = cx + c^2}$

۵) معادله لاگرانژ: هر معادله به فرم $y = x f(y') + g(y')$ معادله لاگرانژ میباشد

برای حل آن با انتخاب $y' = p$ معادله را به شکل زیر حل می‌کنیم

$$y = x f(y') + g(y') \xrightarrow{y' = p} y = x f(p) + g(p)$$

$\xrightarrow{\text{مشتق}}$ $dy = f(p)\,dx + x f'(p)\,dp + g'(p)\,dp$

$$p\,dx = f(p)\,dx + x f'(p)\,dp + g'(p)\,dp$$

$$p\,dx - f(p)\,dx = x f'(p)\,dp + g'(p)\,dp \longrightarrow (p - f(p))\,dx = (x f'(p) + g'(p))\,dp$$

$\dfrac{dx}{dp} - \dfrac{x f'(p)}{p - f(p)} = \dfrac{g'(p)}{p - f(p)}$ معادله خطی مرتبه 1

$$\begin{cases} x = e^{\int \frac{f'(p)}{p - f(p)} dp} \displaystyle\int e^{-\int \frac{f'(p)}{p - f(p)}} \left( \dfrac{g'(p)}{p - f(p)} \right) dp \\ y = x f(p) + g(p) \end{cases}$$

مثال: $y = 2xy' + y'^2$ $\quad y' = p \quad \dfrac{dy}{dx} = p \quad dy = dx\,p$

$$y = 2xp + p^2 \longrightarrow dy = 2p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp$$

$$dx\,p = 2p\,dx + 2x\,dp + 2p\,dp \longrightarrow -p\,dx = 2x\,dp + 2p\,dp$$

$$-p\,dx = (2x + 2p)\,dp \longrightarrow \frac{dx}{dp} = \left(\frac{2x}{-p} - 2\right) dp \longrightarrow x' + \frac{2x}{p} = -2$$

معادله خطی مرتبه ۱

$$x = e^{-\int \frac{2}{p} dp} \int e^{\int \frac{2}{p} dp} (-2)\,dp = e^{-2\ln p} \int e^{2\ln p} (-2)\,dp$$

$$= \frac{1}{p^2}\int p^2(-2) \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{p^2}\left(-\frac{2}{3}p^3 + c\right) \\ y = 2xp + p^2 \end{cases}$$

معادلات مرتبه ۲ و بالاتر:

هر معادله ای به فرم $f_1(x)y^{(n)} + f_2(x)y^{(n-1)} + \dots + f_n y = Q(x)$ یک معادله

مرتبه n می نامیم که در صورتی که $Q(x)=0$ باشد معادله را مرتبه n همگن و در صورتی که $f_i$ ها اعداد ثابت

باشند معادله را مرتبه n همگن با ضرایب ثابت می نامیم. $a_1y^{(n)} + a_2y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$

$f_1(x) \neq 0$

برای حل چنین معادلاتی ابتدا معادلات مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت را حل می کنیم و به کمک آن

روش کلی حل معادلات مرتبه n همگن با ضرایب ثابت را بیان می کنیم.

روش حل معادلات مرتبه ۲ همگن با ضرایب ثابت:

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

$$\begin{cases} y = e^{rx} \\ y' = re^{rx} \\ y'' = r^2e^{rx} \end{cases} \longrightarrow a_1r^2e^{rx} + a_2re^{rx} + a_3e^{rx} = 0$$

$e^{rx}(a_1r^2 + a_2r + a_3) = 0 \longrightarrow a_1r^2 + a_2r + a_3 = 0$ معادله مشخصه معادله دیفرانسیل

پس از تشکیل معادله مشخصه (مفسر) معادله دیفرانسیل یکی از حالات زیر اتفاق می افتد در هر حالت جواب

معادله دیفرانسیل را به شکل زیر حساب می کنیم

نکات: نکته ۱) اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$، n جواب مستقل خطی از معادله دیفرانسیل

باشد جواب عمومی معادله ترکیب خطی هر جوابی است

تعریف استقلال خطی: $n$ جواب $y_1, y_2, \dots, y_n$ را مستقل خطی می‌گوییم در

صورتیکه رونسکین آن‌ها تابعی برحسب $x$ باشد.

روش حل:

$$a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

$$a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0 \quad \begin{cases} 1)\ \Delta > 0 \longrightarrow r_1 \neq r_2 \\ 2)\ \Delta = 0 \longrightarrow r_1 = r_2 \\ 3)\ \Delta < 0 \longrightarrow \begin{cases} r_1 = p + iq \\ r_2 = p - iq \end{cases} \end{cases}$$

1) $\Delta > 0$

$$r_1 \neq r_2 \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ y_2 = e^{r_2 x} \end{cases} \longrightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

2) $\Delta = 0$

$$r_1 = r_2 \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ y_2 = x e^{r_2 x} \end{cases} \longrightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x}$$

3) $\Delta < 0$

$$\longrightarrow \begin{cases} r_1 = p + iq \\ r_2 = p - iq \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{(p+iq)x} \\ y_2 = e^{(p-iq)x} \end{cases}$$

$$\longrightarrow y = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$$

مثال:

1) $y''-3y'+2y=0 \qquad r^2-3r+2=0 \qquad (r-2)(r-1)=0 \quad \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=1 \end{cases}$

$y=c_1e^{2x}+c_2e^{x}$

2) $y''-4y'+4y=0 \qquad r^2-4r+4=0 \qquad (r-2)(r-2)=0 \quad \begin{cases} r_1=2 \\ r_2=2 \end{cases}$

$y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

3) $y''+2y'+4y=0 \qquad r^2+2r+4=0$

$\Delta=(2)^2-4(1)(4)=4-16=-12<0$

$r_1,r_2=\frac{-1\mp\sqrt{1-4}}{1}=-1\mp\sqrt{3i}=\overbrace{-1}^{p}\mp\overbrace{\sqrt{3}}^{q}\,i$

$y=e^{-px}(c_1\cos qx+c_2\sin qx)=e^{-x}(c_1\cos\sqrt{3}x+c_2\sin\sqrt{3}x)$

تعریف رونسکی: اگر $y_1$ و $y_2$ دو جواب معادله دیفرانسیل باشند رونسکی آنها به شکل زیر تعریف می‌شود.

$\begin{cases} y_1=e^{r_1x} \\ y_2=e^{r_2x} \end{cases}$

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=y_1y_2'-y_2y_1'$$

شرط لازم و کافی برای آنکه $y$ ها جواب مستقل خطی باشند آن است که رونسکی آن برابر صفر باشد

$$w(y_1,\dots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=0$$

روش حل معادلات مرتبه n همگن با ضرایب ثابت:

$$a_1 y^{(n)} + \cdots + a_n(y) = 0$$

$$a_1 r^n + a_2 r^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$$\begin{cases} r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \cdots \neq r_n \longrightarrow \begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ \vdots \\ y_n = e^{r_n x} \end{cases} \Rightarrow y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n \\ r_1 = \cdots = r_m \neq r_{m+1} \neq \cdots \neq r_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ y_2 = x e^{r_1 x} \\ \vdots \\ y_m = x^{m-1} e^{r_1 x} \\ y_{m+1} = e^{(r_{m+1})x} \\ y_n = e^{r_n x} \end{cases}$$

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

$$y^{(4)} - y^{(3)} - y'' + y = 0$$

$$r^4 - r^3 - r^2 + 1 = 0 \qquad r^2(r^2-1) - (r^2-1) = 0 \qquad (r^2-1)(r^2-1) = 0$$

$$(r-1)(r+1)(r^2-1)(r^2+1) = 0 \qquad (r-1)(r+1)(r-1)(r+1)(r^2+1) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = 1 \quad r_2 = -1 \quad r_3 = 1 \quad r_4 = -1 \longrightarrow \begin{cases} r_1 = r_3 \\ r_2 = r_4 \end{cases} \\ \longrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{x} & y_3 = c_3 e^{x} x \\ y_2 = c_2 e^{-x} & y_4 = c_4 x e^{-x} \end{cases} \end{cases}$$

$$r_5 = i \longrightarrow y_5 = \cos x$$

$$r_6 = -i \longrightarrow y_6 = \sin x$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 x e^{x} + c_4 x e^{-x} + c_5 \cos x + c_6 \sin x$$

حل معادلات مرتبه n غیرهمگن با ضرایب ثابت (روش ضرایب نامعین):

برای حل چنین معادلاتی جواب عمومی آن را به صورت $y = y_h + y_p$ در نظر می‌گیریم

که در آن $y_h$ جواب معادله همگن و $y_p$ با توجه به $Q(x)$ در حالات زیر طریقه محاسبه آن را بیان کنید.

$y = y_h + y_p$

$y_p$ یک جواب خصوصی که با توجه به وضعیت $P(x)$ در حالات زیر قابل محاسبه است. $y_h$ جواب معادله همگن متناظر است.

حالت اول: $Q(x)$ یک چندجمله‌ای درجه n باشد

$y_p = x^k$ (یک چندجمله‌ای کامل از درجه n با ضرایب نامعین)

k تعداد ریشه‌های برابر صفر معادله مفسر همگن متناظر است.

$$y''' - 3y'' + 2y' = 2x$$

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 2x \qquad r^3 - 3r^2 - 2r = 0 \qquad r(r-2)(r-1) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = 1 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{x} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{x}$$

$$y_p = x \underbrace{(Ax + B)}_{\text{چون } 2x \text{ معادله درجه یک (خطی) است}} = Ax^2 + Bx \quad \begin{cases} y' = 2Ax + B \\ y'' = 2A \\ y''' = 0 \end{cases}$$

به تعداد ریشه‌های صفر توان x می‌گذاریم چون فقط ($r_1 = 0$) یک ریشه صفر داشت پس توان x برابر با ($k=1$) است.

مشتق ها را در معادله می‌گذاریم $\Longrightarrow$ $0-3(2A)+2(2Ax+B)=2x$

$$0-6A+4Ax+2B=2x$$

$$\begin{cases} 4A=2 & A=\frac{1}{2} \\ 2B-6A=0 & 2B=3 \quad B=\frac{3}{2} \end{cases} \quad y_p=Ax^2+Bx=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$$

جواب عمومی $\quad y=y_h+y_p=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$

حالت دوم:

$Q(x)=e^{px}$ × چندجمله‌ای درجه n

$y_p=x^k e^{px}($ یک چندجمله‌ای کامل درجه n با ضرایب نامعین

k تعداد ریشه‌های برابر p معادله مشخصه است.

$$y'''-4y''+4y'=e^{2x}x^2$$

$$r^3-4r^2+4r=0 \qquad r(r^2-4r+4)=0 \qquad r(r-2)(r-2)=0 \quad \begin{cases} r_1=0 \\ r_2=2 \\ r_3=2 \end{cases}$$

$$y_h=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{r_3x}x=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$$

$$y_p=e^{2x}\,x^2\,(Ax^2+Bx+C)$$

چون k=2 دو تا ریشه برابر p بود (۲) بود — چون $x^2$ درجه دوم است

حالت ۳) $Q(x) = R(x)\sin qx + S(x)\cos qx$

$S(x)$ و $R(x)$ دو چند جمله‌ای از درجات $m$, $n$ باشند

$$y_p = x^k\left[M(x)\sin qx + N(x)\cos qx\right]$$

$k$ تعداد ریشه‌های $\pm iq$ معادله مشخصه باشد.

$M(x)$ و $N(x)$ دو چند جمله‌ای کامل با ضرایب نامعین از درجه $\deg Max\{m,n\}$

$y''' + y' = \underline{2x^2}\cos x + \underline{5}\sin x$ این قسمت را فرض می‌کنیم

$k=1$ چون فقط $\pm iq$ مورد قبول است یکی را از این نوع داریم.

$$r^3 + r = 0 \qquad r(r^2+1) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow r^2 = i^2 = q^2 \begin{cases} r = \mp i \\ r_{2,3} = \mp qi \end{cases} \to \begin{cases} q = 1 \\ r_{2,3} = -i \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^{0x} + c_2\cos x + c_3\sin x$$

$$y_p = x^1\left[(Ax^2+Bx+C)\cos x + (A'x^2+B'x+C')\sin x\right]$$

حالت چهارم: $Q(x) = e^{px}\left[R(x)\sin qx + S(x)\cos qx\right]$

$S(x)$ و $R(x)$ دو چند جمله‌ای از درجات $m$, $n$ باشند.

$$y_p = e^{px}x^k\left[M(x)\sin qx + N(x)\cos qx\right]$$

$k$ تعداد ریشه‌ها $p+iq$ معادله مشخصه باشند

$M(x)$, $N(x)$ دو چند جمله کامل با ضرایب نامعین از $\deg Max\{m,n\}$

$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 e^{2x} \sin x + 0\, e^{2x} \cos x$ با فرض کامل

$y''' - 4y'' + 3y' = 0 \qquad r^3 - 4r^2 + 3r = 0 \qquad r(r^2 - 4r + 3) = 0$

$$\begin{cases} r_1 = 0 \\ (r-1)(r-3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 3 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$$

$$y_p = e^{2x}\left[(Ax^2 + Bx + C)\sin x + (A'x^2 + B'x + C')\cos x\right]$$

- نکته: اگر $Q(x)$ به شکل مجموع دو یا چند حالت از حالات فوق باشد برای هر حالت یک جواب خصوصی پیدا می‌کنیم سپس تمام جوابها خصوصی را باهم جمع می‌کنیم

$$y''' - 6y'' + 9y' = x^2 e^{3x} + x + x\cos x + \underbrace{0 \sin x}_{\text{فرض می‌کنیم}}$$

$$r^3 - 6r^2 + 9r = 0 \longrightarrow r(r^2 - 6r + 9) = 0 \qquad r(r-3)(r-3) = 0 \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = r_3 = 3 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 x e^{r_3 x} = C_1 + C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}$$

$$\begin{cases} y''' - 6y'' + 9y' = x & y_{p_1} = x(Ax + B) \\ y''' - 6y'' + 9y' = x^2 e^{3x} & y_{p_2} = x^2 e^{3x}(A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \\ y''' - 6y'' + 9y' = x\cos x & y_{p_3} = \left[(A_2 x + B_2)\cos x + (A_3 x + B_3)\sin x\right] \end{cases}$$

بدست آوردن جواب خصوصی با استفاده از اپراتورهای معکوس:

تعریف اپراتور معکوس:

$$\frac{1}{F(D)} y = y_1 \iff F(D) y_1 = y$$

مثال: $(D+1)\sin x = \cos x + \sin x \iff \frac{1}{D+1}(\cos x + \sin x) = \sin x$

چند فرمول در بدست آوردن اپراتور معکوس:

$$A)\ \frac{1}{F(D)} \cdot e^{ax} = \begin{cases} \frac{1}{F(a)} \cdot e^{ax} & \text{اگر } F(a) \neq 0 \\ \frac{x^k \cdot e^{ax}}{k! \cdot P(a)} & \text{اگر } F(D) = (D-a)^k \cdot P(D) \end{cases}$$

$$B)\ \frac{1}{F(D^2)} \sin ax = \frac{1}{F(-a^2)} \sin ax$$

برای $\cos ax$ نیز همین طور می‌باشد

$$C)\ \frac{1}{F(D)} \left(e^{ax} \cdot f(x)\right) = e^{ax} \cdot \frac{1}{F(D+a)} \cdot f(x)$$

مثال برای حالت A:

$$\frac{1}{D(D-1)^2 (D-2)^3} \cdot e^{2x} = \frac{x^3 \cdot e^{2x}}{3! \cdot 2} = \frac{1}{12} x^3 e^{2x}$$

عامل صفرکننده مخرج 2 است. بنابراین k برابر توان $(D-2)$ یعنی 3 و بقیه عبارت مخرج برابر $P(D)$ می‌باشد.

مثال $y_p = \dfrac{1}{D^2-5D+6}\cdot(e^{2x}+1)$

$$y_p = \frac{1}{(D-2)(D-3)}\cdot(e^{2x}+e^{0x}) = \frac{x\cdot e^{2x}}{-1} + \frac{1}{6}$$

مثال برای مثل B:

$$y^{(4)}+3y'+y = \sin x$$

$$\frac{1}{D^4+3D+1}\cdot\sin x = \frac{1}{1+3D+1}\cdot\sin x = \frac{1}{3D+2}\cdot\sin x$$

$$= \frac{3D-2}{9D^2-4}\cdot\sin x = \frac{-1}{13}(3D-2)\sin x = \frac{-1}{13}(3\cos x - 2\sin x)$$

مثال برای حالت C:

$$y''+y'+y = x+1$$

$$\frac{1}{D^2+D+1}(x+1) = (1-D+D^2+\dots)(x+1) =$$

$$[(x+1)+(-1)+\dots] = x$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & D^2+D+1 \\ \underline{-(1+D+D^2)} & 1-D+D^2+\dots \\ -D-D^2 & \\ \underline{-(-D-D^2-D^3)} & \\ D^3 & \\ \vdots & \end{array}$$

مثال کلی:

$$y''+y = 1+e^x+xe^x+e^{2x}\cdot\sin x$$

$$\Longrightarrow y''+y=0 \longrightarrow r^2+1=0 \longrightarrow r=\pm i \longrightarrow y_h = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$$y_p = \frac{1}{D^2+1}(1+e^x+xe^x+e^{2x}\cdot\sin x)$$

$$y_p = 1+\frac{1}{2}e^x + e^x\cdot\frac{1}{(D+1)^2+1}(x) + e^{2x}\frac{1}{(D+2)^2+1}\cdot\sin x = \dots$$

معادله کوشی اویلر : هر معادله‌ای که به فرم ... $x^2y''+a_1xy'+a_2y=0$ باشد معادله

کوشی اویلر می‌گویند برای حل آن کافیست تغییر متغیر $x=e^t$ را انتخاب کنیم در این صورت

معادله به فرم زیر یک معادله مرتبه ۲ با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$$x=e^t \longrightarrow t=\ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}y'_t=e^{-t}y'_{(t)}$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\Big(\underbrace{\frac{1}{x}\,y'_{(t)}}_{(uv)'=u'v+v'u}\Big)=-\frac{1}{x^2}y'_{(t)}+\Big(\frac{dy'_{(t)}}{d(t)}\cdot\frac{d(t)}{dx}\Big)\frac{1}{x}$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}y'+\frac{1}{x^2}y''_{(t)}=-e^{-2t}y'_t+e^{-2t}y''_t$$

$$e^{2t}(-e^{-2t}y'+e^{-2t}y'')+a_1e^{t}(e^{-t}y')+a_2y=0$$

$$y''-y'+a_1y'+a_2y=0 \longrightarrow y''+(a_1-1)y'+a_2y=0$$

یک معادله خطی مرتبه ۲ با ضرایب ثابت.

EX: $x^2y''+3xy'+4y=0$

$$y''+(3-1)y'+4y=0 \longrightarrow y''+2y'+4y=0$$

$$r^2+2r+4=0 \longrightarrow (r_1,r_2)=\frac{-1\mp\sqrt{1-4}}{1}=-1\mp\sqrt{3}i=-1\mp\sqrt{3}i$$

$$y_1=e^{-x}\cos\sqrt{3}x \qquad y_2=e^{-x}\sin\sqrt{3}x$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

روش کاهش مرتبه: اگر معادله ی نرمال $y''+P(x)y'+q(x)y=0$ باشد و یک جواب این

معادله ($y_1$) را داشته باشیم با انتخاب $y_2=y_1 v$ که در آن $v$ تابعی برحسب $x$ است

جواب عمومی معادله را بدست می آوریم

$$\left.\begin{aligned} y_2' &= y_1' v + v' y_1 \\ y_2'' &= y_1'' v + v' y_1' + v'' y_1 + y_1' v' \end{aligned}\right\} \text{در معادله می گذاریم}$$

$$(y_1''v + v'y_1' + v''y_1 + y_1'v') + P(x)(y_1'v + v'y_1) + q(x)(y_1 v) = 0$$

$$v(\cancel{y_1'' + P(x)y_1' + q(x)y_1}) + (v'y_1' + v''y_1 + v'y_1' + P(x)v'y_1) = 0$$

$$v''y_1 + 2v'y_1' + P(x)v'y_1 = 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{v'y_1}} \frac{v''}{v'} + 2\frac{y_1'}{y_1} + P(x) = 0$$

$$\int \frac{v''}{v'} + \int 2\frac{y_1'}{y_1} + \int P(x)dx = 0 \longrightarrow \ln v' + 2\ln y_1 = -\int P(x)dx$$

$$\ln v' y_1^2 = -\int P(x)dx \longrightarrow v'y_1^2 = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v' = \frac{1}{y_1^2} \cdot e^{\int P(x)dx} \xrightarrow{\int} v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$$

نکته: هرگاه یک جواب معادله دیفرانسیل داده شده بود از این روش حل می کنیم (طرز شناسایی معادله)

$$EX: \begin{cases} x^2y''+2xy'=0 \\ y_1 = x^{-1}\end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1' = -x^{-2} \\ y_1'' = 2x^{-3}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow x^2(2x^{-3}) + 2x(-x^{-2}) = 0 \qquad 2x^{-1} + (-2x^{-1}) = 0 \qquad \frac{2}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

برقرار است.

$$\Longrightarrow v=\int \frac{1}{y_1^2}\, e^{-\int p(x)dx}\, dx=\int \frac{1}{x^{-2}}\, e^{-\int \frac{2}{x}dx}\, dx=\int x^2 e^{-2\ln x}\, dx$$

$$=\int dx = x \qquad \Longrightarrow \quad y_2=y_1 v=\frac{1}{x}(x)=1 \qquad y=\frac{c_1}{x}+c_2$$

حل معادلات به روش تغییر پارامترها برای حل معادله $y''+p(x)y'+q(x)\,y=g(x)$

درصورتی که $y_1$ و $y_2$ دو جواب معادله همگن متناظر فوق باشند.

$$y_h=c_1y_1+c_2y_2 \qquad y_p=u_1(x)\,y_1+u_2(x)\,y_2$$

$$y_p'=u_1'y_1+y_1'u_1+u_2'y_2+y_2'u_2$$

$$y_p'=(u_1'y_1+u_2'y_2)+(y_1'u_1+u_2y_2')=y_1'u_1+u_2y_2'$$

$$y_p''=y_1''u_1+u_1'y_1'+u_2'y_2'+y_2''u_2$$

حل دستگاه معادلات، سپس جواب‌های زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} u_1'y_1+u_2'y_2=0 \\ u_1'y_1'+u_2'y_2'=g(x) \end{cases} \qquad u_1=\int \frac{g(x)\,y_2}{w(y_1,y_2)}\,dx \qquad u_2=\int \frac{g(x)\,y_1}{w(y_1,y_2)}\,dx$$

$$y_h+y_p=y$$

$Ex.$ $y''+y=\sec x$

$$r^2+1=0 \longrightarrow r^2=-1 \longrightarrow r^2=i^2 \longrightarrow r=\mp i \qquad \begin{cases} y_1=\cos x \\ y_2=\sin x \end{cases}$$

$$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x$$

Subject:

Year. 200   Month.   Day.

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$ $\qquad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - (-\sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x =$

$$u_1 = \int \frac{\sec \cdot \sin x}{1} dx = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \cdot dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x|$$

$$u_2 = \int \frac{\sec \cdot \cos x \, dx}{1} = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x \, dx = \int dx = x$$

$$\begin{cases} y_p = (\ln|\cos x|)\cos x + x \sin x \\ y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x \end{cases}$$

$$\longrightarrow y = y_p + y_h = (\ln|\cos x|)\cos x + x \sin x + c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

نکته: برای حل معادله $y^{(n)} + f_1(x) y^{(n-1)} + \dots + f_n(x) y = g(x)$ به صورتی

$y_1, \dots, y_n$ $n$ جواب معادله همگن متناظر باشد

$y_h = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$ $\qquad y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \dots + u_n y_n$

$$\longrightarrow y = y_h + y_p \qquad \begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 + \dots + u_n' y_n = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' + \dots + u_n' y_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases}$$

مثال:

$$y''' + y' = tg x$$

$$r^3 + r = 0 \qquad r(r^2+1) = 0 \qquad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r^2 = -1 \end{cases} \qquad r^2 = i \qquad r = \mp i \qquad \begin{cases} p = 0 \\ q = 1 \end{cases}$$

$$y_h = c_1 e^0 + c_2 \cos x + c_3 \sin x = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

$$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

$$\Downarrow$$

$$y_p = u_1 x_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x$$

$$\begin{cases} u_1' x_1 + u_2' \cos x + u_3' \sin x = 0 \\ u_1' x_0 + u_2'(-\sin x) + u_3'(\cos x) = 0 \\ 0 + u_2'(-\cos x) + u_3'(-\sin x) = tg\,x \end{cases}$$

مشتق
مشتق

دستگاه را حل نموده و $u_1$ و $u_2$ و $u_3$ را پیدا می‌کنیم.

از اینجا در معادله $y_p$ قرار می‌دهیم.

حل معادلات به کمک تبدیلات لاپلاس:

برای حل یک معادله به کمک تبدیلات لاپلاس، ابتدا از طرفین تبدیل لاپلاس گرفته سپس معادله را که یک معادله معمولی است برحسب لاپلاس تابع بدست می‌آوریم. آنگاه از طرفین تبدیل معکوس لاپلاس می‌گیریم تا جواب معادله بدست آید.

$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt = F(s) \iff L^{-1}(F(s)) = f(t)$$

۱) $L(f \mp g) = L(f) \mp L(g)$

۲) $L(\lambda f) = \lambda L(f) \quad \lambda \in R$

۳) $L^{-1}(F_1 \mp F_2) = L^{-1}(F_1) \mp L^{-1}(F_2)$

۴) $L^{-1}(\lambda F_1) = \lambda L^{-1}(F_1)$

1) $L(a) = \frac{a}{s}$ $\qquad L^{-1}(\frac{a}{s}) = a$

اثبات: $L(a) = \int_0^{+\infty} e^{-st} a\,dt = a(-\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{+\infty}) = a(0+\frac{1}{s}) = \frac{a}{s}$

Ex: $L^{-1}(\frac{5}{s}) = 5 \qquad L^{-1}(\frac{100}{s}) = 100$

۲) $L(at) = \frac{a}{s^2}$

اثبات: $L(at) = \int_0^{+\infty} e^{-st} at\,dt = a\int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{u}\,\underbrace{e^{-st}dt}_{dv}$

$$\begin{cases} t = u & du = dt \\ e^{-st}dt = dv \\ v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{cases}$$

$= a(-\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{s}e^{-st}dt) = a(0+(-\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}))$

$= a(\frac{1}{s^2}) = \frac{a}{s^2}$

Ex: $L^{-1}(\frac{5}{s^2}) = 5t$

۳) $L(at^n) = \frac{a\,n!}{s^{n+1}}$

Ex: $L^{-1}(\frac{5!}{s^6}) = \longrightarrow t^5$

Ex: $L(t^2+4t-5) = L(t^2)+L(4t)-5L(1) = \frac{2!}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{5}{s}$

۴) $L(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$

اثبات: $L(e^{at}) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{at}dt = \int_0^{+\infty} e^{(a-s)t}dt = \frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty} =$

$0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$

Ex: $L^{-1}(\frac{1}{s-3}) = e^{3t} \qquad L^{-1}(\frac{1}{s+1}) = e^{-t}$

5) $L(\sinh at) = \frac{a}{s^2-a^2}$ $\qquad L^{-1}\left(\frac{a}{s^2-a^2}\right) = \sinh at$

اثبات: $L(\sinh at) = L\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right) = \frac{1}{2}L(e^{at}) - \frac{1}{2}L(e^{-at}) =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{s+a-s+a}{s^2-a^2} = \frac{2a}{s^2-a^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a}{s^2-a^2}$

EX: $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2-4}\right) = \sinh 2t$

6) $L(\cosh at) = \frac{s}{s^2-a^2}$

7) $L(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$

8) $L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$

EX: $L^{-1}\left(\frac{as-1}{s(s^2+1)(s-1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{A}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{B}{s-1}\right) + L^{-1}\left(\frac{Cs+D}{s^2+1}\right)$

$= A L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + B L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + C L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + D L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) =$

$= A + B e^{t} + C\cos t + D\sin t$

تغییر: اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$L(f(bt)) = \frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right)$

$L\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$

EX: $L\left(\frac{1-e^{-2t}}{2t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{\frac{s}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{2}{s}\right)$

قضیه: تبدیل لاپلاس مشتق:

اگر y یک تابع باشد و بخواهیم تبدیل لاپلاس مشتقات مختلف آن را حساب کنیم از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$L(y^{(n)}) = s^n L(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - s^{n-3} y''(0) - \cdots - y(0)$$

$$L(y') = sL(y) - y(0)$$

$$L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$$

$$L(y''') = s^3 L(y) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$$

EX: $L(e^{-t}) =$ $\left\{ \begin{array}{l} y = e^{-t} \\ t = 0 \\ y' = -e^{-t} \end{array} \right.$ $y(0) = 1$

$$L(y') = sL(y) - y(0) \longrightarrow L(-e^{-t}) = sL(e^{-t}) - 1$$

$$1 = sL(e^{-t}) + L(e^{-t}) = (s+1)L(e^{-t}) \longrightarrow L(e^{-t}) = \frac{1}{s+1}$$

EX2) $L(\sin^2 t)$ ; $\left\{ \begin{array}{l} y = \sin^2 t \\ y' = 2\cos t \sin t \\ t = 0 \quad y(0) = 0 \end{array} \right.$

$$L(y') = sL(y) - y(0)$$

$$L(2\cos t \sin t) = sL(\sin^2 t) - 0 \qquad L(\sin 2t) = sL(\sin^2 t)$$

$$\frac{2}{s^2+4} = sL(\sin^2 t) \longrightarrow L(\sin^2 t) = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

Subject:

Year. 200 Month. Day.

$$L(t\cos 2t): \quad \begin{cases} y = t\cos 2t \\ y' = \cos 2t + (-2\sin 2t)\,t = \cos 2t - 2t\sin 2t \\ y(0) = 0 \end{cases}$$ (EX3

$$\begin{cases} y' = \cos 2t - 2t\sin 2t \\ y'' = -2\sin 2t - [2\sin 2t + 2\cos 2t \cdot 2t] = -2\sin 2t - 2\sin 2t - 4\cos 2t \end{cases}$$

$$= -4\sin 2t - 4\cos 2t$$

زول $\quad L(y'') = s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0)$

$$\Rightarrow L(-4\sin 2t - 4\cos 2t) = s^2 L(t\cos 2t) - 1$$

$$-L(t\cos 2t)(4+s^2) = \frac{4\times 2}{s^2+4} - 1$$

$$-L(t\cos 2t) = \frac{8 - s^2 - 4}{(s^2+4)^2} = \frac{4 - s^2}{(s^2+4)^2} \Rightarrow L(t\cos 2t) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید

$$y'' - y' - 6y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 2$$

$$L(y'') - L(y') - 6L(y) = L(0) = 0$$

$$s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) - sL(y) - y(0) - 6L(y) = 0$$

$$s^2 L(y) - s - 2 - sL(y) + 1 - 6L(y) = 0$$

$$s^2 L(y) - s - 3 - sL(y) - 6L(y) = 0$$

$$L(y)(s^2 - s - 6) = s + 1 \qquad L(y) = \frac{s+1}{s^2 - s - 6} = \frac{s+1}{(s-3)(s+2)}$$

$y = L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s-2)(s+2)}\right) = L^{-1}\left(\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2}\right) = Ae^{2t} + Be^{-2t}$

2) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}$ $\quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -1$

$L(y'') - 3L(y') + 2L(y) = 2L(e^{-t})$

$s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) - 3\left[sL(y) - y(0)\right] + 2L(y) = 2L(e^{-t})$

$s^2 L(y) - 2s + 1 - 3sL(y) + 6 + 2L(y) = 2L(e^{-t})$

$s^2 L(y) - 2s + 7 - 3sL(y) + 2L(y) = \frac{2}{s+1}$

$L(y)\left[\underbrace{s^2 - 3s + 2}_{(s-2)(s-1)}\right] = \frac{2}{s+1} + 2s - 7 = \frac{2 - 7s - 7 + 2s^2 + 2s}{s+1}$

$L(y) = \frac{2s^2 - 5s - 5}{(s+1)(s-2)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-1}$

$y = L^{-1}\left(\frac{A}{s+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{B}{s-2}\right) + L^{-1}\left(\frac{C}{s-1}\right) = Ae^{-t} + Be^{2t} + Ce^{t}$

$y = Ae^{-t} + Be^{2t} + Ce^{t}$

لاپلاس انتگرال: اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$L\left(\int_0^t f(r)\,dr\right) = \frac{1}{s}F(s) \implies \int_0^t f(r)\,dr = L^{-1}\left(\frac{1}{s}F(s)\right)$

EX: $L\left(\int_0^t \cos 2r\,dr\right)$ $\quad f(t) = \cos 2t \quad L(\cos 2t) = \frac{s}{s^2+4}$

$L\left(\int_0^t \cos 2r\,dr\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{1}{s^2+4}$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s+2)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s+2}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\cdot F(s)\right)$$

$$\int_0^t e^{-2r}\,dr = -\frac{1}{2}e^{-2r}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

قضایای انتقال $s$:

1) اگر $L(f(t)) = F(s) \xRightarrow{\text{آنگاه}} L(e^{bt}f(t)) = F(s-b)$

$$L^{-1}(F(s-b)) = e^{bt}f(t)$$

EX: $L(e^{2t}\cos t) =$ $\qquad L(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$ $\quad$ به جای $s$ داریم $\Rightarrow s-2$

$$\Rightarrow L(e^{2t}\cos t) = \frac{(s-2)}{(s-2)^2+1}$$

EX: $L(te^{3t}) =$ $\qquad L(t) = \frac{1}{s^2}$ $\quad$ داریم به جای $s$ $\quad s-3$

$$\Rightarrow L(te^{3t}) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

تعریف تابع پله‌ای واحد: هر تابعی با ضابطه $u_c(t) = \begin{cases} 0 & t<c \\ 1 & t>c \end{cases}$ باشد تابع پله‌ای واحد مربوط به عدد $c$ نامیده می‌شود.

$$L(u_c(t)) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u_c(t)\,dt = \int_0^c e^{-st}u_c(t)\,dt + \int_c^{+\infty} e^{-st}u_c(t)\,dt$$

$$= \int_c^{+\infty} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_c^{\infty} = 0 + \frac{e^{-cs}}{s} = \frac{e^{-cs}}{s}$$

قضیه: اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه

$$L(u_c(t)f(t-c)) = e^{-cs}L(f(t)) = e^{-cs}F(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}(e^{-cs}F(s)) = u_c(t)f(t-c)$$

EX: $f(t) = u_2(t)(t^3 - 3t + 2)$ $\quad L(f(t)) = ?$ $\quad c = 2$

$t^2 - 3t + 2 = (t-2)^2 + t - 2 \Longleftrightarrow t^2 - 4t + 4 + t - 2 = t^2 - 3t + 2$

$f(t) = u_2(t)\left((t-2)^2 + (t-2)\right)$

$L\, f(t) = L\left(u_2(t)\,(t-2)^2 + (t-2)\right) = e^{-2s} L(t^2 - t) = e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2}\right)$

★ اگر $L(f(t)) = F(s)$ دراین صورت:

$L\left((-1)^n t^n f(t)\right) = F^{(n)}(s)$

$L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s) \longrightarrow L^{-1}\left(F^{(n)}(s)\right) = (-t)^n L^{-1} F(s)$

EX: $L(t\cos t) = ?$ $\quad L(\cos t) = \frac{s}{s^2+1}$

$\Longrightarrow L(t\cos t) = (-1)^1\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = \frac{-s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{-(1-s^2)}{(s^2+1)^2} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$

انتگرال تبدیل لاپلاس:

اگر $L(f(t)) = F(s)$ آنگاه:

$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$

$f(t) = tL \int_s^{+\infty} F(u)\,du$

EX: $L\left(\frac{\sinh t}{t}\right)$ $\quad$ میدانیم $L(\sinh t) = \frac{1}{s^2-1}$

$\longrightarrow \int_s^{+\infty} \frac{du}{u^2-1} = \int \frac{A}{u-1}\,du + \int \frac{B}{u+1}\,du = \frac{1}{2}\int_s^{+\infty} \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int_s^{+\infty} \frac{du}{u+1} =$

$\frac{1}{2}\left[\ln(u-1) - \ln(u+1)\right] = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1}\Big]_s^{+\infty} = -\frac{1}{2}\ln\frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$

EX2) $L(\frac{e^{-t}}{t})$ میدانیم $L(e^{-t})=\frac{1}{s+1}$

$\longrightarrow L(\frac{e^{-t}}{t})=\int_s^{+\infty}\frac{du}{u+1}=\ln|u+1|\Big]_s^{+\infty}$ واگراست.

EX3) $L(\frac{1-\cos t}{t})$ میدانیم $L(1-\cos t)=L(1)-L(\cos t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$

$\longrightarrow \int_s^{+\infty}\left[\frac{du}{u}-\frac{u}{u^2+1}du\right]=\ln u-\frac{1}{2}\ln(u^2+1)\Big]_s^{+\infty}=\ln u-\ln(u^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$=\ln\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\Big]_{+s}^{\infty}=0-\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}}=\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$

کانولوشن (پیچش):

$$f*g=\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$$

خواص: 1) $f*g=g*f$ 2) $f*(g*h)=(f*g)*h$

3) $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$ 4) $c(f*g)=f*(cg)=cf*g$

5) $f*f\geqslant 0$ , $f*1\neq f$

EX: $t*\sin t=\int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx$ $\begin{cases}f(t)=t\\ g(t)=\sin t\end{cases}$

$=\int_0^t \underbrace{(t-x)\sin x\,dx}_{\text{ج.ج}}\Longrightarrow\begin{cases}t-x=u & du=-dx\\ \sin x\,dx=dv & v=-\cos x\end{cases}$

$=-(t-x)\cos x\Big]_0^t-\int_0^t\cos x\,dx=-(t-x)\cos x-\sin x\Big|_0^t$

$=-\sin t-(-t)=t-\sin t$

EX2) $1 * e^{-t} = \int_0^t 1 \times e^{-x} dx = \int_0^t e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^t$ $\quad \begin{cases} g(x) = e^{-t} \\ f(t) = 1 \end{cases}$

$= -e^{-t} + 1 = 1 - e^{-t}$

نتیجه: اگر $L(f(t)) = F(s)$ و $L(g(t)) = G(s)$ آنگاه

$L(f * g) = L(f) \times L(g) = F(s) . G(s)$ و $L^{-1}(F(s) . G(s)) = f * g$

EX: $L\left(\int_0^t (t-x) \sin 2x \, dx\right) = L(t * \sin 2t) = L(t) \times L(\sin 2t)$

$= \frac{1}{s^2} \times \frac{2}{s^2+4}$

EX3) $L\left(\int_0^t e^{-x} \sin 2(t-x)\right) dx = L(\sin 2t * e^{-t}) = L(e^{-t}) \times L(\sin 2t)$

$= \frac{1}{s+1} \times \frac{2}{s^2+4}$

$L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}\right)$ $\quad \begin{cases} F(s) = \frac{1}{s+1} \\ G(s) = \frac{1}{s+2} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} f(t) = e^{-t} \\ g(t) = e^{-2t} \end{cases} \Longrightarrow L^{-1}(F(s) G(s)) = f * g = e^{-t} * e^{-2t}$

$= \int_0^t e^{-(t-x)} e^{-2x} dx = \int_0^t e^{-t} . e^{x} e^{-2x} dx = e^{-t} \int_0^t e^{-x} dx$

$= e^{-t} \left(-e^{-x}\Big|_0^t\right) = e^{-t}(-e^{-t}+1) = e^{-t} - 1$

معادلات انتگرال: هر معادله که تابع جواب آن زیر علامت انتگرال باشد، یک معادله انتگرالی نامیده می‌شود. برای حل چنین معادلاتی از طرفین تبدیل لاپلاس

می‌گیریم. سپس معکوس لاپلاس می‌گیریم تا جواب معادله بدست آید.

مطلوبست حل معادله

$$y(t) = \sin 2t + \int_0^t y(x)\sin 2(t-x)\,dx$$

$$L(y(t)) = L(\sin 2t) + L\left(\int_0^t y(x)\sin 2(t-x)\,dx\right) \qquad L(y(t)) = Y$$

$$Y = \frac{2}{s^2+4} + L(y(t) * \sin 2t) \qquad Y = \frac{2}{s^2+4} + L(y(t)) \times L(\sin 2t)$$

$$Y = \frac{2}{s^2+4} + Y\frac{2}{s^2+4} \rightarrow Y - Y\frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{s^2+4} \rightarrow Y\left(1-\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$Y\left(\frac{s^2+2}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s^2+4} \qquad Y = \frac{2}{s^2+2} \qquad y(t) = L^{-1}(Y)$$

$$\longrightarrow y(t) = L^{-1}(Y) = L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} L^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} L^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{s^2+2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}\,t$$

EX2) $y'' + y' = \cos t + \int_0^t \sin(t-x)\, y'(x)\,dx \qquad \begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

$$L(y'') + L(y') = L(\cos t) + L\left(\int_0^t \sin(t-x)\, y'(x)\,dx\right.$$

$$s^2 L(y) - s\cancel{y(0)} - \cancel{y'(0)} + sL(y) - \cancel{y(0)} = \frac{s}{s^2+1} + L(\sin t * y'(x))$$

$$L(y)\,[s^2+s] = \frac{s}{s^2+1} + L(\sin t) \times L(y'(t)) \qquad \{ L(y) = Y$$

$$Y(s^2+s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\, Y \quad (sL(y) - \cancel{y(0)})$$

$$Y\left(s^2+s-\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s+1} \qquad Y = \frac{1}{s^3+s^2+s} \qquad y = L^{-1}\left(\frac{1}{s^4+s^2+s}\right)$$

حل دستگاه به کمک تبدیل لاپلاس: برای حل یک دستگاه به کمک تبدیلات لاپلاس ابتدا از هر یک از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می‌گیریم پس دستگاه را برحسب تبدیلات لاپلاس حل می‌کنیم سپس تبدیل معکوس لاپلاس می‌گیریم. درصورتی که شرایط اولیه داده شده باشد یک جواب خصوصی برای دستگاه پیدا می‌شود.

EX: $\begin{cases} y_1' = -y_2 & y_1(0) = 1 \\ y_2' = y_1 & y_2(0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} L(y_1') = -L(y_2) \\ L(y_2') = L(y_1) \end{cases}$

$\longrightarrow \begin{cases} sL(y_1) - y_1(0) = -L(y_2) \\ sL(y_2) - y_2(0) = L(y_1) \end{cases}$ فرض می‌کنیم $Y_1 = L(y_1)$, $Y_2 = L(y_2)$

$\longrightarrow \begin{cases} sY_1 - 1 = -Y_2 \\ sY_2 = Y_1 \end{cases} \longrightarrow s\begin{cases} sY_1 + Y_2 = 1 \\ sY_2 - Y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{sY_1} + Y_2 = 1 \\ s^2Y_2 - \cancel{sY_1} = 0 \end{cases}$

$s^2Y_2 + Y_2 = 1 \qquad Y_2(s^2+1) = 1 \qquad Y_2 = \frac{1}{s^2+1}$

$L^{-1}(Y_2) = y_2 \Longrightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t$

$\Longrightarrow \boxed{\begin{cases} y_2 = \sin t \\ y_1 = \cos t \end{cases}}$

$y_2' = y_1 \Longrightarrow (\sin t)' = \cos t = y_1$

و یا

$\frac{s^2}{s^2+1} - sY_1 = 0 \qquad Y_1 = \frac{s}{s^2+1} \qquad y_1 = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos t$

EX(2)
$$\begin{cases} y_1'' + y_1 - y_2'' - 4y_2 = 0 \\ y_1' + y_2' = \cos t + 2\cos 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_1'(0) = 1 \\ y_2'(0) = 2 \end{cases} \quad y_2(0) = 0$$

$$\begin{cases} L(y_1'') + L(y_1) - L(y_2'') - 4L(y_2) = 0 \\ L(y_1') + L(y_2') = L(\cos t) + 2L(\cos 2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2L(y_1) - sL(y_0) - y_1'(0) + L(y_1) - s^2L(y_2) + sL(y_2(0)) + y_2'(0) - 4L(y_2) = 0 \\ sL(y_1) - y_1(0) + sL(y_2) - y_2(0) = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{2\times 2s}{s^2+4} \end{cases}$$

داده‌ها شد جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{cases} (s^2+1)Y_1 - (s^2+4)Y_2 = -1 \\ sY_1 + sY_2 = \dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{4s}{s^2+4} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} (s^2+1)Y_1 - (s^2+4)Y_2 = 1 \\ Y_1 + Y_2 = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{4}{s^2+4} \end{cases}$$

دترمینان ضرایب $\quad \Delta : \begin{vmatrix} s^2+1 & -(s^2+4) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = s^2+1+s^2+4 = 2s^2+5$

ثابت $\qquad$ ضریب $Y_2$

$$\Delta Y_1 = \begin{vmatrix} -1 & -(s^2+4) \\ \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{4}{s^2+4} & 1 \end{vmatrix} = -1 + (s^2+4)\left[\frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+4}\right]$$
$$= -1 + \frac{s^2+4}{s^2+1} + 4 = \frac{s^2+4}{s^2+1} + 3$$

$$\Delta Y_2 = \begin{vmatrix} s^2+1 & -1 \\ 1 & \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{4}{s^2+4} \end{vmatrix} = (s^2+1)\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+4}\right) + 1$$
$$= \frac{4(s^2+1)}{s^2+4} + 2$$

$$Y_1 = \frac{\Delta Y_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{s^2+4}{s^2+1} + 3}{2s^2+5} = \frac{4s^2+7}{(s^2+1)(2s^2+5)}$$

$$Y_2 = \frac{\Delta Y_2}{\Delta} = \frac{2 + \dfrac{4(s^2+1)}{s^2+4}}{2s^2+5} = \frac{2s^2+8+4s^2+4}{(s^2+4)(2s^2+5)} = \frac{6s^2+12}{(s^2+4)(2s^2+5)}$$

حل معادلات به کمک سریها:

تابع تحلیلی: تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ تحلیلی نامیم در صورتی که دارای بسط تیلور باشد یعنی

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

نقطه عادی: نقطه $x=a$ برای معادله $f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$ (*) را

در صورتی که $f_1(a)\neq 0$ باشد

EX: $(1-x^2)y''+5xy'+7y=0$

$(1-x^2)=0 \quad x=\mp 1$ این دو نقطه غیرمعمولی (منفرد) هستند و بقیه نقاط، نقطه معمولی.

قضیه: اگر نقطه $x=a$ یک نقطه معمولی معادله $f_1(x)y''+f_2(x)y'+f_3(x)y=0$

باشد در این صورت معادله فوق دارای جوابی به فرم یک سری توانی به شکل زیر میباشد.

$y=c_1(x-a$ (یک سری توانی برحسب توانهای $+ c_2(x-a$ (یک سری توانی برحسب توانهای

حال اگر $a=0$ باشد داریم:

$y=c_1(x$ (سری توانی برحسب توانهای $+ c_2(x$ (سری توانی برحسب توانهای

مثال: جواب معادله $y''-xy'+y=0$ را به صورت یک سری توانی بنویسید.

$$\begin{cases} f_1(x)=1 & f_3(x)=1 \\ f_2(x)=x & \end{cases}$$

$f_1(0)\neq 0$ چون $f_1(0)=1$

صفر یک نقطه معمولی است پس جوابی به فرم سری توانی داریم

فرض می‌کنیم $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \implies y'=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$

در هر بار مشتق گیری اندیس را اضافه می‌کنیم مگر در موارد خاصی که دارای چندتا متغیری باشد.

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

برای آنکه سری ها از نقطه یکسانی شروع شود که بتوان از آنها فاکتورگیری کرد. در سری های اول

به جای $n$ ، $(n+2)$ می‌گذاریم تا سری از $n=0$ شروع شود. در سری دوم نیز چون اگر $n$ از

صفر شروع شود کل سری صفر می‌شود ولی تأثیرات سری را از نقطه $0$ شروع می‌کنیم.

$$\sum_{n+2=2}^{\infty} (n+2)(n+2-1) C_{n+2} x^{n+2-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[ (n+2)(n+1) C_{n+2} - n C_n + C_n \right] = 0$$

چون برابر صفر شده فقط ضرایب می‌توانند عامل صفرکننده باشند:

$$(n+2)(n+1) C_{n+2} - n C_n + C_n = 0 \qquad (n+2)(n+1) C_{n+2} = (n-1) C_n$$

$$C_{n+2} = \frac{(n-1) C_n}{(n+2)(n+1)}$$ فرمول بازگشتی

$$\Longrightarrow \begin{cases} n=0 \longrightarrow C_2 = \dfrac{(0-1) C_0}{(0+2)(0+1)} = \dfrac{-C_0}{2} \\ n=1 \longrightarrow C_3 = 0 \\ n=2 \longrightarrow C_4 = \dfrac{C_2}{12} = \dfrac{-C_0}{24} \\ n=3 \longrightarrow C_5 = 0 \end{cases}$$

$$J = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + \cdots$$

$$J = C_0 + C_1 x - \frac{C_0}{2} x^2 + 0 - \frac{C_0}{24} x^4 + 0 + \cdots$$

$$J = C_0 \underbrace{\left( -\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{24} x^4 + 1 + \cdots \right)}_{\text{سری توانی برحسب توان های}} + C_1 x$$

معادله لژاندر: هر معادله که به فرم $(1-x^2)y'' - 2xy' + m(m+1)y = 0$ را معادله لژاندر می‌گویند

صفر یک نقطه معمولی است. $P_1(0) = 1 \neq 0$

پس معادله دارای جوابی به فرم $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ می‌باشد.

داریم $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ و $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$

حال در معادله جاگذاری می‌کنیم. [به جای $m(m+1) = 6$ در نظر گرفتیم] فرضاً

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

تغییر اندیس می‌دهیم. $n+2 = n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 6c_n\right] = 0$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - n(n-1)c_n - 2nc_n + 6c_n = 0$$

$$c_{n+2} = \frac{n(n-1)+2n-6}{(n+2)(n+1)}c_n = \frac{n^2+n-6}{(n+2)(n+1)} = \frac{(n+3)(n-2)}{(n+2)(n+1)}c_n$$ رابطه بازگشتی

$n=0 \longrightarrow c_2 = \frac{-6}{2}c_0 = -3c_0$ $\qquad$ $n=2 \longrightarrow c_4 = 0 \Rightarrow c_6 = c_8 = c_{10} = 0 \dots$

$n=1 \longrightarrow c_3 = \frac{-4}{6}c_1$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \dots + c_n x^n + \dots$$

$$= c_0 + c_1 x + (-3 c_0 x^2) - \frac{2}{3} c_1 x^3 + \dots +$$

$$= c_0(1-3x^2) + c_1\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \dots\right)$$ چند جمله‌ای لژاندر

روش فروبینوس (روش توسعه یافته سری توانی): $f_1(x)\, y'' + f_2(x)\, y' + f_3(x)\, y = 0$

$f_1(x)=0$ نقطه صفر را منفرد نامیم.

تعریف: $y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0$ ، $h(x)$ و $g(x)$ در نقطه صفر تحلیلی باشد (دارای بسط تیلور باشند) آنگاه معادله جوابی به فرم یک سری توسعه یافته $y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ (صفر یک نقطه منفرد منظم)

Ex: $x^2 y'' + x\, g(x)\, y' + h(x)\, y = 0$

$\div x^2 \longrightarrow y'' + \frac{g(x)}{x} y' + \frac{h(x)}{x^2} y = 0$ تبدیل به حالت استاندارد

بسط تیلور
$$\begin{cases} g(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots \\ h(x) = h(0) + \frac{h'(0)}{1!}x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \dots \end{cases}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r-2}$$

جایگذاری در معادله:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r}\left[g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \dots\right]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}\left[h(0) + \frac{h'(0)}{1!}x + \frac{h''(0)}{2!}x^2 + \dots\right] = 0$$

چون برابر صفر شده ضریب جملات برابر صفرند.

$$n=0 \begin{cases} r(r-1)c_0 + r c_0 g(0) + c_0 h(0) = 0 \\ r^2 - r + r g(0) + h(0) = 0 \end{cases}$$

$$r^2 + (g(0)-1)r + h(0) = 0$$ زیرا معادله مشخصه

حال اگر $r_1$ و $r_2$ دو ریشه معادله مشخصه شده باشند داریم:

$$1)\ r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z} \quad \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \end{cases}$$

$$2)\ r_1 = r_2 \Longrightarrow r_2 = r_1 = \frac{1-g(0)}{2} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \end{cases}$$

$$3)\ r_1 - r_2 \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ y_2 = k y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \end{cases}$$

$$\boxed{y = A y_1 + B y_2}$$ در همه معادلات بالا جواب کلی برابر است با:

EX: $4x y'' + 2(1-x) y' - y = 0 \quad \div 4x$ استاندارد شود

$$y'' + \frac{2-2x}{4x} y' - \frac{1}{4x} y = 0 \longrightarrow y'' + \frac{2(1-x)}{4x} y' - \frac{1}{4x} y = 0$$

باید طبق فرمول $g(x)$ و $h(x)$ را به نحوی بنویسیم که مخرج $g(x)$، $x$ و مخرج $h(x)$، $x^2$ باشد

$$y'' + \underbrace{\frac{(1-x)}{2x}}_{g(x)} y' - \frac{1 \times x}{4x \times x} y = 0 \Longrightarrow y'' + \underbrace{\frac{1-x}{2}}_{g(x)} \frac{y'}{x} - \underbrace{\frac{x}{4}}_{h(x)} \frac{1}{x^2} y = 0$$

$$g(x) = \frac{1-x}{2} \qquad h(x) = -\frac{x}{4}$$

طبق معادله $r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0$ حالا داریم $g(0)=\frac{1}{2}$ , $h(0)=0$

$$r^2+\left(\frac{1}{2}-1\right)r+0=0 \qquad r^2-\frac{1}{2}r=0 \qquad r\left(r-\frac{1}{2}\right)=0 \qquad \begin{cases} r_1=0 \\ r_2=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \begin{aligned} r_1-r_2&=0-(\tfrac{1}{2}) \\ &=-\tfrac{1}{2}\notin\mathbb{Z}\end{aligned}$$

پس انتخاب اول را داریم. چون $r_1-r_2=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{cases} y_1=x^{r_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n=x^0\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n \\ y_2=x^{r_2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n=x^{\frac{1}{2}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n\end{cases}\right\} y=Ay_1+By_2$$

$EX_2$ ; $$x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0 \xrightarrow[\div x^2]{\text{استاندارد}} y''-\frac{x}{x^2}y'+\frac{x^2+1}{x^2}y=0$$

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{x^2+1}{x^2}y=0 \implies \begin{cases} g(x)=-1 & g(0)=-1 \\ h(x)=x^2+1 & h(0)=1\end{cases}$$

$$\implies r^2+(g(0)-1)r+h(0)=0 \longrightarrow r^2+(-1-1)r+1=0 \quad r^2-2r+1=0 \quad r^2-2r+1=0$$

$$r^2-2r+1=0 \quad (r-1)^2=0 \implies \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=1\end{cases}$$ حالت دوم $r_1=r_2$

$$\left.\begin{cases} y_1=x^1\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nx^n \\ y_2=y_1\ln x+x^1\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n\end{cases}\right\} y=Ay_1+Ay_2$$