سلسلهٔ اعداد	حواصل	مقسوم علیه‌ها
۱	۷۰	۱ و ۲ و ۵ و ۷ و ۱۰ و ۱۴ وغیره
۲	۱۴۴	۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۶ و ۸ وغیره
۰	۱۸۰	۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ وغیره
−۱	۱۶۰	۱ و ۲ و ۴ و ۵ و ۸ و ۱۰ وغیره
−۲	۹۰	۱ و ۲ و ۳ و ۵ و ۶ و ۹ وغیره

سلسلهٔ دوم مقسوم علیه	سلسلهٔ سیوم مقسوم علیه	سلسلهٔ چهارم مقسوم علیه	سلسلهٔ پنجم مقسوم علیه
۱	۲	۵	۷
۲	۳	۴	۶
۳	۴	۳	۵
۴	۵	۲	۴
۵	۶	۱	۳

چون درینجا چهار سلسلهٔ متوالیه از مقسوم علیه‌ها حاصل شده و در درجهٔ سلسلهٔ مقسوم علیها عدد سه و چهار و پنج واقع شده و چون تفاضل مشترک واحد است پس از روی قسمت هم این اعداد حاصل شدند و چون آنها را امتحان کردم (+۳ و +۲ و −۳ و −۵) این همه اعداد مرداً فرداً مساوی ک حاصل شدند *

مسئلهٔ پنجم در استخراج ضلع اول معادلهٔ کعبی بطریق دیگر

قاعده اول رقم دوم معادلهٔ کعبی را که رقم $ک^2$ است سبب مسئلهٔ دوم معدوم باید پس آن معادلهٔ کعبی بطرف شکل هذا واقع خواهد شد $ک^3 \pm م ک = \pm ب$ و چون مقدار م و ب صور و اعداد معلوم خواهند بود پس آنها را بعد از تحلیل در قاعدهٔ ذیل بدل باید کرد تا حاصل

ضلع مطلوب شود $ک = \sqrt[3]{\frac{ب}{2} + \sqrt{\frac{ب^2}{4} \pm \frac{م^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{ب}{2} - \sqrt{\frac{ب^2}{4} \pm \frac{م^3}{27}}}$

= ضلع مطلوب و باید دانست که این قاعده مشروح است بترتیب مسئلهٔ ذیل * مثلاً معادله

ثلث

واحد و سه مقدار ک مجهول در آمد پس ک = ۲ خواه ۳ شد * مثال سیوم ک^۳ + ۳ مر ک^۲ − ۴ مر ک − ۱۲ مر^۳ = ۰ پس در اینجا مقدار ک مجهول است و چون مقسوم علیه های رقم اخیر که ۱۲ مر^۳) است ۱ و −۱ و ۲ و −۲ و ۳ و −۳ و ۴ و −۴ و ۶ و −۶ و ۱۲ و −۱۲ میشود در اینصورت بحسب تبدیل آنها بامقدار ک مفصلات آنها بدینصـــــــورت شد

ک = ۱ پس ۱ + ۳ − ۴ − ۱۲ = −۱۲

ک = −۱ پس −۱ + ۳ + ۴ − ۱۲ = −۶

ک = ۲ پس ۸ + ۱۲ − ۸ − ۱۲ = ۰

ک = −۲ پس −۸ + ۱۲ + ۸ − ۱۲ = ۰

ک = ۳ پس ۲۷ + ۲۷ − ۱۲ − ۱۲ = ۳۰

ک = −۳ پس −۲۷ + ۲۷ + ۱۲ − ۱۲ = ۰

در اینصورت سه ضلع اصلی ۲ مر خواه −۲ مر خواه −۳ مر = ک مجهول است وهوالمطلوب *

مسئلهٔ چهارم در متعین نمودن ضلعهای مقابله بموجب قاعده (سر اسحاق نیوتن)[۳] که از ترکیب مقسوم علیه های صحیح مقرر نموده است *

قاعده اول مقدار مجهول را با سه عدد یا زیاده از آن از اعداد متوالیه بر نسبت عددی متبدل سازند مثل ۲ و ۱ و ۰ و −۱ و −۲ و بعد از آن مقابلات را بحسب مقابلهٔ مطلوبه از هر واحد از آن اعداد حاصل ساخته حاصل را و مقسوم علیه های حاصل طرف آخر را در میان خطهای

---

(۳) حکیمی بود که جمیع حکمای فرنگ اورا امام و رئیس حق پندارند از استفادهٔ علوم مشهور در سنه ۱۶۴۲ عیسوی مطابق سنه ۱۰۵۲ هجری قدسی بدنیا شده در سنه ۱۷۲۶ عیسوی مطابق ۱۱۳۹ هجری وفات یافت *

هذا قول اشرف من اقواله الشریفه

وهو ان کان البعد بین الجسمین مجموعاً فیهما فالتجاذب بان بحیث تکون قوة التجاذب وقدر مربع البعد متناسبی التکافی مثلا لیکن مر ا ت ج) اجساماً بحیث تکون مر ا ت ج متساویة البعد ویکون بعد ا من مر واحداً خطیاً و بعد ت من مر ۲ و بعد ج من مر ۳ فتکون قوة التجاذب بین مر ا واحداً وقوة التجاذب بین مر ت ربعاً وقوة التجاذب بین مر ج تسعاً وعلی هذا القیاس * وهذه القاعدة عامة لجمیع الاجسام من ای قسم کانت ارضیة او سماویة سفلیة او علویة *

سے۳ = ک۳ − ۳ک۲ + ۳ک − ۱

۳سے۲ = * + ۳ک۲ − ۱ک + ۳

۹سے = * * + ۹ک − ۹

ک۳ + ۶ک − ۷ = ۱۳

ملکه ک۳ + ۶ک = ۲۰ رقم ۶ را م و ۲۰ را ب فرض کردیم پس بموجب قاعدهٔ مسئلهٔ هذا

$$ک = \sqrt[3]{\frac{ب}{۲} + \sqrt{\frac{ب^۲}{۴} + \frac{م^۳}{۲۷}}} + \sqrt[3]{\frac{ب}{۲} - \sqrt{\frac{ب^۲}{۴} + \frac{م^۳}{۲۷}}} = \sqrt[3]{۱۰ + \sqrt{۱۰۰ + ۸}} + \sqrt[3]{۱۰ - \sqrt{۱۰۰ + ۸}}$$

$$= \sqrt[3]{۱۰ + ۱۰\frac{۳۹۲۳}{۱۰۰۰۰}} + \sqrt[3]{۱۰ - ۱۰\frac{۳۹۲۳}{۱۰۰۰۰}} = \sqrt[3]{۲۰\frac{۳۹۲۳}{۱۰۰۰۰}} + \ldots$$

$= ۲\frac{۷۳۲}{۱۰} + ۲\frac{۷۳۲}{۱۰۰۰} = ۲\frac{۱۳۲}{۱۰۰۰} ۲$ پس ک = ۲ و صورت سے = ۱ = صلع مطلوب *

مثال دویم ک۳ − ۶ک = −۹ پس مقدار ک چه باشد چون درین معادله رقم دوم معدوم است لهذا احتیاج مسئلهٔ ثانی نیست و م = −۶ و ب = −۹ فرض کردیم در صورت

بموجب قاعدهٔ مسئلهٔ هذا ک = $\sqrt[3]{-\frac{ب}{۲} + \sqrt{\frac{ب^۲}{۴} + \frac{م^۳}{۲۷}}} + \sqrt[3]{-\frac{ب}{۲} - \sqrt{\frac{ب^۲}{۴} + \frac{م^۳}{۲۷}}}$

$= \sqrt[3]{-۴\frac{۱}{۲} + \sqrt{(۲۰\frac{۱}{۴} - ۸)}} + \sqrt[3]{-۴\frac{۱}{۲} - \sqrt{(۲۰\frac{۱}{۴} - ۸)}} = \sqrt[3]{-۴\frac{۱}{۲} + ۳\frac{۱}{۲}} + \sqrt[3]{-۴\frac{۱}{۲} - ۳\frac{۱}{۲}}$

$= \sqrt[3]{-۱} + \sqrt[3]{-۸} = -۱ - ۲ = -۳$ پس ک = −۳ = صلع مطلوب *

تنبیه این مخبر میگوید که درین قاعده احتیاج استخراج جذر و جذر کعب هم بسوی آن شود در تقسیم بعضی آید و نیز در قسمت $\frac{۱}{۲۷}$ م کسر واقع میشود و آن کسر می گذارند در صورت در حساب عملی نماید این سبب تفاوت کثیر خواهد شد پس استخراج کعب تعداد این قاعده غیره می است بدانکه اوجود اعمال کثیره که حاصل از شکل بسبب تفاوت و اختلاف کثیر

ازمقدار ک بدل کردم پس −۲۷ − ۹ + ۳۰ + ۶ = ۰ میشود درینصورت −۳ ضلع مطلوب است ؞ مثال دویم ۲ ک۳ − ۵ ک۲ + ۴ ک − ۱۰ = ۰ پس مقدار ک چه باشد ؞ جواب مقدار ک را با اعداد متوالیه ۲ و ۱ و ۰ و −۱ و −۲ تعبیر کردم ومقابلات درست ساختم بدینصورت

ک = ۲ پس ۱۶ − ۲۰ + ۸ − ۱۰ = −۶

ک = ۱ پس ۲ − ۵ + ۴ − ۱۰ = −۹

ک = ۰ پس ۰ ۰ ۰ − ۱۰ = −۱۰

ک = −۱ پس −۲ − ۵ − ۴ − ۱۰ = −۲۱

ک = −۲ پس −۱۶ − ۲۰ − ۸ − ۱۰ = −۵۴

اعداد سلسله	اعداد حواصل	مقسوم علیه ها	سلسلهٔ دویم از مقسوم علیه‌ها
۲	−۶	۱ و ۲ و ۳ و ۶	۱
۱	−۹	۱ و ۳ و ۹	۳
۰	−۱۰	۱ و ۲ و ۵ و ۱۰	۵
−۱	−۲۱	۱ و ۳ و ۷ و ۲۱	۷
−۲	−۵۴	۱ و ۲ و ۳ و ۶ و ۹	۹

چون نسج مقابل صفر واقع شده لهذا انرا بر تفاضل مشترک که مساوی عدد ما قبل مضلع اعظم است قسمت نمودم خارج قسمت ۴/ ۲ گردید و آن مقدار ک مطلوب است ؞ مثال سیوم ک۴ + ک۳ − ۲۹ ک۲ − ۹ ک + ۱۸۰ = ۰ پس مقدار ک چه باشد ؞ جواب مقدار ک را با اعداد متوالیه ۲ و ۱ و ۰ و −۱ و −۲ تعبیر کردم ومقابلات درست ساختم بدینصورت

ک = ۲ پس ۱۶ + ۸ − ۱۱۶ − ۱۸ + ۱۸۰ = ۷۰

ک = ۱ پس ۱ + ۱ − ۲۹ − ۹ + ۱۸۰ = ۱۴۴

ک = ۰ پس ۰ ۰ ۰ ۰ + ۱۸۰ = ۱۸۰

ک = −۱ پس ۱ − ۱ − ۲۹ + ۹ + ۱۸۰ = ۱۶۰

ک = −۲ پس ۱۶ − ۸ − ۱۱۶ + ۱۸ + ۱۸۰ = ۹۰

۳۲ = ۰ پس مقدار ء چه باشد اول برای معدوم کردن رقم دوم ء = ک + ۱ بموجب مسئلهٔ دوم فرض کردم ومضلعات آن درست ساختم بدینصورت شد

ء^۴ = ک^۴ + ۴ک^۳ + ۶ک^۲ + ۴ک + ۱

−۴ء^۳ = −۴ک^۳ − ۱۲ک^۲ − ۱۲ک − ۴

−۸ء = * * * −۸ک − ۸

+۳۲ = * * * +۳۲

ک^۴ * −۶ک^۲ − ۱۶ک + ۲۱ = ۰

پس برای این مقابله یک معادلهٔ کعبی بموجب مسئلهٔ هذا فرض کردم بدینصورت −۶ = ب و −۱۶ = ر و ۲۱ = س چون معادلهٔ کعبی مروصه بدینصورت است ی^۳ + ۲ب ی^۲ + (ب^۲ − ۴س) ی − ر^۲ = ۰ دریصورت بحسب اعداد مرقوم ی^۳ − ۱۲ی^۲ − ۴۸ی − ۲۵۶ = ۰ این معادلهٔ کعبی مروصه شد پس بموجب مسئلهٔ دوم برای معدوم کردن رقم دوم این معادله ی = ط + ۴ فرض کردم پس مضلعات آن بدینصورت حاصل شد

ی^۳ = ط^۳ + ۱۲ط^۲ + ۴۸ط + ۶۴

−۱۲ی^۲ = −۱۲ط^۲ − ۹۶ط − ۱۹۲

−۴۸ی = * −۴۸ط − ۱۹۲

−۲۵۶ = * * −۲۵۶

ط^۳ * * −۹۶ط − ۵۷۶ = ۰

بلکه ط^۳ − ۹۶ط = ۵۷۶ هرگاه −۹۶ = م و ۵۷۶ = ف فرض کردم پس بموجب مسئلهٔ ...

ط = [ف/۲ + √(ف^۲/۴ + م^۳/۲۷)]^{۱/۳} − م / ۳ [ف/۲ + √(ف^۲/۴ + م^۳/۲۷)]^{۱/۳} = [۲۸۸ + √(۸۲۹۴۴ − ۳۲۷۶۸)]^{۱/۳} ...

−[۲۸۸ + √(۲۸۸)^۲ + (−۳۲)^۳]^{۱/۳} = [۲۸۸ + √۵۰۱۷۶]^{۱/۳} − ۳۲ / [۲۸۸ + √۵۰۱۷۶]^{۱/۳} ...

= [۲۸۸ + ۲۲۴]^{۱/۳} − ۳۲ / [۲۸۸ + ۲۲۴]^{۱/۳} = ۸ − ۳۲/۸ = ۸ − ۴ = ...

کعبي را رجوع بشکل مذکور نمودم بدینصورت $\text{ک}^3 + \text{مر}\,\text{ک} = \text{ب}$ وفرض کردم $\text{ے} + \text{ر} = \text{ک}$ و $3\,\text{ے}\,\text{ر} = -\text{مر}$ پس اینجا بسبب تبدیل این مقادیر معادلهٔ مذکوره بدینصورت خواهد شد $\text{ے}^3 + 3\,\text{ے}^2\text{ر} + 3\,\text{ے}\,\text{ر}^2 + \text{ر}^3 + \text{مر}\times(\text{ے} + \text{ر}) = \text{ے}^3 + \text{ر}^3 + 3\,\text{ے}\,\text{ر}\times(\text{ے} + \text{ر}) + \text{مر}\times(\text{ے} + \text{ر}) = \text{ے}^3 + \text{ر}^3 - \text{مر}\times(\text{ے} + \text{ر}) + \text{مر}\times(\text{ے} + \text{ر}) = \text{ے}^3 + \text{ر}^3 = \text{ب}$ واگر از مجذور معادلهٔ مذکوره چهار کعب معادلهٔ $\text{ے}\,\text{ر} = -\frac{1}{3}\text{مر}$ ساقط کنم $\text{ے}^6 - 2\,\text{ے}^3\text{ر}^3 + \text{ر}^6 = \text{ب}^2 + \frac{4}{27}\text{مر}^3$ بلکه $\text{ے}^3 - \text{ر}^3 = \sqrt{\left(\text{ب}^2 + \frac{4}{27}\text{مر}^3\right)}$ خواهد شد وهرگاه این را با معادلهٔ هذا $\text{ے}^3 + \text{ر}^3 = \text{ب}$ جمع کنم پس $2\,\text{ے}^3 = \text{ب} + \sqrt{\left(\text{ب}^2 + \frac{4}{27}\text{مر}^3\right)}$ و درینصورت $2\,\text{ر}^3 = \text{ب} - \sqrt{\left(\text{ب}^2 + \frac{4}{27}\text{مر}^3\right)}$ وهرگاه $\text{ے} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\text{ب} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ب}^2 + \frac{1}{27}\text{مر}^3\right)}}$ ونیز $\text{ر} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\text{ب} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ب}^2 + \frac{1}{27}\text{مر}^3\right)}}$ وچون مقدار مر منفی است و $\frac{1}{27}\text{مر}^3$ اعظم از $\frac{1}{4}\text{ب}^2$ پس استخراج ضلع مجهول بسبب این قاعده حاصل منفی خواهد شد علی العموم وچون ظاهر است که $\text{ے} + \text{ر} = \text{ک}$ بلکه $= \sqrt[3]{\frac{1}{2}\text{ب} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ب}^2 + \frac{1}{27}\text{مر}^3\right)}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\text{ب} - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ب}^2 + \frac{1}{27}\text{مر}^3\right)}}$ وهرگاه $\text{ر} = \frac{-\text{مر}}{3\,\text{ے}}$ درینصورت

$$\text{ے} + \text{ر} = \text{ے} + \frac{-\text{مر}}{3\,\text{ے}} = \text{ک} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\text{ب} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ب}^2 + \frac{1}{27}\text{مر}^3\right)}} + \frac{-\frac{1}{3}\text{مر}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}\text{ب} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\text{ب}^2 + \frac{1}{27}\text{مر}^3\right)}}}$$

= ضلع مطلوب حسب قاعدهٔ مذکوره *

فائده این قاعده که برای استخراج معادلهٔ کعبي مذکور شد منسوب بطرف اکثر مشاهیر اهل ریاضي فرنگ است که بامتحان مقرر کرده اند و اول معلوم نبود که این قاعده عام است لیکن بامتحانات کثیره عمومیهٔ قاعدهٔ هذا بظهور پیوست *مثال اول $\text{ے}^3 + 3\,\text{ے}^2 + 9\,\text{ے} = 13$ پس مقدار ے چه باشد چون بموجب مسئلهٔ دوم فرض کردم $\text{ے} = \text{ک} - 1$ پس مقابلهٔ مذکوره بدینصورت شد

$(\frac{1}{4} مر^2 - ب) \times د = (ح^2 سر^2) = \frac{1}{4}(ر^2 - 2 ر مر سر + سر^2)$ گردید وهرگاه این هردو معادلین متقابلین را یک طرف آورند وتنصیف سازند پس $ر^3 - \frac{1}{2} ب ر^2 + (\frac{1}{4} مر سر - د) ر - \frac{1}{2}(\frac{1}{4} مر^2 + (د) \times (\frac{1}{4} مر^2 - ب)) = 0$ وهرگاه $\frac{1}{4} مر سر - د = ط$ و $\frac{1}{4} مر^2 + د \times (\frac{1}{4} مر^2 - ب) = ل$ عرض کنم پس معادلهٔ کعبی نو بهم خواهد رسید بدینصورت $ر^3 - \frac{1}{2} ب ر^2 + ط ر - \frac{1}{2} ل = 0$ وبوسیلهٔ این معادله بموجب مسئلهٔ پنجم مقدار ر متعین میتواند شد وهرگاه مقدار ر متعین شد پس مقدار ح وسر نیز متعین خواهد شد بدینصورت $ح = \left[(2 ر + \frac{1}{4} مر^2 - ب)\right]^{\frac{1}{2}}$ و $سر = \frac{ر مر - د}{2 ح}$ وهرگاه این هرسه مقدار متعین شدند مقدار ک نیز حاصل خواهد شد چراکه $(ک^2 + \frac{1}{2} مر ک + ر)^2 - (ح ک + سر)^2$ عموما مساوی با $ک^4 + مر ک^3 + ب ک^2 - سر ک + د = 0$ دیده گردیده شده است پس ظاهر است که هرگاه مقدار ک بموجب معادلهٔ اولی [illegible] مساوی صفر که لاشی است می افتاد ضرورة معادلهٔ ثانی نیز که مساوی معادلهٔ اولی است مساوی صفر خواهد بود وهرگاه بموجب معادلهٔ مفروضهٔ مربعی که از حروف ح و ر و سر [illegible] شده است ومقدار آن هرسه حرف معلوم گردید پس مقدار ک هم از روی قاعدهٔ معادلهٔ مربعی استخراج خواهد گردید بدینصورت $ک^2 + \frac{1}{2} مر ک + ر = \pm ح ک \pm سر$ پس $ک = \pm \frac{1}{2} ح - \frac{1}{4} مر \pm [illegible]$ [illegible]

وازین هر چهار ضلعهای مختلف معادلهٔ مذکوره بحسب [illegible] حاصل خواهد [illegible] وباید دانست که درین قاعده فوایدی چند [illegible] [illegible] کردن رقم دوم معادله برای ترتیب استخراج [illegible] $ر = \frac{1}{2} ب ر - [illegible]$ ل = ۰) [illegible] مقدار ر دیگر شکل [illegible] درآن مقابله همیشه مطلق [illegible] وهمه ضلعهای معادله [illegible] بعضی [illegible] پس ضلعهای [illegible] ک [illegible] ۲ ک [illegible]

۷ = ۰ پس مقدار ک [illegible] ک [illegible] ک [illegible] ب ک [illegible] − مر ک − د = ۰ مینویسم مر = ۰ وب = ۰ [illegible] [illegible] = ۱۷ و ل = [illegible] (¼ مر² − ب) = [illegible] [illegible]

خواهد یافت پس بقاعدهٔ که در گفتار اول برای استخراج ضلع معادلات های وجه العام بیان کرده‌ام عمل نمایند اسهل وانسب است با بطریقیکه درمسئلهٔ سیوم مذکور شد استخراج نمایند بهتر است *

مسئلهٔ ششم در استخراج ضلع معادله مالمالی بطریق خاص *

قاعده رقم دوم معادلهٔ مال مالی را که رقم کعب است بموجب مسئلهٔ دوم معدوم سازند پس آن معادله راجع بشکل هذا خواهد شد $ک^4 + ب\,ک^2 + ر\,ک + س = 0$ بعدازان یک معادلهٔ کعبی فرض کنند بدینصورت $ی^3 + 2\,ب\,ی^2 + (ب^2 - 4\,س)\,ی - ر^2 = 0$ ورقم دوم این معادله رابموجب مسئلهٔ دوم معدوم ساخته مقدار $ی$ بموجب مسئلهٔ پنجم بهمرسانند وبعدازان فرض کنند $م = \sqrt{ی}$ و $ذ = \frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}م^2 - \frac{ر}{2م}$ و $ح = \frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}م^2 - \frac{ر}{2م}$ بعدازان فرض کنند ومعادلهٔ مربعی بدینصورت $ک^2 + م\,ک + ذ = 0$ و $ک^2 - م\,ک + ح = 0$ ومسطح آن هردو معادله مساوی معادلهٔ مال مالی مطلوبه خواهد بود وازین سبب چهار ضلع برای معادلهٔ مالمالی بهم خواهد رسید وچون معلوم شد که $ک^4 + ب\,ک^2 + ر\,ک + س = 0$ این معادله مساوی است با حاصل ضرب هردو معادلهٔ مربعی امنی $ک^2 + م\,ک + ذ = 0$ و $ک^2 - م\,ک + ح = 0$ پس حاصل ضرب $ک^4 + (ذ + ح - م^2)\,ک^2 + (م\,ح - م\,ذ)\,ک + ذ\,ح = 0$ شد وهرگاه $ذ + ح - م^2 = ب$ و $م\,ح - م\,ذ = ر$ و $ذ\,ح = س$ است وچون $ذ = -\frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}م^2 + \frac{ر}{2م^2}$ و $ح = \frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}م^2 - \frac{ر}{2م^2}$ و $س = ذ\,ح = \frac{1}{4}ب^2 - \frac{1}{2}ب\,م^2 + \frac{1}{4}م^4 - \frac{ر^2}{4م^2}$ اند بدین سبب $م^6 + 2\,ب\,م^4 + (ب^2 - 4\,س) \times م^2 = ر^2$ با معادلهٔ کعبی که از مقدار $م$ بهم میرسد وآن بعینه معادلهٔ کعبی مفروضه است وچون همه ارقام آن عددی ومعلوم اند و $ذ = -\frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}م^2 + \frac{ر}{2م}$ و $ح = -\frac{1}{2}ب + \frac{1}{2}م^2 - \frac{ر}{2م}$ پس مقدار $ذ$ و $ح$ نیز معلوم خواهد شد وازان مقدار ضلع مجذورین معادلین $ک^2 + م\,ک + ذ = 0$ و $ک^2 - م\,ک + ح = 0$ نیز معلوم خواهد شد پس هرچهار ضلع مال مالی معادله هم متعین خواهد گردید **مثال** $و^4 - 4\,و^2 - 8\,و +$

بدینصورت ک = ر² + ۲ ره + ه²

− ۵ ک = − ۵ ر − ۵ ه

− ۳۱ = ۰ = − ۳۱

ر² + ۲ ره − ۵ ر + ه² − ۵ ه − ۳۱ = ۰

وهرگاه مربع ه را اسقاط نمودم ومقدار ه را بیک طرف مقابله آوردم ۲ ره − ۵ ه = − ر² + ۵ ر + ۳۱ شد هرگاه این معادله را بر ۲ ر − ۵ قسمت کردم ه = (۳۱ + ۵ ر − ر²) / (۲ ر − ۵) گردید پس

ه = (۳۱ + ۳۰ − ۳۶) / (۱۲ − ۵) = ۲۵/۷ = ۳ ۴/۷ تقریباً گردید پس ک = ۹ ۴/۷ شد تقریباً وگر دوباره این مقدار ک را ر فرض کردم ومقدار تفاضل را باصلح تحقیق ه پس پیدا کردیم بدینصورت

ه = (۳۱ + ۵ ر − ر²) / (۲ ر − ۵) = ... تقریباً پس ک = ... تقریباً دیگر

باز این مقدار را مثل بطرف ر ساز پس مقدار ه = ... خواهد بود پس ک = ...

وهمچنین تا هر وقتیکه خواهند * مثال دوم ک³ + ک² + ک = ۱۰ پس مقدار ک چه باشد

چون بحسب امتحان صلح تقریبی چه زست لهذا ر = ۲ و ر + ه = ک فرض کردیم پس

ک³ = ر³ + ۳ ر² ه + ۳ ر ه² + ه³
ک² = ر² + ۲ ره + ه²
ک = ر + ه

ر³ + ۳ ر² ه + ۳ ر ه² + ر² + ۲ ره + ر + ه = ۱۰

مثلاً ۳ ر² ه + ۲ ره + ه = ۱۰ − ر³ − ر² − ر پس ه = (۱۰ − ر³ − ر² − ر) / (۳ ر² + ۲ ر + ۱) = (۱۰ − ۸ − ۴ − ۲) / (۱۲ + ۴ + ۱) = ...

= ... پس ک = ... تقریباً وگر دوباره این مقدار را بطرف ر ساخته پس ه = ...

ج۸ = ۳۲/۸ = ۸ + ۴ = ۱۲ وازین سبب ب = ۴ + ۱۲ = ۱۶ پس ح = √۱۶ = ۴ و ز = − ۹/۲ + ۱۱/۲ + ۱۱/۸ = ۷ و ح = − ۹/۲ + ۱۱/۲ − ۱۱/۸ = ۳ پس ح = ۴ و ز = ۷ و ح = ۳ وهرگاه دو مقابلهٔ مربعی مفروضه ک² + ح ک + ز = ۰ و ک² − ح ک + ح = ۰ درینصورت ک² + ح ک + ز = ک² + ۴ ک + ۷ = ۰ و ک² − ح ک + ح = ک² − ۴ ک + ۳ = ۰ پس از روی معادلهٔ اولی ک = − ۲ + √−۳ خواه − ۲ − √−۳ وبموجب معادلهٔ دوم ک = ۳ خواه ۱ وازین سبب برای معادله مالمالي ک⁴ − ۶ ک³ − ۱۲ ک + ۲۱ = ۰ چهارضلع اول بهم رسیدند ۳ و ۱ و (− ۲ + √−۳) و (− ۲ − √−۳) وهرگاه واحد باهریکی ازینها جمع کرده شود بحسب مفروض اعنی ء = ک + ۱ که سابق فرض شده بود درینصورت ۴ و ۲ و (− ۱ + √−۳) و (− ۱ − √−۳) این هرچهارضلع‌های معادله مالمالي مطلوبه ء⁴ − ۴ ء³ − ۸ ء + ۳۲ = ۰ حاصل شدند چون ضلعین آخرین معدوم وغیرممکن اند لهذا ضلعین اولین اعنی ۴ و ۲ متعین خواهند شد *

فائده قاعدهٔ هذا را منسوب بطرف (دیسکرتیس) نامی میکنند وبعضی منسوب بحکماء بابلي وبعضی منسوب بحکماء ایتالیین می نمایند لیکن فی الحقیقة موجدآن (لا برفراري) نامي شخصي است و(دیسکرتیس) سوای آن قاعدهٔ دیگر برای استخراج ضلع معادله مالمالي از دومعادلهٔ مربعي بطریق تفصیل ذیل ایجاد کرده ودرهریک معادله مالمالي یک معادلهٔ نو بسبب تفاضل دومعادله مربعي معین ساخته وقاعده اینست که هرگاه یک معادله مالمالي فرض کنم * مثلا ک⁴ + م ک³ + ب ک² + س ک + ء = ۰ پس دومعادله مربعي فرض کنم بدینصورت (ک² + ½ م ک + ر)² − (ح ک + س)² = ک⁴ + م ک³ + ب ک² + س ک + ء = ۰ ومقدار ر و ح و س را حاصل کنم بدینصورت که (ک² + ½ م ک + ر)² − (ح ک + س)² = ک⁴ + م ک³ + ۲ ر ک² + ¼ م² ک² + ر م ک + ر² − ح² ک² − ۲ ح س ک − س² = ک⁴ + م ک³ + ب ک² + س ک + ء = ۰ ودرینصورت بعد اسقاط متداخلین سه معادله حاصل میشوند * اول ۲ ر + ¼ م² − ح² = ب * دوم ر م − ۲ ح س = س * سوم ر² − س² = ء وازین هرسه معادله سه معادلهٔ دیگر بهم می رسند * اول ۲ ر + ¼ م² − ب = ح² * دوم ر م − س = ۲ ح س * سوم ر² − ء = س² وهرگاه درین هرسه معادلهٔ اخیره معادلهٔ اول وثالث را باهم ضرب کنم مساوي ربع مربع معادلهٔ ثاني خواهد بود درینصورت ۲ ر³ + (¼ م² − ب) × ر² − ۲ ء ر −

پس ک = [illegible] ۴ واین ضلع تقریبی مطلوبه است باید دانست که در هرجا مخرج ذو اصفار بقدر ضعف عدد اعداد مخرج اول گرفته میشود تا اقرب التقریبی بهم رسد *

فائده باید دانست که این ترکیب برای استخراج ضلع تقریبی مضلعات اصم است وچون مضلعات مقدار م که در قاعدهٔ اولی گذاشته می شوند در اینجا مضلعات آن را هم گرفته اقرب التقریبی حاصل می سازند لیکن درین طریق که مقادیر اول وثانی وثالث که برای م مقرر کرده شده است از روی امتحان است پس ممکن است که برای دیگر اقرب التقریبی همچنین مقادیر م بحسب اعداد ماقبل مثال م و میزان درست کند لیکن احترازاً عن الاطناب والاشکال که اکثر غلطی وسهو در درست کردن مقادیر متصور می شود بهمین قدر اکتفا کرده شد *

مسئلهٔ هشتم در استخراج ضلع تقریبی مضلع معین در حد قاعده م = عددیکه ضلع او مطلوب است فرض کنم و ر = ضلع تقریبی که بحسب امتحان بهم رسد و م = عدد مثل مضلع مطلوب الضلع فرض سازم وبعد از آن $و = \frac{م ر}{م - و}$ فرض کنیم پس ضلع مطلوب = ر +

$$[illegible] \; تقریباً \; و جمیع = ر + \frac{ر \times (م + 1) [illegible]}{و \times (م - ۲) [illegible]} [illegible]$$

تقریباً خواهد بود مثال اول ک = ۴ پس ضلع مطلوب است تعیین ضلع تقریبی آن بحسب امتحان ۱ [illegible] است لهذا م = ۲ و ر = [illegible] و م = ۲ و و = $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ = [illegible]

ودرین صورت ک = ر + $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ = [illegible] = $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ = $\frac{197}{[illegible]}$

= [illegible] + $\frac{197}{13860}$ = $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ ۱ = ضلع تقریبی مطلوب است واگر از روی [illegible]

دوم عمل نمائیم پس ضلع تقریبی مساوی $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ ۱ [illegible] ک = ر +

$$\frac{ر [illegible] (م [illegible])}{و \times [illegible]} = [illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]} = [illegible]$$

مطلوب است [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible] دوم ک = [illegible] پس [illegible] ک [illegible] چون [illegible]

= ـه دراینصورت ر = ۱ پس ح = ∛[(۲ ز + √(ز² ـ ب))] = ∛۲ و م = (م ـ م)/(۳ ح) = (ـ۴)/(۳ ∛۲) = ـ۳ ∛۲ پس ک = ±½ ∛۲ ± (½ ± ۳ ∛۲ ـ ۱)^½ = ±½ ∛۲ ± (±۳ ∛۲ ـ ½)^½ *

تنبیه نزد فقیر درین هردو قاعده کمال نقص است چراکه درهردوقاعده برای استخراج ضلع کعب احتیاج مسئلۀ پنجم میشود و حال مسئلۀ پنجم سابق مذکورشد ومع هذا درین هردو قاعده نیزاکثرکسورواقع میشود وآنرا میگذارند ازجهت اختلال کلي ومشقت بسیارمنصورمیشود *

فائده برای استخراج معادلۀ ماللي معادلۀ چندترکیب دیگرهم هست که چنداشخاص برآورده اندچنانچه یکی ازان (مسترلوزلر) که درسنه ۱۶۴ درملک الیمان ایجادکرده ونیزبعضی دیگرقواعدبرای استخراج معادلات پنج مقداري هم ازمعادلات تحتاني آنها ترکیب داده معین کرده اندلیکن آنهمه قواعدنهایت ضعیف اند وقاعدۀ عام بستند که مقصود ازان معلوم تواند شدلهذادرینجا فروگذاشته شد *

مسئلۀ هفتم دراستخراج ضلعهای تقریبي بوجه عام باید که اول ازروی امتحان ضلع تقریبي حاصل کنند وبعد ازان ضلع تقریبي را بحرف ر تعبیرساخته تفاضل مابین ضلع تقریبي وضلع تحقیقی را ه فرض کنند ومقدار مجهول رامساوي ر ± ه ثبت نمایند وبحسب معادله مضلعات حاصل سازند وبعد ازان مضلعات ه راحذف کرده باقي را رجوع بمعادلۀ مفرد نمایند ومقدار ه حاصل کنند ومقدار ه جمع نمایند که ضلع اقرب التقریبي مطلوبه خواهدبود واگرازان هم اقرب مطلوب باشد بازآن مقدار حاصل را ر تعبیرنموده و ه را مقدارتفاضل فرض کرده باز دستورعمل نمایند وهمچنین تاهرجاکه خواهند *

فائده این قاعده گاهی برای استخراج ضلعهای معادلات که نهایت مشکل ومحنت طلب بودند دربعض حالات خاص معین شده بود لیکن بسبب امتحان متواتر معلوم شدکه مشتمل همه انواع معادلات است هرچند حصول مقدار صحیح تاکدام مرتبه معین نمیگردد ولیکن اقرب التقریبي حاصل میشود بسبب برآوردن ضلع تقریبي ازروی امتحان * مثال ک³ ـ ه ک ـ ۳۱ = ۰ پس مقدار ک چه باشد چون ازروی امتحان ضلع تقریبي مساوي هشت است پس فرض کردم ۸ = ر * ونیز ر + ه = ک پس مضلعات آن ساختم

دو عدد فرض کردم یکی $\frac{۲}{۱۰}$ ۲ دوم $\frac{۵}{۱۰}$ ۳ درینصورت عدد منزل ک = عدد منزل $\frac{۲}{۱۰}$ ۳ = [illegible] پس ک × عدد منزل ک = [illegible] ۱ وهرگاه معروض = دو بود درینصورت خطاء اول ناقص − [illegible] ونیز ک = عدد منزل $\frac{۵}{۱۰}$ ۳ = [illegible] پس ک × عدد منزل ک = [illegible] ۲ وچون مساوات معروضه دو است لهذا خطاء ثاني زائد مساوي [illegible] گردید پس عدد اصغر وخطاء اصغر وعدد اعظم وخطاء اعظم را نوشته فصل دو عدد ومجموع الخطائین گرفتم بدینصورت

عدد اصغر $\frac{۲}{۱۰}$ ۲ خطاء اعظم − [illegible]

عدد اعظم $\frac{۵}{۱۰}$ ۳ خطاء اصغر + [illegible]

فصل العددین $\frac{۳}{۱۰}$ مجموع الخطائین نسبت خطائین مختلفین − [illegible]

= [illegible] حسب ضرب فصل العددین في اصغر الخطائین و قسمة علی مجموع الخطائین = [illegible] = خارج قسمت مطلوبه بعد از آن خارج را از عدد اعظم تفریق کردم بدینصورت شد عدد اعظم [illegible] ۳ خارج قسمت که [illegible] = [illegible] = ک تقریبا [illegible] = [illegible] ۳ [illegible] عدد منزل [illegible] [illegible] پس ک [illegible] عدد منزل ک = [illegible] [illegible] درینصورت خطاء اصغر [illegible] مساوات [illegible] وچون [illegible] ک = [illegible] [illegible] [illegible] آن هم خطا [illegible] شده بود + [illegible] [illegible] طریق اول فصل العددین ومجموع الخطائین گرفتم بدینصورت شد

عدد اعظم [illegible] ۳ خطاء اعظم + [illegible]

عدد اصغر [illegible] ۳ خطاء اصغر − [illegible]

فصل العددین [illegible] مجموع الخطائین [illegible]

= [illegible] = [illegible] = خارج قسمت [illegible] [illegible]

۲

$= \frac{۹۰ - ۶۸\frac{۹۲۱}{۱۰۰۰} - ۱۹\frac{۸۱}{۱۰۰} - ۳\frac{۱}{۱۰}}{۱ + ۸\frac{۴}{۱۰} + ۵ + \frac{۶۳}{۱۰۰}} = \frac{۲۸۳}{۱۰۰۰۰}$ پس $ک = ۴\frac{۱۰۲۸۳}{۱۰۰۰۰}$ تقریبا وهو المطلوب *

طریق دیگر معادلهٔ اعظم برای $\overline{د}$ فرض کنم بدینصورت $م د + ب د^۲ + س د^۳ + ء د^۴$ وغیره $= ن$) اینجا $\overline{د}$ مقدار تفاضل است و $\overline{م}$ و $\overline{ب}$ و $\overline{س}$ و $\overline{ء}$ وغیره عدد ماقبل $\overline{د}$ ومصلحات اواست و $\overline{ن}$ مقدار عدد معلوم که بیکطرف مقابله واقع شده درینصورت اول مقدار $\overline{د}$ تقریبی $\frac{م ن}{م^۲ + ب ن}$ خواهد بود وهرگاه $م = \frac{ب س}{م ب}$ فرض کنم پس $\frac{(م + س ن) \times ن}{م^۲ + (ب + م س) \times ن} =$ دوم مقدار $\overline{د}$ تقریبی خواهد برآمد وهرگاه $\frac{ب^۲}{م} + \frac{م ء}{ب} - \frac{ب س}{م س} = \overline{و}$ فرض کنم پس $\frac{م ن \times (م + و ن)}{م \times (م^۲ + (ب + م و) \times ن) \times (و - س) \times ن} =$ سوم مقدار تقریبی $\overline{د}$ خواهد برآمد *

مثال $ک^۲ + ۲۰ ک = ۱۰۰$ پس مقدار $ک$ چه باشد چون بحسب امتحان عدد چهار ضلع تقریبی است درینصورت $۴ + د = ک$ فرض کنم

$$پس\ ک^۲ = ۱۶ + ۸ د + د^۲$$
$$۲۰ ک = ۸۰ + ۲۰ د$$
$$۹۶ + ۲۸ د + د^۲ = ۱۰۰$$

بلکه $۲۸ د + د^۲ = ۴$ پس بموجب قاعدهٔ هذا $م = ۲۸$ و $ب = ۱$ و $س = ۰$ و $ء = ۰$ و $ن = ۴$ ازین سبب $د = \frac{م ن}{م^۲ + ب ن} = \frac{۱۱۲}{۷۸۸} = \frac{۲۸}{۱۹۷} = \frac{۱۴۲۱۳}{۱۰۰۰۰۰}$ واین اول مقدار $\overline{د}$ تقریبی است وهرگاه $س = \frac{ب}{م} - \frac{س}{ب} = \frac{۱}{۲۸}$ پس $د = \frac{(م + س ن) \times ن}{م^۲ + (ب + م س) \times ن} = \frac{۴ \times (\frac{۱}{۷} + ۲۸)}{۴ \times (۱ + ۱) + ۲۸ \times ۲۸} = \frac{\frac{۱}{۷} + ۲۸}{۲ + \frac{۱}{۴} \times (۲۸)^۲} = \frac{۱۹۷}{۱۳۸۶} = \frac{۱۴۲۱۳۴۲۴}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}$ واین مقدار دوم $\overline{د}$ تقریبی است وهرگاه $و = \frac{ب^۲}{م} + \frac{م ء - ب س}{ب^۲ - م س} = \frac{۱}{۲۸}$ درینصورت $د = \frac{م ن \times (م + و ن)}{م \times (م^۲ + (ب + م و) \times ن) + (و - س) \times ن^۲}$
$= \frac{(\frac{۴}{۷} + ۲۸) \times ۴ \times ۲۸}{\frac{۴}{۷} + (۱۲ + ۷۸۴) \times ۲۸} = \frac{(\frac{۴}{۷} + ۲۸) \times ۲۸}{\frac{۱}{۷} + ۷۹۶ \times ۷} = \frac{۱۹۸ \times ۲۸}{۱ + ۷۹۶ \times ۴۹} = \frac{۵۵۴۴}{۳۹۰۰۵} = \frac{۱۴۲۱۳۵۶۲۳۹}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}$

وکسور که باقی می ماند آنرا هم مساوی صحیح اعتبار می کند چراکه مجموع صحیح معروض شده و هرگاه از صحیح صحیح را ساقط کند باقی هم صحیح می ماند ٭ مثال اول $\text{۱۹ ک} = \text{۱۴ ے} - \text{۱۱}$ پس مقدار ک وی چه باشد ٭ جواب چون $\text{ک} = \frac{\text{۱۴ ے} - \text{۱۱}}{\text{۱۹}} = \text{صحیح}$ ونیز $\frac{\text{۱۹ ے}}{\text{۱۹}} = \text{صحیح}$ وبحسب تفریق $\frac{\text{۱۹ ے}}{\text{۱۹}} - \frac{\text{۱۴ ے} - \text{۱۱}}{\text{۱۹}} = \frac{\text{۵ ے} + \text{۱۱}}{\text{۱۹}} = \text{صحیح}$ وهرگاه این را در چهار ضرب کردم پس $\frac{\text{۵ ے} + \text{۱۱}}{\text{۱۹}} \times \text{۴} = \frac{\text{۲۰ ے} + \text{۴۴}}{\text{۱۹}} = \frac{\text{۲۰ ے} + \text{۶}}{\text{۱۹}} + \text{۲} = \text{صحیح}$ وبعد اسقاط دو که عدد صحیح است $\frac{\text{۲۰ ے} + \text{۶}}{\text{۱۹}} = \text{صحیح}$ و از این سبب باز بحسب تفریق $\frac{\text{۲۰ ے} + \text{۶}}{\text{۱۹}} - \frac{\text{۱۹ ے}}{\text{۱۹}} = \frac{\text{ے} + \text{۶}}{\text{۱۹}} = \text{صحیح}$ دراینصورت $\text{ے} + \text{۶} = \text{۱۹}$ چراکه طرف آخر معادله را که لفظ صحیح است بواحد تغییر کردم پس $\text{ے} = \text{۱۳}$ ودراینصورت $\text{ک} = \text{۹}$ وهو المطلوب ٭ مثال دوم $\text{۳ ک} = \text{۸ ے} - \text{۱۶}$ پس مقدار ک وی چه باشد چون $\text{ک} = \frac{\text{۸ ے} - \text{۱۶}}{\text{۳}} = \text{۲ ے} - \text{۵} + \frac{\text{۲ ے} - \text{۱}}{\text{۳}} = \text{صحیح}$ وبعد اسقاط اعداد صحیح $\frac{\text{۲ ے} - \text{۱}}{\text{۳}} = \text{صحیح}$ وبحسب الضرب $\frac{\text{۲ ے} - \text{۱}}{\text{۳}} \times \text{۲} = \frac{\text{۴ ے} - \text{۲}}{\text{۳}} = \text{صحیح}$ وهرگاه $\frac{\text{۳ ے}}{\text{۳}} = \text{صحیح}$ از این سبب $\frac{\text{۴ ے} - \text{۲}}{\text{۳}} - \frac{\text{۳ ے}}{\text{۳}} = \frac{\text{ے} - \text{۲}}{\text{۳}} = \text{صحیح}$ وهرگاه صحیح را واحد فرض کردم پس $\text{ے} = \text{۳} + \text{۲} = \text{۵}$ پس $\text{ک} = \text{۸}$ وهو المطلوب ٭ مثال سیوم $\text{۹ ک} + \text{۱۳ ے} = \text{۲۰۰۰}$ پس مقدار ک وی چه باشد چون $\text{ک} = \frac{\text{۲۰۰۰} - \text{۱۳ ے}}{\text{۹}} = \text{۲۲۲} - \text{ے} + \frac{\text{۲} - \text{۴ ے}}{\text{۹}} = \text{صحیح}$ وبعد اسقاط اعداد صحیح $\frac{\text{۲} - \text{۴ ے}}{\text{۹}} = \text{صحیح}$ وبحسب الضرب $\frac{\text{۲} - \text{۴ ے}}{\text{۹}} \times \text{۲} = \frac{\text{۴} - \text{۸ ے}}{\text{۹}} = \text{صحیح}$ وهرگاه $\frac{\text{۹ ے}}{\text{۹}} = \text{صحیح}$ پس $\frac{\text{۹ ے}}{\text{۹}} + \frac{\text{۴} - \text{۸ ے}}{\text{۹}} = \frac{\text{۴} + \text{ے}}{\text{۹}} = \text{صحیح}$ وهرگاه صحیح را [illegible] فرض کردم و ترتیب نمودم $\text{ے} = \text{۹} - \text{۴} = \text{۵}$ پس $\text{ک} = \text{۲۱۵}$ ودراینجا اگر [illegible] جمع کند همچنان عدد سیزده را از مقدار ک ساقط کند پس دیگر [illegible]

امتحان محسه ضلع تقریبی ۸ برآمد لهذا م = ۲۰۰ و ر = ۸ و ه = ۳ و و = $\frac{۵۱۲ \times ۳}{۱۲-} = -۱۲۸$

ازین سبب ک = ر + $\frac{ر \times (۱ + ه + ۶ و)}{و \times (۶ و + ۴ ه - ۲)}$ = ۸ − $\frac{۲۳}{۱۰۰۰}$ = $\frac{۱۳}{۱۰۰}$ ۷ تقریبا خواهد ک = ر +

$\frac{ر \times (۲ و + ه)}{و \times (۲ و + ۳ ه - ۱) + \frac{۱}{۲} \times (ه - ۱) \times (۲ ه - ۱)}$ + ۸ = $\frac{۸ \times - ۲۵۶}{- ۱۲۸ \times - ۲۵۱ + \frac{۱}{۲}}$ + ۸ = $- \frac{۱۲۱۴۴}{۱۹۴۷۸}$ =

۸ − $\frac{۶۰۷۲}{۹۷۳۸۹}$ = $\frac{۹۳۷۰۰۶۴۵۹۹۴۳۶}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}$ ۷ = ضلع تقریبی مطلوبه است *

مسئلهٔ نهم دربهم رسانیدن ضلع تقریبی معادلهٔ (ایکش لونین ثنل) اعنی مضلعیکه عدد منزل او مساوی ضلع اول او باشد *

قاعده اول دوعدد برای ضلع تقریبی بحسب امتحان انچه ممکن باشد بهم رسانند وکسر عدد منزل آنهاراکه (لوگری تهم) گویند حاصل کنند وطریق حصول آن درمطلب علحده مذکور شود انشاءالله تعالی وازان هردو اعداد دومعادلهٔ دیگر حاصل کنند بدینطریق که مسطح مجهول فی عدد منزل مجهول مساوی عدد منزل اعداد مقابلهٔ مطلوبه فرض کرده بعدازان هردواعداد مفروضه رادرکسور اعداد منزل آنهاضرب ساخته باعدد منزل اعداد مقابلهٔ اعداد اولی مساوی سازند وهرچه خطا واقع شود زاید خواه ناقص بران علامت زاید یاناقص گذارند بعدازان تفاضل عددین مفروضین رادرخطاء اصغرضرب کرده حاصل رابرتفاضل خطائین قسمت سازند اگر خطائین متفقین باشد وبرمجموع آنهاقسمت کنند اگرخطائین مختلفین بوند باید دانست که در گرفتن تفاضل مجموع خطائین لحاظ زاید وناقص نمی کنند وبعدازان خارج قسمت رابا عدد متعلق خطاء اصغر جمع کنند اگرآ نعدد بسیار اقل باشد وخواه ازعدد اعظم تفریق کنند که حاصل جمع تقریبی خواهد بود وبعدازان آنراوضلع تقریبی اعظم راگرفته باردستور عمل نماید که ضلع اقرب التقریبی حاصل گردد *

فائده این قاعده را (مسترجان بریل) درسنه ۱۰۹۷ عیسوی ایجادکرده است * مثال ک = ۱۰۰ پس مقدار ک چه باشد تقریبا چون عدد منزل ۱۰۰ دو است بحسب منازل طبیعی دربنصورت ک فی عدد منزل ک = عدد منزل ۱۰۰ = ۲ خواهد بود وهرگاه بحسب امتحان معلوم میشود که مقدار ک اعظم ازسه واصغر ازچهار است لهذا برای مقدار ک

آنرا بر یازده قسمت کند باقی سه ماند و اگر بر نوزده قسمت نمایند پنج باقی ماند و اگر بر بیست و نه قسمت نمایند باقی ده ماند پس مجهول را ک فرض کردم و نوشتم $\frac{\text{ک}-3}{11}$ و $\frac{\text{ک}-5}{19}$ و $\frac{\text{ک}-10}{29}$ $=\bar{\text{و}}$ و هرگاه $\frac{\text{ک}-3}{11}=\text{ب}$ فرض کردم پس $\text{ک}=11\,\text{ب}+3$ شد و این مقدار را در صورت دوم با ک بدل ساختم $\frac{11\,\text{ب}-2}{19}$ شد و بحسب ضرب $\frac{11\,\text{ب}-2}{19}\times 2=\frac{22\,\text{ب}-4}{19}=\text{ب}+\frac{3\,\text{ب}-4}{19}=\bar{\text{و}}$ و بعد حذف ب که صحیح است $\frac{3\,\text{ب}-4}{19}=\bar{\text{و}}$ ماند و بحسب ضرب $\frac{3\,\text{ب}-4}{19}\times 6=\frac{18\,\text{ب}-24}{19}=\frac{18\,\text{ب}-5}{19}-1=\bar{\text{و}}$ و در این صورت $\frac{18\,\text{ب}-5}{19}=\bar{\text{و}}$ و چون $\frac{19\,\text{ب}}{19}=\bar{\text{و}}$ پس $\frac{19\,\text{ب}}{19}-\frac{18\,\text{ب}-5}{19}=\frac{\text{ب}+5}{19}=\bar{\text{و}}$ و هرگاه این مقدار را $=\bar{\text{ر}}$ فرض کنم پس $\text{ب}=19\,\text{ر}-5$ گردید و $\text{ک}=(19\,\text{ر}-5)\times 11+3=209\,\text{ر}-52$ شد و بحسب تبدیل مقدار مذکور در صورت سوم بجای ک $\frac{209\,\text{ر}-62}{29}=7\,\text{ر}-2+\frac{6\,\text{ر}-4}{29}=\bar{\text{و}}$ و بحسب حذف مقدار صحیح $\frac{6\,\text{ر}-4}{29}=\bar{\text{و}}$ و بحسب ضرب $\frac{6\,\text{ر}-4}{29}\times 5=\frac{30\,\text{ر}-20}{29}=\text{ر}+\frac{\text{ر}-20}{29}=\bar{\text{و}}$ و بحسب حذف مقدار صحیح $\frac{\text{ر}-20}{29}=\bar{\text{و}}$ و هرگاه این مقدار را مساوی ص فرض کنم پس $\text{ر}=29\,\text{ص}+20$ پس اگر $\text{ص}=0$ را صفر فرض نمایم $\text{ر}=20$ میشود و صورت $\text{ک}=209\times 20-52=4128$ میشود و هو المطلوب .

تنبیه این ضعیف میگوید که در این سؤال ص را مساوی صفر فرض کردن خلاف مشهور سابق است و اگر بموجب مشهور اول ص را مساوی یک فرض کنند جواب مطلوب حاصل میشود لیکن عدد دیگر که اعظم از این عدد حاصل است بهم میرسد در این صورت $\text{ر}=29+20=49$ پس $\text{ک}=209\times 49-52=10189$ و هو المطلوب *

بیان چهارم در (دیفنش) معادله و آن عبارت است از سؤالهائیکه مشتمل بر صورت حرا مکعبات وغیره مصطلحات اعداد مجهول باشد و در حساب آن اعداد متعدده واقع میتوانند شد و این را (دیفنتس) نامی در انگلیسی به مشرقی نسبت عددی سیوم مبسوطی ...

بدینصف ــــــــــــــــ سورت شد $۳\frac{۵۹۷۰۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰}$

خارج قسمت $\frac{۲۸۵}{۱۰۰۰۰۰۰}$

مجموع $۳\frac{۵۹۷۲۸۵}{۱۰۰۰۰۰۰}$

فائده این ضعیف میگوید که از بیان امثله معلوم میشود که اول دانستن عدد منزل طبیعی جمیع اعداد برای این قاعده ضرور است و آنرا (مسترپرجس) نامی در کتاب علیحده مفصل بیان کرده است ازان معلوم میتواند شد چنانچه حقیقت آن در بیان (لوگری تهم) مذکور خواهد شد انشاء الله تعالی *

بیان سیوم در استخراج مسائل که عدد متعدد در جواب آن واقع میتواند شد و مقصود استخراج عدد صحیح بود و دران نیز چند مسائل است *

مسئله اول در استخراج دو مجهول که در یک معادله مع اعداد معلوم واقع شوند بشرطیکه مضلعات آنها دران نباشد *

قاعده اول مقدار یک مجهول ازان معادله در حروف حاصل سازند و آنرا مساوی صحیح بدین نشان نویسند (و) بعد ازان اعداد صحیح را که دران مساوات واقع شود خواه از روی قسمت برآید ساقط کرده باقی را که ضرورة مشتمل بر مقدار یک مجهول و مساوی صحیح خواهد بود ثبت نمایند و بعد ازان آن باقی را خواه مضروبات آن باقی را در هر عددی که مناسب باشد از مضروب آن مجهول خواه در عددیکه مشتمل آن باقی است و هم مقسوم بران مضروب فیه باشد خواه آنرا در عددی دیگر مناسب ضرب کرده تفریق سازند و از باقی خواه از مضروبات باقی اعداد صحیح را ساقط کرده باز بدستور تفریق کنند پس در تفریق آخر آنچه باقیماند و مشتمل بر یک مجهول باشد آنرا مساوی با واحد فرض کنند و ترفیع ساخته عدد مجهول استخراج نمایند و هرگاه یک مجهول بهم رسید مجهول ثانی نیز بهم خواهد رسید *

فائده بنای قاعده هذا برین است که مجموع دو عدد صحیح خواه تفاضل بینهما خواه حاصل ضرب آن هر دو در دیگر اعداد صحیح همیشه عدد صحیح واقع میشود و نیز از روی قسمت عدد صحیح بر صحیح خارج عدد صحیح خواه صحیح مع الکسر از مقدار مقسوم علیه حاصل میشود لهذا از خارج قسمت وغیره اعداد صحیح را ساقط می کنند چراکه مقصود استخراج صحیح است

= ۴ ک۲ − ۴۰ ک + ۱۰۰ درینصورت بحسب اسقاط متداخلین وتبدیل طرف مستثنی ۵ ک۲ = ۴۰ ک پس ک = ۸ بنابرآن ۲ ک − ۱۰ = ۶ پس ۶۴ و ۳۶ حصهای مطلوب است *

فائده اگر ضلع مجذور دوم را ک − ۱۰ فرض کنم پس ک۲ − ۲۰ ک + ۱۰۰ = ۱۰۰ − ک۲ میشود درینصورت ک که ضلع مجذور اول است مساوی ده خواهد بود و ک − ۱۰ که ضلع مجذور دوم است مساوی صفر خواهد افتاد ازین جهت ک − ۱۰ برای ضلع دوم مفروض نشد یا اگر ۳ ک − ۱۰ خواه ۴ ک − ۱۰ خواه دیگر مقدار همچنین مفروض شوند اکثری ازان مناسب واکثری ازان غیر مناسب خواهد بود پس لحاظ این امور برای فرض کردن ضروراست طریق دیگر علی العموم مقدار صد را = م۲ فرض کردم ومقدار یک حصه ک۲ ومقدار دوم م۲ − ک۲ وهرگاه ضلع مجذور دوم را ر ک − م مفروض کردم پس م۲ − ک۲ = ر۲ ک۲ − ۲ م ر ک + م۲ وبعد اسقاط متداخلین وتبدیل مستثنی ر۲ ک۲ + ک۲ = ۲ م ر ک وهرگاه هردو طرف را بر ک قسمت کرده شود ر۲ ک + ک = ۲ م ر خواهد بود وهرگاه این مقابله را بر ر۲ + ۱ قسمت کرده شود ک = ۲ م ر / (ر۲ + ۱) خواهد شد پس ر ک − م = ۲ م ر۲ / (ر۲ + ۱) −

م = ۲ م ر۲ / (ر۲ + ۱) − (م ر۲ + م) / (ر۲ + ۱) = (م ر۲ − م) / (ر۲ + ۱) ازین سبب (۲ م ر / (ر۲ + ۱))۲ و ((م ر۲ − م) / (ر۲ + ۱))۲ این هردو حصهای مطلوب اند پس مقدار م ومقدار ر از هر عدد دیگر گرفته شود خواهد رواست طریق دیگر هردو ضلع مجذورین مجهولین را م و ر فرض کرده بحیثیتیکه م اعظم از ر باشد پس ۲ م ر دیگر م۲ − ر۲ و م۲ + ر۲ این هرسه را مقدار عدد وصلع وترمثلث قائمه الزاویه فرض کنم و بسبب شکل عروس مقدار هردو ضلع مجهولین بهم خواهد رسید بدینصورت (۲ م ر)۲ + (م۲ − ر۲)۲ = (م۲ + ر۲)۲ بلکه (ر۲ + م۲)۲ − (۲ م ر)۲ = (م۲ − ر۲)۲ خواه (م − ر)۲ ... م۲ − ر۲ = ۲ م ر پس مقدار م و ر را بهر عدد یکه تعبیر کنند بشرطیکه م اعظم از ر باشد مطلوب حاصل خواهد آمد *

تنبیه نعیم میگوید که این قاعده آخر بمعرفت مرابعهی که در مجذورین بحیثیتیکه مجموع آنها نیز مجذور باشد خواه تفاضل بینهما مجذور باشد ... طریق

ذیل حاصل خواهند شد

ک = (۲۱۵)(۲۰۲)(۱۸۹)(۱۷۶)(۱۶۳)(۱۵۰)(۱۳۷)(۱۲۴)(۱۱۱)(۹۸)(۸۵)(۷۲)(۵۹)(۴۶)(۳۳)(۲۰)(۷)

ی = (۵)(۱۴)(۲۳)(۳۲)(۴۱)(۵۰)(۵۹)(۶۸)(۷۷)(۸۶)(۹۵)(۱۰۴)(۱۱۳)(۱۲۲)(۱۳۱)(۱۴۰)(۱۴۹)

مسئله دوم در استخراج مجهول معدود بعدد صحیح بشرطیکه سائل مجهول را مقسوم بر اعدادی چند بیان کرده و باقیات آنرا که از روی قسمت واقع شده باشد اظهار سازد * مثلا گوید کدام عدد است که اگر آنرا بر هفده قسمت کند باقی هفت ماند واگر بر بست وشش قسمت کند باقی سیزده افتد وهکذا طریقش آنست که مجهول را ک فرض کند وهریک باقیات را ازان جدا جدا تفریق کرده برهریک مقسوم علیه منسوب نماید که آن همه مساوی اعداد صحیح خواهد بود بعد ازان مقدار اول راکه بصورت کسر است مساوی ب فرض سازد ومقدار ک حاصل کند وآن مقدار را درصورت دوم با ک بدل ساخته مقدار ب بموجب مسئلهٔ اولی از فرض مساوات رَ حاصل کرده بار مقدار ک ازان حاصل سازند وآنرا درمقدار سیوم بجای ک نوشته مقدار رَ حاصل کند وبازازان مقدار ک حاصل نماید پس آنرا درمقدار سیوم بجای ک آورده مساوی م فرض کند وهمچنین تاهرجا که بخواهند که عدد مطلوب خارج شود واستخراج هریکی ازمقادیر بَ و رَ و مَ بموجب مسئله اولی بعمل آرند مثال کدام عدد است که اگر آنرا بر هفده قسمت کند هفت باقی ماند واگر بربیست وشش قسمت نماید سیزده باقیماند پس عدد مجهول را ک فرض کردم دریصورت (ک − ۷)/۱۷ و (ک − ۱۳)/۲۶ = رَ و هرگاه (ک − ۷)/۱۷ = ب فرض کنم ک = ۱۷ ب + ۷ وهرگاه این مقدار را درصورت دوم بجای ک آوردم (۱۷ ب − ۶)/۲۶ = رَ شد وچون (۲۶ ب)/۲۶ نیز = رَ است پس

(۲۶ ب)/۲۶ − (۱۷ ب − ۶)/۲۶ = (۹ ب + ۶)/۲۶ = رَ ولکه بحسب الضرب (۹ ب + ۶)/۲۶ × ۳ = (۲۷ ب + ۱۸)/۲۶

= ب + (ب + ۱۸)/۲۶ = رَ وبعد حذف عدد صحیح که عبارت از ب است (ب + ۱۸)/۲۶ = ر فرض کردم دریصورت ب = ۲۶ ر − ۱۸ وهرگاه رَ را = ۱ فرض کردم پس ب = ۸ شد وضرورة ک = ۱۷ × ۸ + ۷ = ۱۴۳ وهو المطلوب ❀ مثال دوم کدام عدد است که هرگاه

فائده این سؤال (دیفنطس) استخراج کرده و این را اصول برای استخراج اکثر مسائل دیگر ساخته و اگر مقدار ر و م سوای اعداد معروضه عدد بهر عددی بین مختلفین که تعبیر کند مطلوب حاصل میتواند شد * مثلاً ۳ م و ۲ ب خواه ۳+۲ (م+ب) و ۳−۲ (م−ب) وغیر آن و از این مقدار ضلعهای هر دو حصهٔ متعدد متعین میتواند شد و باید دانست که این مسئلهٔ لطیف را (؟رستی) نامی که از قدما است در کتاب خود بانواع و اقسام طرق مبوب و متصل نموده بیان کرده است و از این برای دیگر حسابها اعانت نموده و (اندرس) نامی و (ابیت) وغیره در فن مثلثات زیاده تفصیل آن کرده و (هرکیوس) نامی بهمین حروف در جلد آخر کتابی در فن ریاضی بیان نموده است * مثال سیوم دریافت نمایندن دو مجذور بشرطیکه تفاضل بینهما معلوم باشد پس مقدار تفاضل معلوم ت فرض کردم و دو عدد غیر معین را م و ب فرض نمودم بحیثیتکه م اعظم از ب است و ک ضلع مجذور اصغر فرض کردم و ک + ب ضلع مجذور اعظم فرض نمودم در این صورت (ک + ب)² − ک² = ک² + ۲ ب ک + ب² − ک² = ۲ ب ک + ب² = ت و هرگاه این معادله را بر ب قسمت کنیم پس ۲ ک + ب = م در این صورت ک = (م − ب)/۲ = ضلع مجذور اصغر و ک + ب = (م − ب)/۲ + ب = (م + ب)/۲ = ضلع مجذور اعظم پس هرگاه تفاضل معلوم ادنی ت مساوی شصت باشد پس ت = ۶۰ = م × ب = ۲ × ۳۰ فرض خواهیم کرد در این صورت مقدار م = ۳۰ و ب = ۲ خواهد شد پس ک = (م − ب)/۲ = (۳۰ − ۲)/۲ = ۱۴ = ضلع مجذور اصغر و ک + ب = (م + ب)/۲ = (۳۰ + ۲)/۲ = ۱۶ = ضلع مجذور اعظم در این صورت ۱۹۶ = مجذور اصغر و ۲۵۶ = مجذور اعظم و همچنین هر تفاضلی معلوم که فرض کنند مضروبین آن تفاضل معلوم اعظم را م و اصغر را ب فرض نموده استخراج مجذورها میتوان کرد ... دو عدد مجهول ... مجذور ... شوند ... دو عدد مجهول را ک و ی فرض کردم در این صورت ک² − ی² = مجذور ... است و ی² + ک = مجذور دیگر است ... ک² − ی

تا

کرده است وآن اول کاتب فن جبر ومقابله واز قدما است واین سؤالات بسیار دشوار ودقیق اند که اکثر در کتب جبر ومقابله بسبب دقتی که دارد مذکور نیستند وبرکسی از علمای این فن که بسیار مقبل بودند باوجود جد وجهد ومهارت طریق این منکشف نشده بود (دیعبنوس) از فابت تفرس وتیزفهمی آنرا برآورده وهرگاه من بکمال تفکر دران مسائل خوض میکنم خودرا ناقص می یابم وار تیزفهمی ودانشمندی که درخصوص این مسائل از و بعمل آمده کمال حیرت میشود که چگونه باصول این مسائل پی برده ودرهرسؤال بعضی جا اسقاط ودربعضی جا زیادت وبطریق تو بهم رسانیدن معادلة دیگر وتفریق وجمع واستثنای کدام اعداد حسب مناسب مقام هرجا بعمل آورده و (دیعبنوس) موجد فن جبر ومقابله نیست بلکه اوهم بوضع قدیمی این علم عمل می نمود لیکن فن جبر ومقابله که پیش از وقت (دیعبنوس) درعالم رواج داشت بسبب وبرانی خواه فساد نادانی بزبان یا بسبب اشکال عبارت حکمای متقدمین ضایع ومندرس شده بود ودرفارس محاسبین بتلاش بسیار سیزده کتاب دربن فن بهم رسانیده تعلیم وتعلم می نمودند لیکن جمیع آن کتب ازین مسائل خالی بود ودرسنه ۱۶۲۱ عیسوی این فن درهند رواج یافته اکثرکسان ایجاد رعمی بعض جا توضیح وتشریح نمودند ودایند دانست که از قاعده وترکیب معادلة ذیل اگرچه از روی حصول طبعت وفکر بسیار حل سؤالات میشود لیکن قاعدهٔ عام متعین نمی تواند شد که درهرسؤال کافی باشد لهذا برای استخراج این قسم سؤالات تیزفهمی وذکای متعلم این فن ضرور است *

قاعده برای ضلع مجذور خواه ضلع کعب مطلوبه یک حرف یا زیاده ازان فرض کنند بحیثیتکه مجهول دیگر از وصل مقدار مجهول اول باعدد معلوم خواه مضلعات آن معروض شود تاکه درمقابلهٔ مقدار یک مجهول افتد پس مسئله صراحةً رجوع بمسائل گذشته خواهد نمود ولیکن اگر مقدار مجهول مجذور خواه مضلع اعظم بود پس برای ضلع اول حرف بضرورة فرض کرده خواهد شد چنانکه بالا مذکور شد ⁂ مثال اول میخواهم که عدد صد را که مجذور است دو حصه کنم بحیثیتکه هردو مجذور عددی باشند پس مجهول اول را ک² فرض کردم وثانی ۱۰۰ − ک² گردید چون هردو مجذور مجهول اند لهذا ضلع مجذور اول ک است پس ضلع مجذور ثانی ۲ک − ۱۰ فرض کردم ازین سبب ۱۰۰ − ک² = (۲ک − ۱۰)²

۲ ک + ۱ = مجذور پس این هرسه صورت بحسب سؤال درست میشود وباقی یک صورت امنی مجموع اول وثالث که مساوی مجذور نمیشود لهذا آنرا نوشتم بدینصورت ۳ ک + ۲ ک + ۱ = ۹ ک + ۱ = $م^۲$ بحسب السؤال والفرض پس ک = $\frac{م^۲ - ۱}{۹}$ وصورة $\frac{۴ م^۲ - ۴}{۹}$ و $\left(\frac{م^۲ - ۱}{۹}\right)^۲ - \frac{۴ م^۲ - ۴}{۹}$ و $\frac{۲ م^۲ - ۲}{۹}$ + ۱ مساوی هرسه اعداد مفروضه اند بلکه $\frac{۲ م^۲ - ۲}{۳}$ و $\frac{م^۴ - ۲۲ م^۲ + ۲۵}{۲۶}$ و $\frac{م^۲ + ۲}{۳}$ مقدار هرسه اعداد مطلوبه است پس مقدار م را بهرعدد یکه خواهد فرض کنم بحیثیتکه اعظم از سه باشد مطلوب حاصل بر آمده شود مثال هفتم بهم رسانیدن سه مجذور اعداد صحیح بحیثیتیکه مجموع دو دو از آن مجذور باشد پس هرسه مجذور را $ک^۲$ و $س^۲$ و $ط^۲$ فرض کردیم دربصورت بحسب السؤال $ک^۲ + س^۲$ = مجذوری و $س^۲ + ط^۲$ = مجذوری و $ک^۲ + ط^۲$ = مجذوری وبحسب قسمت $\frac{ک^۲}{ط^۲}$ + ۱ = مجذوری و $\frac{س^۲}{ط^۲}$ + ۱ = مجذوری و $\frac{ک^۲}{ط^۲} + \frac{س^۲}{ط^۲}$ = مجذوری چراکه هرگاه مجذوری را بر مجذوری قسمت می‌کند خارج قسمت هم مجذور میشود ضرورة هرگاه $\frac{ک}{ط}$ را = $\frac{م^۲ - ۱}{۲ م}$ و $\frac{س}{ط}$ را = $\frac{ز^۲ - ۱}{۲ ز}$ فرض مجذور صورت

$$\frac{ک^۲}{ط^۲} + ۱ = \frac{م^۴ - ۲ م^۲ + ۱}{۴ م^۲} + ۱ = \frac{م^۴ + ۲ م^۲ + ۱}{۴ م^۲}$$ بحسب التحقیق و $$\frac{س^۲}{ط^۲} + ۱ = \frac{ز^۴ + ۲ ز^۲ + ۱}{۴ ز^۲}$$

وهرگاه این هردو مجذور اند ازین سبب صورت $\frac{ک^۲}{ط^۲} + \frac{س^۲}{ط^۲}$ = مجذوری [illegible] وجود

$$\frac{ک^۲}{ط^۲} + \frac{س^۲}{ط^۲} = \left(\frac{م^۲ - ۱}{۲ م}\right)^۲ + \left(\frac{ز^۲ - ۱}{۲ ز}\right)^۲ = \frac{(م^۲ - ۱)^۲}{۴ م^۲} + \frac{(ز^۲ - ۱)^۲}{۴ ز^۲} =$$

$$\frac{۴ ز^۲ (م^۲ - ۱)^۲ + ۴ م^۲ \times (ز^۲ - ۱)^۲}{۴ ز^۲ \times ۴ م^۲}$$ [illegible] $(م^۲ - ۱)^۲$

+ $م^۲ \times (ز^۲ - ۱)^۲ = ز^۲ \times (م - ۱)^۲ \times (م + ۱)^۲ + م^۲ \times$ [illegible] = مجذوری [illegible]

وبسبب فرض کردن [illegible] $= م - ۱$ [illegible] $= م + ۲$ [illegible] $(م - ۲)^۲ \times (م - ...)^۲$ [illegible]

$(م - ۱)^۲ + م^۲ \times (م + ۱)^۲ \times (م - ۲)^۲$ = مجذور شد $(م - ۲)^۲$ [illegible] $م^۴ - ...$ [illegible] $(م + ۳)^۲$

اربعهٔ متناسبه حصهٔ هر مجذوری که خواهند می توانند کرد خواه مجذور ثانی شکل تفاضل مجذور داشته باشد بهم می توانند رسانید * مثلاً در مثال مذکور هرگاه ر + س دو عدد بیکه تعبیر کند چنانکه س را = ۶ فرض کردم و ر را = ۲ پس (س^۲ − ر^۲)^۲ = ۱۰۲۴ + (۲ ر س)^۲ = ۵۷۶ ⁖ (س^۲ + ر^۲)^۲ = ۱۶۰۰ پس بطریق اربعهٔ متناسبه ۱۶۰۰ | ۱۰۰ ــ ۵۷۶ حاصل ضرب وسطین را بر طرف معلوم قسمت کردم خارج ۳۶ بر آمد و آن یک حصه از صد و مجذور است و همچنین حصهٔ دوم ۶۴ مجذور است ⁂ مثال دوم می خواهم که عدد معلوم را مثل ۱۳ که مجموع دو مجذور اعداد معلوم است مثل ۹ و ۴ بدو حصه دیگر قسمت کنم که آن هر دو مجذور باشد پس برای ضلع مجذور اول که حصهٔ اعظم است ر ک − ۳ فرض کردم و برای ضلع مجذور دوم که اصغر است س ک − ۲ فرض نمودم بحیثیتیکه ر اعظم از س است درینصورت (ر ک − ۳)^۲ + (س ک − ۲)^۲ = ر^۲ ک^۲ − ۶ ر ک + ۹ + س^۲ ک^۲ − ۴ س ک + ۴ = (ر^۲ + س^۲) × ک^۲ − (۶ ر + ۴ س) ک + ۱۳ = ۱۳ بلکه بعد اسقاط متداخلین و تبدیل مستثنی (ر^۲ + س^۲) ک^۲ = (۶ ر + ۴ س) ک و بحسب القسمة ک^۲ = (۶ ر + ۴ س) ک / (ر^۲ + س^۲) و بحسب القسمة علی ک خواهد شد ک = (۶ ر + ۴ س) / (ر^۲ + س^۲) پس ر ک − ۳ = (۶ ر^۲ + ۴ ر س) / (ر^۲ + س^۲) − ۳ = (۳ ر^۲ + ۴ ر س − ۳ س^۲) / (ر^۲ + س^۲) = ضلع مجذور اعظم و نیز س ک − ۲ = (۶ ر س + ۴ س^۲) / (ر^۲ + س^۲) − ۲ = (۶ ر س − ۲ ر^۲ + ۲ س^۲) / (ر^۲ + س^۲) = ضلع مجذور دوم پس اگر ر = ۲ و س = ۱ فرض کرده شود درینصورت (۳ ر^۲ + ۴ ر س − ۳ س^۲) / (ر^۲ + س^۲) = ۱۷/۵ = ضلع مجذور اعظم و (۶ ر س − ۲ ر^۲ + ۲ س^۲) / (ر^۲ + س^۲) = ۶/۵ = ضلع مجذور اصغر و مجذور این اعداد حصهای مطلوب است و نیز اگر م^۲ + ب^۲ = عدد معلوم که مقسوم است فرض کرده شود و بطریقیکه مذکور شد استخراج حصهای دیگر نماید مسئلهٔ عام خواهد شد اعنی هر عدد را خواهد مقسوم فرض کند بحیثیتیکه آن عدد مجموع عددین مجذورین باشد *

فائده باید دانست که درین سؤال جذر (مَ² + ۲ کـ) را (۲ مر فرض کرده شده است
چراکه اگر از مربع مثبت واحد ساقط کند تصحیح می پذیرد و اگر بر مربع آن واحد بیفزاید
مساوی ضعف المجذور آخر میشود پس اگر بهمین صفت اعداد دیگر فرض کنند نیز ممکن است
چنانچه اگر ۴ مر فرض کنم عدد دیگر بحسب المطلوب خواهد برآمد ** سؤال چهارم بهم رسانیدن
سه مجذور متساوی التفاضل * جواب مجذور اول واحد فرض کردم و مقدار تفاضل را کـ
پس کـ + ۱ = مجذور ثانی و ۲ کـ + ۱ = مجذور ثالث لهذا) ۲ کـ + ۱ را = مَ² فرض
نمودم پس کـ + ۱ = مَ² − کـ = مجذور شد و هرگاه جذر آنرا مر − ۲ فرض کردم پس مَ²
− ۴ مر + ۴ = مَ² − کـ بلکه کـ + ۴ = ۴ مر بلکه کـ = ۴ مر − ۴ بلکه ۲ کـ + ۱ = ۸ مر − ۷ =
مَ² بلکه مر = ۴ + [√(۱۶ − ۷)] = ۴ + ۳ = ۷ پس کـ = ۲۴ و ازین سبب مجذور اول ۱
و مجذور ثانی ۲۵ و مجذور ثالث ۴۹ ** سؤال پنجم بهم رسانیدن مقدار کـ و ـے بنوعیکه
کـ + ـے و ـے² + کـ و کـ² + ـے هر سه مجذور باشند * جواب فرض کردم کـ =
ر/ز و ـے = (ر² − ر)/ز² تا مجموع هر دو مجذور باشد بحسب السؤال درینصورت کـ² + ـے
= ر²/ز² + (ر² − ر)/ز² = مجذور و ـے² + کـ = (ر⁴ − ۲ ر³ + ر²)/ز⁴ + ر/ز = مجذور بحسب السؤال
وضلع مجذور اول ر/ز فرض کردم پس ۲ ر²/ز² = ر²/ز² + (ر² − ر)/ز² بلکه بعد اسقاط
متداخلین ۲ ر²/ز² = (ر² − ر)/ز² و بحسب الترفیع کسر اول ر²/ز² = ر² − ر بلکه ۲ = ر² − ر بلکه
ر² = ر + ۲ و هرگاه جذر مجذور ثانی را (ر² − ر)/ز² فرض نمایم درینصورت (ر⁴ − ۲ ر³ + ر²)/ز⁴ + ر/ز =
(ر⁴ − ۲ ر³ + ر²)/ز⁴ + ر/ز = (ر⁴ − ۲ ر³ + ر³ ز³)/ز⁴ و بلکه ر⁴ + ۲ ر³ + ز³ = ر⁴ − ۲ ر³ −
ز³ + ز³ و بحسب اسقاط متداخلین و نقل مستثنی ۴ ر³ = ز³ و بحسب القسمة علی ز میشود
۴ ر² = ز² وچون ر² = ر + ۲ بود درینصورت ز² = ۴ ر − ۲ ... ر = ۴ − ۲ = ۲ پس ر² = ۴
بلکه ر = ۲ لهذا کـ = ر/ز = ۲/۴ = ۱/۲ و ـے = (ر² − ر)/ز² = (۴ − ۲)/۱۶ = ۲/۱۶ = ۱/۸ هو المطلوب **
سؤال ششم بهم رسانیدن سه اعداد علی نسبت عددی بحیثیتیکه مجموع دو دو از آن مجذور شده

است $\text{ر}^2 - \text{ك}$ فرض کنم دراینصورت $\text{ك}^2 + \text{ی} = \text{ر}^2 - 2\,\text{ر}\,\text{ك} + \text{ك}^2$ بلکه $\text{ی} = \text{ر}^2 - 2\,\text{ر}\,\text{ك}$ بلکه $2\,\text{ر}\,\text{ك} = \text{ر}^2 - \text{ی}$ و بحسب القسمة $\text{ك} = \frac{\text{ر}^2 - \text{ی}}{2\,\text{ر}}$ وهرگاه ضلع مجذور ورا اعنی $\text{ی}^2 + \text{ك}$ را $\text{ی} + \text{س}$ فرض کنم پس $\text{ی}^2 + \frac{\text{ر}^2 - \text{ی}}{2\,\text{ر}} = (\text{ی} + \text{س})^2$ بلکه $\text{ر}^2 - \text{ی} = 4\,\text{ر}\,\text{س}\,\text{ی} + 2\,\text{ر}\,\text{س}^2$ خواهد شد پس ضرورة $\text{ی} = \frac{\text{ر}^2 - 2\,\text{ر}\,\text{س}^2}{4\,\text{ر}\,\text{س} + 1}$ و $\text{ك} = \frac{\text{ر}^2 - \text{ی}}{2\,\text{ر}} = \frac{2\,\text{ر}^2\,\text{س} + \text{س}^2}{4\,\text{ر}\,\text{س} + 1}$

وهرگاه ر و س هر عددی را فرض کنم بشرطیکه ر اعظم از $2\,\text{ر}\,\text{س}$ باشد واز آن اعداد ضلع مجذور اعظم و اصغر بموجب مرقوم اعداد حاصل کنم مطلوب برآید ⁂ مثال پنجم بهم رسانیدن دو عدد بحیثیتیکه مجموع آنها وتفاضل بینهما هر دو مجذور باشد پس هر دو عدد مطلوب را ك و $\text{ك}^2 - \text{ك}$ فرض کردم چون در اینجا مجموع عددین مجذور است پس صرف تفاضل بینهما که مجذور باشد مطلوب خواهد بود واز این سبب تفاضل بینهما که $\text{ك}^2 - 2\,\text{ك}$ است یک مجذور شد وهرگاه ضلع این مجذور را $\text{ك} - \text{ر}$ فرض کنم پس $\text{ك}^2 - 2\,\text{ر}\,\text{ك} + \text{ر}^2 = \text{ك}^2 - 2\,\text{ك}$ خواهد بود بلکه $2\,\text{ر}\,\text{ك} - 2\,\text{ك} = \text{ر}^2$ دراینصورت $\text{ك} = \frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}$ پس $\text{ك}^2 - \text{ك} = \left(\frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}\right)^2 - \frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}$ پس عدد اول $\frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}$ و عدد ثانی $\left(\frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}\right)^2 - \frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}$ مطلوب گردید پس مقدار ر هر عددیکه فرض کنم بشرطیکه اعظم از واحد باشد

واین نحیف میگوید که اگر اعظم از اثنین باشد مطلوب خواهد برآمد چراکه اگر مقدار اثنین بود پس $\frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2} = 2$ خواهد بود و $\left(\frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2}\right)^2 - \frac{\text{ر}^2}{2\,\text{ر} - 2} = 4 - 2 = 2$ خواهد بود پس هر دو عدد متساوین برآمدند وتفاضل بینهما هیچ نماند فافهم ⁂ مثال ششم بهم رسانیدن سه عدد بحیثیتیکه مجموع آنها ومجموع دو دو از آنها همه مجذور باشد پس اول $4\,\text{ك}$ وثانی را $\text{ك}^2 - 4\,\text{ك}$ وثالث را $2\,\text{ك} + 1$ فرض کردم چراکه $4\,\text{ك} + \text{ك}^2 - 4\,\text{ك} = \text{ك}^2$ اعنی مجموع عدد اول وثانی مساوی مربع است ونیز $\text{ك}^2 - 4\,\text{ك} + 2\,\text{ك} + 1$ اعنی مجموع ثانی وثالث $= \text{ك}^2 - 2\,\text{ك} + 1 =$ مجذور ونیز $4\,\text{ك} + \text{ك}^2 - 4\,\text{ك} + 2\,\text{ك} + 1$ اعنی مجموع هر سه اعداد $= \text{ك}^2 +$

ومربع آن ۴ زً + مرً – ۴ مر ز = مرً + ۲ کً بلکه ۴ زً – ۴ مر ز = ۲ کً پس $\frac{کً}{۲}$ + مر ز = ۴ زً – ۴ مر بلکه زً + ۲ مر ز = ۸ زً – ۸ مر بلکه ۱۰ مر ز = ۷ زً بلکه ۱۰ مر = ۷ ز پس مر = ۷ و ز = ۱۰ جواب طریق دیگر عدد اعظم را = ۲ مرً + $\frac{کً}{۲}$ – ۴ مر ک وعدد ثانی = ۲ مرً + $\frac{کً}{۲}$ وعدد ثالث = ۲ مرً + $\frac{کً}{۲}$ + ۴ مر ک فرض نمودیم وهرگاه اول وثانی را جمع نمایم مجذور میشود بدینصورت ۴ مرً + کً – ۴ مر ک وجذر این = ۲ مر – ک وهرگاه ثانی وثالث را جمع نمایم هم مجذور میشود بدینصورت ۴ مرً + کً + ۴ مر ک وجذر این = ۲ مر + ک وهرگاه عدد اول را با عدد ثالث جمع کنم بدینصورت میشود ۴ مرً + کً واین مجذور نیست لهذا این را با مربع دیگر معادل کردم بدینصورت ۴ مرً + کً = طً وبعد از این کً ز = ۹ فرض کردم وغیر آن هم عدد مجذور فرض می توانید شد پس ۴ مرً + ۹ = طً شد عمل مجذور نمودیم یعنی اول عدد ۲ فرض کردیم ومربع آن ۴ وچهار مثل آن گرفته ۱۶ شد پس ۱۶ + ۹ = ۲۵ واین مجذور است لیکن استخراج عدد اول ازین ممکن نیست [illegible] (که ۲) است در حد ترکیب که ۵) است ضرب نمودیم تضعیف نمودیم ۲۰ گردید بعد از آن حاصل را بحد مضاف قسمت کردیم خارج $\frac{۲}{۳}$ شد پس مر = $\frac{۲}{۳}$ و ک = ۳ پس مرً = $\frac{۴}{۹}$ ۴ [illegible] آن $\frac{۸۸}{۹}$ وهرگاه $\frac{کً}{۲}$ را که $\frac{۹}{۲}$ است [illegible] $\frac{۲۰}{۹}$ حاصل جمع شد و مر × ک = ۲ و ۴ مر ک = ۸ (وهرگاه ۸) [illegible] حاصل جمع [illegible] ثانی $\frac{۱}{۱۸}$ [illegible] ماند واین عدد اول و $\frac{۹}{۱۸}$ ۹۴ عدد ثانی و $\frac{۱}{۱۸}$ ۱۴۳ عدد ثالث این هرسه اعداد مطلوب است ۞

سؤال هشتم بهم رسان سه عدد اعداد درسمت متصوره [illegible] عدد اعظم مطلع [illegible] تعریف باشد جواب ۱۲۲۵ و ۴۹ و ۲۵ ۞ سؤال نهم بهم رسان سه عدد [illegible] اگر عدد [illegible] از آنها را آن در عدد دیگر جمع کرده شود [illegible] مجذور بشود جواب [illegible] ۞

سؤال دهم بهم رسان دو عدد در سمت [illegible] شود [illegible] مجذور [illegible] مجذور عدد شود جواب ۵۷۶ و ۱۰۸۰ ۞ سؤال [illegible] بهم رسان چهار عدد [illegible] مجذور معین (۱۰۰) جمع کرده شود حاصل ضرب [illegible] [illegible]

= ۲ سر^4 + ۸ سر^3 + ۹ سر^2 − ۱۲ سر + ۴ = مجذور عددی و هرگاه مقدار جذر آنرا مساوی ۵/۴ سر^2
− سر + ۲ فرض کنم پس ۲ سر^4 + ۸ سر^3 + ۹ سر^2 − ۴ سر + ۴ = (۵/۴ سر^2 − سر + ۲)^2 = ۲۵/۱۶ سر^4 − ۵/۲ سر^3 +
۹ سر^2 − ۴ سر + ۴ و بحسب اسقاط متداخلین ۲ سر^4 + ۸ سر^3 = ۲۵/۱۶ سر^4 − ۵/۲ سر^3 و بحسب القسمة
علی سر^3 میشود ۲ سر + ۸ = ۲۵/۱۶ سر − ۵/۲ بلکه ۷/۱۶ سر = − ۲۱/۲ پس سر = − ۲۴ پس ضرورةً ر = −
۲۲ و ک/ط = (سر^2 − ۱)/(۲ سر) = ۵۷۵/−۴۸ و ی/ط = (ر^2 − ۱)/(۲ ر) = ۴۸۳/−۴۴ پس ک = − ۵۷۵ ط/۴۸ و
ی = − ۴۸۳ ط/۴۴ و بدین سبب برای جواب اعداد صحیح فرض می‌کنم ط = ۵۲۸
و ازین سبب ک = ۶۳۲۵ و ی = ۵۷۹۶ و باید دانست که در اینجا چند سؤال دیگر است
که صاحب کتاب صرف جواب آن نوشته است و بیان طریق عمل و استخراج آنرا فروگذاشته
هرچند اکثری ازان بادنی تامل منحل میشوند و بعضی ازان تامل طلب است لهذا بالتفصیل
طریق استخراج بعضی ازان نوشته میشود و باقی را برای امتحان طبع ناظرین و متعلمین تبعاً
لصاحب الکتاب فروگذاشته ام تا هرکس را که توفیق دهد استخراج نماید ❁ سؤال اول
بهم رسان عدد ک بحیثیتیکه ک + ۱ و ک − ۱ هر دو مجذور اعداد شوند ❁ جواب ک
+ ۱ = مر^2 فرض کردم پس ک − ۱ = مر^2 − ۲ = مجذور و هرگاه ضلع آنرا (۲ − مر) فرض
نمودم پس ۴ − ۴ مر + مر^2 = مر^2 − ۲ بلکه ۶ = ۴ مر پس مر = ۱½ و ۲ − مر = ½ و ک = ۱¼
= ۵/۴ ❁ سؤال دوم بهم رسان مقدار ک بحیثیتیکه ک + ۱۲۸ و ک + ۱۹۲ هر دو مجذور
باشد ❁ جواب ک + ۱۹۲ = مر^2 فرض کردم پس ک + ۱۲۸ = مر^2 − ۶۴ شد و هرگاه جذر
آنرا (۳۲ − مر) فرض کردم درینصورت ۱۰۲۴ − ۶۴ مر + مر^2 = مر^2 − ۶۴ بلکه ۱۰۸۸ =
۶۴ مر بلکه مر = ۱۷ پس ک = مر^2 − ۱۹۲ = ۲۸۹ − ۱۹۲ = ۹۷ ❁ سؤال سوم بهم رسان
مقدار ک بحیثیتیکه ک^2 + ک و ک^2 − ک هر دو مجذور باشد ❁ جواب ک^2 − ک = مر^2
فرض کردم پس ک^2 + ک = مر^2 + ۲ ک و هرگاه ضلع آنرا (۷ مر) فرض نمودم پس ۴۹ مر^2
= مر^2 + ۲ ک بلکه ۴۸ مر^2 = ۲ ک تا که ۲۴ مر^2 = ک گردید درینصورت ۵۷۶ مر^4 − ۲۴ مر^2
= ک^2 − ک = مر^2 شد بلکه ۵۷۶ مر^4 = ۲۵ مر^2 بلکه بحسب تجذیر ۲۴ مر^2 = ۵ مر بلکه مر^2 =
۵/۲۴ مر بلکه مر = ۵/۲۴ و درینصورت ک = ۲۴ مر^2 = ۲۵/۲۴ ❊

تعیین مجموع معین حاصل می گردد و باید دانست که سلسلهٔ متوالیه بر دو نوع است یکی علی نسبت عددی و دوم علی نسبت هندسی و اعداد تزاید در هر سلسله معتاد واقع می شود که بعضی از آن علی نسبت عددی خواه نسبت هندسی باشد در بادی النظر جلد مفهوم میشود و بعضی بعد تأمل و تفکر بسیار از معلوم کردن تفاضلات مابین اعداد سلسله و از تفاضل تفاضلات و همچنین بعد از آن دریافت میشود چون سلسلهٔ اعداد علی نظم طبیعی غیر متناهی است لهذا این همه سلسله ها غیر متناهی اند و از این جهت برای جمع کردن سلسله های غیر متناهی قاعدهٔ عام نمیتواند شد مگر برای هر یک سلسله عموماً از ملاحظهٔ شرطهای سلسله بعضی از آن قاعده بآسانی مفهوم می تواند شد و از برای آن نوع خاص سلسله مقداری معین کرده می شود و در اکثر سلسله بلحاظ غیر متناهی مقدار تقریبی بهم رسانیده میشود و بعد از آن حدهٔ معینه که جمع مطلوب باشد بزیادت یا نقصان مقدار تا حاصل معلوم جمع سلسله حاصل میکند و آن مقدار معین را بلفظ مقدار یا بلفظ مجموع غیر معین تعبیر میکند چنانکه [illegible] هندسی متناهی نزولی قاعدهٔ مشهور است که مقدار نسبت را [illegible] فرض کند و حد اعظم [illegible] پس مجموع سلسله (ول − هر) ÷ (ر − ۱) خواهد بود [illegible] است [illegible] نهایت اصغر است [illegible] (ر − ۱) خواهد بود و این دال است [illegible] مجموع سلسلهٔ [illegible] مساوی تا خارج قسمت مذکور خواهد بود چرا که عددی [illegible] مجموع مقدار آن سلسلهٔ متوالیه نمی تواند شد لهذا بهر صورت [illegible] حاصل مجموع [illegible] ول − ر [illegible] بموجب بیان ذیل اندازه می توان کرد [illegible] سلسلهٔ [illegible] باشد پس مفهوم می تواند شد که این سلسله هندسی است یا عددی [illegible] مقدار تفاضلات اعداد سلسلهٔ مذکوره [illegible] هندسی خواهد بود [illegible] خواه سلسله معین باشد یا غیر معین [illegible] چرا که در سلسلهٔ نسبت عددی [illegible]

تف

جواب عدد اول ک فرض کردم وقدر تفاصل را ب پس هرسه اعداد ک و ک + ب و ک + ۲ ب شد درینصورت ۲ ک + ب = مجذور و ۲ ک + ۲ ب = مجذور و ۲ ک + ۳ ب = مجذور بحسب السؤال واز بجا ظاهر شدکه هرسه مجذور هم علی نسبت عددی اند وقدر تفاصل نیز ما بینهما مساوی است ونیز قدر تفاصل اقل از مجذور را صغر است لهذا مجذور اول را م^۲ ومجذور ثانی را = (م + س)^۲ ومجذور ثالث = (م + ر)^۲ فرض کردم درینصورت ۲ ک + ب = م^۲ و ۲ ک + ۲ ب = م^۲ + ب = م^۲ + ۲ م س + س^۲ بلکه ب = ۲ م س + س^۲ ونیز ۲ ک + ۳ ب = م^۲ + ۲ ب = م^۲ + ۲ م ر + ر^۲ بلکه ب = م ر + ر^۲/۲ = ۲ م س + س^۲ وهرگاه ر = ۲ س − ۲ فرض کرده مقدار ر را تبدیل کردم پس ۲ م س + س^۲ = ۲ م س − ۲ م + ۲ س^۲ − ۴ س + ۲ گردید وبعد اسقاط متداخلین وتبدیل مستثنی ۲ م = س^۲ − ۴ س + ۲ بلکه م = (س^۲ − ۴ س + ۲)/۲ وچون ضرور است که م^۲ اعظم از ۲ م س + س^۲ باشد لهذا مقدار س را ده فرض کردم چراکه در اعداد اقل از آن ممکن نبود که م^۲ اعظم از ۲ م س + س^۲ بود پس م = ۳۱ و ب = ۷۲۰ گردید درینصورت ۲ ک + ب = م^۲ = ۹۶۱ بلکه ک = (م^۲ − ب)/۲ = (۹۶۱ − ۷۲۰)/۲ = ۲۴۱/۲ = ۱۲۰ ½ وآن عدد اول است پس عدد ثانی ک + ب = ۸۴۰ ½ وعدد ثالث ک + ۲ ب = ۱۵۶۰ ½ وهو المطلوب ودرینصورت م^۲ = ۹۶۱ و (م + س)^۲ = ۱۶۸۱ و (م + ر)^۲ = ۲۴۰۱ واگر س = ۱۲ فرض کنم پس م = ۴۹ و م + س = ۶۱ و م + ر = ۷۱ پس ک = ۵۴۰ ½ و ک + ب = ۱۸۶۰ ½ و ک + ۲ ب = ۳۱۸۰ ½ وهمچنین اگر س = ۱۴ فرض کنم پس م = ۷۱ و م + س = ۸۵ و م + ر = ۹۷ وهکذا هر عددی برای س فرض کنند بشرطیکه زوج باشد مطلوب حاصل خواهد شد وچون صاحب انگریزی درجواب سؤال هذا صرف هرسه اعداد اول را نوشته است که بر بنای سبب فرض س = ۱۰ حاصل شده لهذا معلوم نیست که او هم بهمین طریق استخراج نموده یا بطریق دیگر جواب بطریق دیگر عدد اول م^۲/۲ − ک ومقدار تفاصل ۲ ک وعدد دوم م^۲/۲ + ک وعدد سوم م^۲/۲ + ۳ ک فرض کردم پس مجموع اولین م^۲ ومجموع ثانی وثالث م^۲ + ۴ ک ومجموع ثالث واول م^۲ + ۲ ک پس جذر مرضی مجموع ثانی وثالث م + ر ومربع آن م^۲ + ر^۲ + ۲ م × ر = م^۲ + ۴ ک بلکه ر^۲ + ۲ م ر = ۴ ک بلکه ر^۲/۲ + م ر = ۲ ک وجذر مجموع ثالث واول ۲ ر − م

فائده هرگاه عدد اول نظمهای ثلاثه واقع شود یعنی تفاضلاتیکه بگیرند اعداد اول در نظم تفاضلات متزائده واقع شوند دراینصورت آن سلسله عددی خواهد بود پس عدد منزل مضلعات عدد نسبت برای عمل مناسب خواهد بود *

مسئلهٔ دوم دربهم رسانیدن مقدار اول نظم تفاضل سلسلهٔ م ب ج د وغیره که معلوم اند *

قاعده عدد حدّ نظم متوالیات را ه فرض کنند پس م − ه ب + ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ ج − ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ د + ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ × $\frac{ه-۳}{۴}$ ی وغیره هرگاه ه عدد زوج باشد و) − م + ه ب − ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ ج + ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ د − ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ × $\frac{ه-۳}{۴}$ ی وغیره هرگاه ه عدد فرد باشد مثلاً بهم رسانیدن مقدار اول تفاضل نظم سوم سلسلهٔ عدد ۱ ۵ ۱۵ ۳۵ ۷۰ جواب فرض کرده م ب ج د ی وغیره = ۱ ۵ ۱۵ ۳۵ ۷۰ وغیره بحسب الترتیب و ه = ۳ بحسب سؤال پس − م + ه ب − ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ ج + ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ د = − م + ۳ ب − ۳ ج + د = − ۱ + ۱۵ − ۴۵ + ۳۵ = ۴ = مقدار اول تفاضل نظم سوم سلسلهٔ مذکوره وغیر مطلوب * مثلاً آنکه بصورت رسم

۱ ۵ ۱۵ ۳۵ ۷۰

۴ ۱۰ ۲۰ ۳۵ تفاضل اول

۶ ۱۰ ۱۵ تفاضل دوم

۴ ۵ تفاضل سوم

بدانکه این سلسلهٔ جمع [illegible] [illegible] [illegible] نظم چهارم سلسلهٔ عدد) ۱ ۸ ۲۷ ۶۴ ۱۲۵ وغیره [illegible] م ب ج د ی وغیره = ۱ ۸ ۲۷ ۶۴ ۱۲۵ و ه = ۴ بحسب سؤال پس م − ه ب + ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ ج − ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ د + ه × $\frac{ه-۱}{۲}$ × $\frac{ه-۲}{۳}$ × $\frac{ه-۳}{۴}$ ی = [illegible]

جواب ۱۲ و ۳۲ و ۸۵ و ۱۹۸ ⁂ سؤال یازدهم بهم رسان دو عدد بحیثیکه تفاضل بینهما مثل تفاضل بین مجذورهما باشد و مجموع مجذورهما و مجذور عددی شود ⁂ جواب $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۷}$ ⁂ سؤال دوازدهم بهم رسان سه عدد در نسبت هندسی بحیثیکه هریکی ازان زیاده کرده شود بر یک عدد معلوم (۱۹) مجذور عددی شود ⁂ جواب ۸۱ و $\frac{۹}{۴}$ و $\frac{۲۵}{۱۲۹۹}$ ⁂ سؤال سیزدهم بهم رسان دو عدد بحیثیکه اگر حاصل ضرب آنها جمع کرده شود با مجموع مجذورهای آنها مجذور عددی شود ⁂ جواب ۵ و ۳ ، ۸ و ۷ ، ۱۶ و ۵ وغیره ⁂

سؤال چهاردهم قسمت کن یک عدد معین (۱۰) در کدام چهار حصه بحیثیکه مجموع هریکی سه ازان مجذور عددی شود ⁂ جواب ۱ و ۶ و $\frac{۱۸۶}{۲۸۹}$ و $\frac{۹۸۱}{۲۸۹}$ ⁂ سؤال پانزدهم بهم رسان دو عدد بحیثیکه مجموع آنها اگر زیاده کرده شود بر تفاضل بینهما خواه بر تفاضل بین مجذورهما یا کم کرده شود آن مجموع خواه باقیها مجذورها شود ⁂ جواب $\frac{۲۱}{۵۰}$ و $\frac{۱}{۵۰}$ ⁂ سؤال شانزدهم بهم رسان مجذور و سه اعداد بحیثیکه مجموع آنها مجذور عددی باشد ⁂ جواب ۹ و ۱۶ و ۱۴۴ ⁂ سؤال هفدهم بهم رسان سه اعداد بحیثیکه تفاضل هر دو ازانها مجذور اعداد باشد ⁂ جواب ۴۸۵۸۰۹ و ۳۴۲۲۲۵ و ۲۳۴۰۹ ⁂ سؤال هجدهم سه حصه کن کعب بعضی عدد معلوم (۸) در سه کعب دیگر اعداد ⁂ جواب $\frac{۶۴}{۲۷}$ و $\frac{۱۲۵}{۲۷}$ و ۱ ⁂ سؤال نوزدهم دو کعب اعداد (۸ و ۱) معلوم و معین است بهم رسان دو کعب دیگر اعداد که تفاضل بینهما مساوی مجموع کعبهای معلوم باشد ⁂ جواب $\frac{۸۰۰۰}{۳۴۳}$ و $\frac{۴۹۱۳}{۳۴۳}$ ⁂ سؤال بیستم بهم رسان سه کعب اعداد بحیثیکه اگر از هریکی ازانها یک معلوم (۱) مفروض شود مجموع باقی مجذور یک عدد شود ⁂ جواب $\frac{۳۰۱۳}{۳۴۳}$ و $\frac{۳۱۶۰۲}{۳۴۷۶۰}$ و ۸ ⁂

مطلب پانزدهم در (انتریلیشن وسمیشن)

امی جمع مفاد بر سلسلهٔ متوالیه بدانکه این فن سلسلهٔ متوالیه موقوف علیه اکثر حسابها و از انواع مشکل ترین و دقیق ترین علم حساب است و جمع سلسلهٔ متوالیه در بعضی حسابها مشکل بلکه غیرممکن میشود لیکن بسبب تعین مفاد بر تفاضلات متعین که در سلسلهٔ متوالیهٔ معینه باشد ازان تعیین مفاد بر سلسلهٔ متوالیهٔ غیرمتعین سهل میشود و همچنین تعیین مجموع غیرمتعین هم از

$$+\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}\times\frac{\text{ق}-2}{3}\times\frac{\text{ق}-3}{4}\,\text{ء}'''+\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}\times\frac{\text{ق}-2}{3}\times\frac{\text{ق}-3}{4}\times\frac{\text{ق}-4}{5}\,\text{ء}''''$$

وغیره = مجموع سلسله قاعدهٔ ق مطلوبه مثال یهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا) $\overline{1}$ $\overline{2}$ $\overline{3}$ $\overline{4}$ که متوالی علی نظم طبیعی است قاعدهٔ ق جواب چون عدد اول تفاصل واحد خواه صفر است لهذا) م = ۱ و ءَ = ۱ و ءً = صفر فرض کردم پس بموجب قاعدهٔ مذکور ق م + ق ×

$$\frac{\text{ق}-1}{2}\,\text{ء}'=\text{ق}+\frac{\text{ق}^2-\text{ق}}{2}=\frac{\text{ق}^2+\text{ق}}{2}$$

= مجموع سلسله قاعدهٔ ق مثال دوم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا) $\overline{1}$ $\overline{4}$ $\overline{9}$ $\overline{16}$ $\overline{25}$ وغیره که مربعات متوالیه اند قاعدهٔ ق جواب چون عدد اول تفاصلات منتظمه بدینصورت است

$\overline{25}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$		
۰	۰			

لهذا) ۳ = ءَ و ۲ = ءً فرض کردم و م = ۱ پس بموجب قاعدهٔ مذکور ق م + ق × $\frac{\text{ق}-1}{2}$ ءَ

$$+\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}\times\frac{\text{ق}-2}{3}\,\text{ء}''=\text{ق}+3\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}+2\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}\times\frac{\text{ق}-2}{3}=\frac{2\text{ق}^3+3\text{ق}^2+\text{ق}}{6}$$

$$=\text{ق}\times\frac{(1+\text{ق})\times(1+2\text{ق})}{6}$$

= مجموع مطلوب مثال سوم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا) $\overline{1}$ $\overline{8}$ $\overline{27}$ $\overline{64}$ $\overline{125}$ وغیره قاعدهٔ ق جواب چون عدد اول طم تفاصلات بدینصورت است

$\overline{125}$	$\overline{64}$	$\overline{27}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$
$\overline{61}$	$\overline{37}$	$\overline{19}$	$\overline{7}$	
$\overline{24}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$		
$\overline{6}$	$\overline{6}$			
۰				

لهذا) ءَ = ۷ (ءً = ۱۲ (ءٌ = ۶ (م = ۱ فرض کردم پس ق م + ق × $\frac{\text{ق}-1}{2}$ ءَ + ق × $\frac{\text{ق}-1}{2}$ ×

$$\frac{\text{ق}-2}{3}\,\text{ء}''+\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}\times\frac{\text{ق}-2}{3}\times\frac{\text{ق}-3}{4}\,\text{ء}'''=\text{ق}+7\text{ق}\times\frac{\text{ق}-1}{2}+12\text{ق}\times\ldots$$

باید دانست که از ل مراد مقدار معین است و آنرا اگر بحروف دیگر هم تعبیر نمایند میتواند شد چنانکه جائی ج تعبیر میکنند و جائی عدد منزل مراد میشود و غیر آن و صاحب کتاب گوید که از خوبی این فن بسیار خوشنود م بسبب معلوم کردن یک مقدار معین که بدل میشود با مقدار نتریسی سلسلهٔ غیرمتناهی کسور اعشاریه چنانکه $\frac{٢}{٣}$ که معین است $= \frac{٦٦٦٦}{١٠٠٠٠}$ وغیره $= \frac{٦}{١٠} + \frac{٦}{١٠٠} + \frac{٦}{١٠٠٠} + \frac{٦}{١٠٠٠٠}$ وغیره که مجموع غیرمتناهی است لیکن سلسلهٔ هندسی تحقیقی و درست است ابتدا از $\frac{٦}{١٠}$ و غیر آن مقدار معین از ده تا لکهه و عدد صورت کسر و مخرج معین است و عدد آن غیرمتناهی و مع هذا مساوی $\frac{٢}{٣}$) است خواه ماخوذ و معروض عدد دیگر باشد عموما *

مسئلهٔ اول در بهم رسانیدن مقدار اقل تفاصل منتظم در بعضی سلسلهٔ معلوم *

قاعده اول مقدار تفاضل در ان سلسله حاصل کند و آنرا تفاصل اول نام نهند و بعد از ان در ان تفاصل هم که متوالی خواهد بود تفاصل حاصل کنند و این تفاصل از مقدار تفاصل اول اقل خواهد بود زیرا که تفاصل التفاصل است و بعد از ان تفاصل بین تفاصلات حاصل کنند و همچنین تا هر جا که ممکن باشد و تفاصل هر مراتب را نظم اول و دوم وغیره نام نهند * مثلا تفاصل قلیل منتظم سلسلهٔ هذا بهم رسانم ١ و ٤ و ٩ و ١٦ و ٢٥ و ٣٦ وغیره پس نوشتم بدینصورت

١ ٤ ٩ ١٦ ٢٥ ٣٦ وغیره

٣ ٥ ٧ ٩ ١١ تفاصل نظم اول

٢ ٢ ٢ ٢ تفاصل نظم دوم

٠ ٠ ٠ تفاصل نظم سوم

درینصورت اقل التفاصل منتظم دو با صفر است * مثال دیگر بهم رسان تفاصل منتظم در سلسلهٔ هذا) ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ ٢١٦ وغیره * جواب بدینصـــــــــــورت

١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ ٢١٦ وغیره

٧ ١٩ ٣٧ ٦١ ٩١ تفاصل نظم اول

١٢ ١٨ ٢٤ ٣٠ تفاصل نظم دوم

٦ ٦ ٦ تفاصل نظم سوم

٠ ٠ تفاصل نظم چهارم

= ۲۴۳۷۵۲۳/۱۰۰۰۰۰۰۰ ۸ = عدد (لگارثم) ۱۱ بدانستهٔ این قاعده موقوف است بردانستن (لگارثم) وبیان آن بیاید انشاء الله تعالی وموقوف است بردانستن (لگارثم) جمیع اعداد وآنرا بعضی از صاحبان انگلش درکتاب علحده استخراج کرده نوشته اند لیکن هنوز بنظر فقیر نرسیده لهذا کیفیت این قاعده مفصل تفهم ننامده •

مسئلهٔ ششم اگر اعدادی که (لگارثم) آن متساوی التفاضل باشد معلوم بود وجملهٔ آن عددی معلوم نباشد وخواهد که بوسیلهٔ (لگارثم) آن اعداد را بدآنند طریقش این است که اعداد متوالیه را م و ب و ج و د و ه فرض کنند وبعدازان نظر کنند که دران اعداد متوالیه چند اعداد معلوم اند پس بعدد اعداد معلوم ازین نقشهٔ ذیل ارقام حاصل ساخته عدد مجهول را حاصـــــــــــــل سازند

اول م − ب = ۰

دوم م − ۲ب + ج = ۰

سوم م − ۳ب + ۳ج − د = ۰

چهارم م − ۴ب + ۶ج − ۴د + ه = ۰

پنجم م − ۵ب + ۱۰ج − ۱۰د + ۵ه − و = ۰

ششم م − ۶ب + ۱۵ج − ۲۰د + ۱۵ه − ۶و + ز = ۰

عام م − و ب + و (و − ۱)/۲ ج − و (و − ۱)/۲ . (و − ۲)/۳ ، وغیره

مثال اعداد (لگارثم) معلوم است

(لوگری تهم)	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۴	۱۰۵
اعداد (لوگری تهم)	۲ ۴۳۲۱۳/۱۰۰۰۰۰۰۰	۲ ۸۶۰۰۲/۱۰۰۰۰۰۰۰	۲ ۱۷۰۳۳۳/۱۰۰۰۰۰۰۰	۲ ۲۱۱۸۹۳/۱۰۰۰۰۰۰۰

اگر خواهیم که عدد (لگارثم) ۱۰۳ بدانیم چون عدد اعداد معلوم چهار است ببایدار نقشه معادلهٔ چهارم را گرفتیم درینصورت م − ۴ب + ۶ج − ۴د + ه = ۰ چون عدد اول م وعدد دوم ب وعدد سوم ج وعدد چهارم د وعدد پنجم ه فرض کردیم وعدد سوم یعنی ج مجهول

+ ـــے = ۱ − ۳۲ + ۹۶۲ − ۲۵۹ + ۱۲۶ = ۰ وازین معلوم شد که مقدار اول نظم چهارم صفر است *

مسئلهٔ سوم دربهم رسایدن مقدار عدد اخیر سلسلهٔ منتظم بهرعددی که خواهند *

قاعده اعداد سلسله را حروف م و ب و ء و ے وغیره فرض کنند و عدهٔ اخیر راکه عدد و مطلوب است ح فرض نمایند و اعداد اول نظمهای تفاصل را ء' ء'' ء''' وهکذا پس

$$\text{م} + \frac{\text{ح}-1}{1}\,\text{ء}' + \frac{\text{ح}-1}{1}\times\frac{\text{ح}-2}{2}\,\text{ء}'' + \frac{\text{ح}-1}{1}\times\frac{\text{ح}-2}{2}\times\frac{\text{ح}-3}{3}\,\text{ء}''' + \frac{\text{ح}-1}{1}\times\frac{\text{ح}-2}{2}\times\frac{\text{ح}-3}{3}\times\frac{\text{ح}-4}{4}\,\text{ء}''''$$

وغیره = عدد عدهٔ ح که مطلوب است * مثال بهم رسان عدد دوازدهم سلسلهٔ هذا) ۲ ۶ ۱۲ ۲۰ ۳۰ وغیره که مضروبات متوالیه اند * جواب اول اعداد نظم تفاضل بموجب مسئلهٔ اول براوردم بدینصورت ۲ ۶ ۱۲ ۲۰ ۳۰ وغیره

۴ ۶ ۸ ۱۰

۲ ۲ ۲

۰ ۰

چون عدد اول نظمهای تفاصل ۴ و ۲ است لهذا ۴ = ء' و ۲ = ء'' و ح = ۱۲ فرض کردم پس بموجب قاعدهٔ مذکور

$$\text{م} + \frac{\text{ح}-1}{1}\,\text{ء}' + \frac{\text{ح}-1}{1}\times\frac{\text{ح}-2}{2}\,\text{ء}'' = 2 + 11\,\text{ء}' + 55\,\text{ء}'' = 2 + 44 + 110 = 156$$

= عدد دوازدهم که مطلوب است * مثال دوم بهم رسان عدد بیستم سلسلهٔ هذا) ۱ ۳ ۶ ۱۰ ۱۵ ۲۱ وغیره که سلسلهٔ جمع اعداد متوالیه است * جواب چون اعداد اول نظمهای تفاصل ۲ و ۱) است لهذا ۲ = ء' و ۱ = ء'' و ح = ۲۰ فرض کردم پس بموجب قاعدهٔ مذکور

$$\text{م} + \frac{\text{ح}-1}{1}\,\text{ء}' + \frac{\text{ح}-1}{1}\times\frac{\text{ح}-2}{2}\,\text{ء}'' = 1 + 19\,\text{ء}' + 171\,\text{ء}'' = 1 + 38 + 171 = 210$$

= مطلوب *

مسئلهٔ چهارم دربهم رسایدن مجموع سلسله یعنی جمع اعداد متوالیهٔ هرسلسله که باشد بهرعدهٔ که خواهند *

قاعده اعداد اول نظمهای تفاصل را ء' و ء'' و ء''' و ء'''' وغیره بترتیب فرض کنند و عدهٔ را ح و عدد اول سلسله را م پس

$$\text{ح}\,\text{م} + \text{ح}\times\frac{\text{ح}-1}{2}\,\text{ء}' + \text{ح}\times\frac{\text{ح}-1}{2}\times\frac{\text{ح}-2}{3}\,\text{ء}''$$

+ (م + ۳ ء) + (م + ۴ ء) وغیره = { (۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ وغیره) × م ، (۰ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ وغیره) × ء } = س

ونیز ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ وغیره = ن ونیز عدد منزل ن است پس (۰ + ۱ + ۲ + ۳ + ۴

وغیره = ن × (ن − ۱)/۲ ازین سبب س = ن م + ن × (ن − ۱)/۲ ء = ن · (۲م + ن ء − ء)/۲

چنانکه سابق بود ❊ سؤال چهارم بهر بیان مجموع سلسلهٔ هندسیه تا عدد ن) ۱ ، ک ، ک۲ ، ک۳

ک۴ وغیره ❊ جواب مجموع را س فرض کردیم چون ۱ + ک + ک۲ + ک۳ + ک۴ وغیره

تا کⁿ⁻¹ = س ونیز ک + ک۲ + ک۳ + ک۴ وغیره تا کⁿ = س ک) ازین سبب − ۱ +

کⁿ = س ک − س پس س = (کⁿ − ۱)/(ک − ۱) = مجموع مطلوب واگر مقدار ک کسر باشد

پس مجموع سلسلهٔ مذکوره بدینطور متعین می شود ۱ + ک + ک۲ + ک۳ + ک۴ وغیره = س

ونیز ک + ک۲ + ک۳ + ک۴ + ک۵ وغیره تا کⁿ = س ک) ازین سبب − کⁿ = س ک

− س بلکه س − س ک = ۱ − کⁿ پس س = (۱ − کⁿ)/(۱ − ک) ، [illegible] = (۱ − کⁿ)/(۱ − ک) [illegible]

ک = ۱/ر فرض کنم درینصورت س = (۱ − ۱/رⁿ)/(۱ − ۱/ر) = [illegible] = [illegible] ❊

سؤال پنجم بهر بیان مجموع سلسلهٔ هندسیه تا عدد ن) م۲ ، (م − ء)۲ ، (م − ۲ ء)۲ ، (م + ۳ ء)

+ (م + ۴ ء)۲ وغیره ❊ جواب چون

م۲	= م۲
(م − ء)۲	= م۲ − ۲ م ء + ء۲
(م − ۲ ء)۲	= م۲ − [illegible] م ء + ۴ ء۲
(م + ۳ ء)۲	= م۲ + [illegible] م ء + ۹ ء۲
(م + ۴ ء)۲	= م۲ + [illegible] م ء + ۱۶ ء۲

$$\ldots \times \frac{ق-۳}{۴} \times \frac{ق-۲}{۳} \times \frac{ق-۱}{۲} \times ق \ldots = \frac{ق^۳ - ۶ق^۲ + ۱۱ق - ۶}{۲۴} \ldots$$

$$+ ق^۴ + \ldots \frac{ق^۴ - ۶ق^۳ + ۱۱ق^۲ - ۶ق}{۲۴} = \frac{ق^۳ + ۲ق^۲ + ق}{۴} \ast$$

مسئله پنجم اگر سلسلهٔ کسور عدد منزل یک سلسلهٔ معلوم باشد که آن سلسلهٔ کسور متحد التفاضل بود و بخواهند که بوسیلهٔ آن (لگارثم) یعنی کسور عدد منزل بعض اعداد آن سلسله بدانند و طریقش آنست که تفاضل (لگارثم) را ک فرض کنند و عدد مطلوب را ے و تفاضل اعداد را و′ و″ و‴ وغیره و عدد اول را م فرض نمایند پس م + ک و′ + ک × $\frac{ک-۱}{۲}$ و″ + ک × $\frac{ک-۱}{۲}$ × $\frac{ک-۲}{۳}$ و‴ + ک × $\frac{ک-۱}{۲}$ × $\frac{ک-۲}{۳}$ × $\frac{ک-۳}{۴}$ و⁗ وغیره = ے خواهد بود * مثال سلسلهٔ (لگارثم) اعنی عدد کسور منزل معلوم است بدینصورت ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و همچنین اعداد آن معلوم است بدینصورت

$$۸\frac{۲۴۱۸۵۵۳}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \text{ و } ۸\frac{۲۴۹۰۳۳۲}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \text{ و } ۸\frac{۲۵۶۰۹۴۳}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \text{ و } ۸\frac{۲۶۳۰۴۲۴}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$$

و اگر بخواهم که عددی که (لگارثم) آن $۱۱\frac{۴}{۹۰}$ باشد بدانم * جواب چون در اینجا ک = $۱۱\frac{۴}{۹۰} - ۱۰ = ۱\frac{۴}{۹۰} = ۱\frac{۲}{۴۵}$ و تفاضلات اعداد معلومه بدینصورت

$$۸\frac{۲۴۱۸۵۵۳}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \text{ و } ۸\frac{۲۴۹۰۳۳۲}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \text{ و } ۸\frac{۲۵۶۰۹۴۳}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \text{ و } ۸\frac{۲۶۳۰۴۲۴}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$$

$$\frac{۷۱۷۷۹}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \qquad \frac{۷۰۶۱۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \qquad \frac{۶۹۴۸۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$$

$$-\frac{۱۱۶۸}{۱۰۰۰۰۰۰۰} \qquad -\frac{۱۱۳۰}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$$

$$+\frac{۳۸}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$$

پس $\frac{۷۱۷۷۹}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ = و′ و $-\frac{۱۱۶۸}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ = و″ و $+\frac{۳۸}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ = و‴ در اینصورت

ے = م + ک و′ + ک × $\frac{ک-۱}{۲}$ و″ + ک × $\frac{ک-۱}{۲}$ × $\frac{ک-۲}{۳}$ و‴ = م + $\frac{۵}{۳}$ و′ +

$\frac{۵}{۹}$ و″ − $\frac{۵}{۸۱}$ و‴ = $۸\frac{۲۴۱۸۵۵۳}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ + $\frac{۱۱۹۶۳۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ − $\frac{۶۴۹}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$ − $\frac{۲}{۱۰۰۰۰۰۰۰}$

۰+۱+۸+۲۷+۶۴ وغیره $= \dfrac{\text{ه}^3+2\,\text{ه}^2+\text{ه}}{2\times 2}$ پس ضرورةً س $= \text{ه} \times \text{مر}^3 + \dfrac{\text{ه}(\text{ه}-1)}{2\times 1} \times 3\,\text{مر}^2\,\text{ر}$

$+ \dfrac{\text{ه}\times(\text{ه}-1)\times(\text{ه}-2)}{3\times 2\times 1} \times 3\,\text{مر}\,\text{ر}^2 + \dfrac{(\text{ه}^3+2\,\text{ه}^2+\text{ه})}{2\times 2} \times \text{ر}^3 =$ مطلوب ۞ سؤال ششم

بهم رسان جمع سلسلهٔ هذا تا مدهٔ ه (۱+۳+۷+۱۵+۳۱ وغیره) جواب چون این ارقام این سلسله صریحاً مساوی‌اند با ۱+(۱+۲)+(۱+۲+۴)+(۱+۲+۴+۸) وغیره جمع متوالیهٔ سلسلهٔ هندسی هذا است ۱+۲+۴+۸+۱۶ وغیره لهذا مر = ۱ و ر = ۲ فرض کردیم ونوشتیم مر + مر ر + مر ر² + مر ر³ + مر ر⁴ وغیره = ۱+۲+۴+۸+۱۶ وغیره دراین صورت مجموع سلسلهٔ مذکوره بدین صورت شد

$$1 \qquad \frac{\text{مر}\,\text{ر}-\text{مر}}{\text{ر}-1} = \frac{\text{مر}}{\text{ر}-1}\times(\text{ر}-1)$$

$$2 \qquad \frac{\text{مر}\,\text{ر}^2-\text{مر}}{\text{ر}-1} = \frac{\text{مر}}{\text{ر}-1}\times(\text{ر}^2-1)$$

$$3 \qquad \frac{\text{مر}\,\text{ر}^3-\text{مر}}{\text{ر}-1} = \frac{\text{مر}}{\text{ر}-1}\times(\text{ر}^3-1)$$

$$4 \qquad \frac{\text{مر}\,\text{ر}^4-\text{مر}}{\text{ر}-1} = \frac{\text{مر}}{\text{ر}-1}\times(\text{ر}^4-1)$$

واین مقادیر سلسلهٔ جمع است یعنی ۱ و ۳ و ۷ و ۱۵ وغیره پس

$$\text{مر} = \frac{\text{مر}}{\text{ر}-1} \times \left\{ \begin{array}{l} \text{ر} + \text{ر}^2 + \text{ر}^3 + \text{ر}^4 \ \text{وغیره} \\ -(1+1+1+1 \ \text{وغیره}) \end{array} \right.$$

وچون ۱+۱+۱+۱ وغیره = ه وجمع ر + ر² + ر³ وغیره $= (\text{ر}^{\text{ه}}-1)\dfrac{\text{ر}}{\text{ر}-1}$

دراین صورت $\text{س} = \left((\text{ر}^{\text{ه}}-1)\dfrac{\text{ر}}{\text{ر}-1} - \text{ه}\right)\dfrac{\text{مر}}{\text{ر}-1}$ وهو المطلوب ۞

(ملاحظه) ازین قاعده جمع جمیع متوالیات سلسلهٔ هندسی معلوم می‌شود ۞ سؤال هفتم

بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا تا مدهٔ ه $\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\frac{31}{16}$ وغیره جواب این را جمع

زیست ۵ و درینصورت مر ـ ۴ ب ـ ۴ د + ۵ ... = ۰ و نیز بلکه ۲ مر = ۴ ب + ۴ د ، مر ـ ے بلکه مر = (۴ × (ب + د) ـ (مر + ے))/۲ و چون مر = ۴۳۲۱۴/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، و ب = ۸۶۰۰۲/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، و د = ۱۷۰۳۳۳/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، و ے = ۲۱۱۸۵۳/۱۰۰۰۰۰۰ ، پس ۴ × (ب + د) = ۱۰۲۵۳۴۰/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، ـ(مر + ے) = ـ ۲۵۵۱۰۷/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، و مجموع = ۷۷۰۲۳۳/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، و هرگاه این را بر شش قسمت کردم خارج ۱۲۸۳۷۲/۱۰۰۰۰۰۰۰ ، عدد (لگارتم) ۱۰۳ که مطلوب است *

سؤالات

سؤال اول بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا تا عدهٔ ن ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ وغیره * جواب مجموع را س فرض کردم پس ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ وغیره تا ن = س بلکه ن + (ن ـ ۱) + (ن ـ ۲) + (ن ـ ۳) + (ن ـ ۴) وغیره تا واحد = س بحسب مرتبهٔ نزولی وازین سبب (ن + ۱) + (ن + ۱) + (ن + ۱) + (ن + ۱) وغیره = ۲ س بحسب الجمع صعودی ونزولی پس ضرورةً (ن + ۱) × ن = ۲ س پس س = (ن² + ن)/۲ = مجموع مطلوب *

سؤال دوم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا تا عدهٔ ن ۱ ۳ ۵ ۷ ۹ ۱۱ * جواب مجموع را س فرض کردم چون ۱ ۳ ۵ ۷ وغیره تا (۲ ن ـ ۱) = س و نیز (۲ ن ـ ۱) + (۲ ن ـ ۳) + (۲ ن ـ ۵) + (۲ ن ـ ۷) + (۲ ن ـ ۹) وغیره تا واحد = س نزولاً درینصورت ۲ ن + ۲ ن + ۲ ن + ۲ ن + ۲ ن تا عدهٔ ن = ۲ س پس ضرورةً ۲ ن × ن = ۲ س پس س = ن² = مجموع مطلوب * سؤال سوم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا تا عدهٔ ن مر + (مر + د) + (مر + ۲ د) + (مر + ۳ د) + (مر + ۴ د) وغیره * جواب چون مر + (مر + د) + (مر + ۲ د) + (مر + ۳ د) + (مر + ۴ د) وغیره تا (مر + (ن ـ ۱) × د) = س و نیز مر + (ن د ـ د) + مر + (ن د ـ ۲ د) + مر + (ن د ـ ۳ د) + مر + (ن د ـ ۴ د) تا مر نزولاً = س ازین سبب ۲ مر + (ن د ـ د) + ۲ مر + (ن د ـ د) + ۲ مر + (ن د ـ د) + ۲ مر + (ن د ـ د) تا عدهٔ ن = ۲ س پس ضرورةً (۲ مر + ن د ـ د) × ن = ۲ س پس س = (ن × (۲ مر + ن د ـ د))/۲ = مجموع مطلوب وبطریق دیگر چون مر + (مر + د) + (مر + ۲ د)

تا هیچ عدد زیاده ازین نخواهد شد * سؤال دهم بهم رسان مجموع سلسله هذا تا عدد ه) $\frac{1}{1}+$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+$ وغیره * جواب فرض کردم) ر $=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ وغیره تا $\frac{1}{ه}$ پس ر $-\frac{1}{1}=$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ وغیره تا $\frac{1}{ه}$ و ر $-\frac{1}{1}+\frac{1}{1+ه}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ وغیره تا $\frac{1}{1+ه}$
وازین سبب $\frac{1}{1}-\frac{1}{1+ه}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ وغیره تا $\frac{1}{ه}-\frac{1}{1+ه}$ یعنی $\frac{ه}{1+ه}=$
$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ وغیره تا $\frac{1}{ه(1+ه)}$ و درینصورت $\frac{2ه}{1+ه}=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$
$+\frac{1}{10}$ وغیره تا $\frac{2}{ه(1+ه)}$ یعنی $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ وغیره تا $\frac{2}{ه(1+ه)}$ خواهد شد

$ه=\frac{2}{1+ه}$ = مجموع مطلوب *

فائده بدانکه این سلسله و سلسلهٔ دیگر مرکب از آن مسمی بسلسلهٔ (...) مسمی دو طرفین است و این سلسلهٔ عددی است مثـــــال

نظم اول

نظم دوم

نظم سوم

نظم چهارم

نظم پنجم

اعداد این نظم تا [illegible] است

۱	۱	۱	۱	۱	وغیره
۱	۲	۳	۴	۵	وغیره
۱	۳	۶	۱۰	۱۵	وغیره
۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	وغیره
۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	وغیره

واین سلسله ممتاز است باسم [illegible]

ازین سبب س (اعني مجموع) =

$$=\left\{\begin{array}{l}(۱+۱+۱+۱\ \text{وغیره})\times \text{م}^{۲}\\ (۰+۱+۲+۳+۴\ \text{وغیره})\times ۲\,\text{م}\,\text{د}\\ (۰+۱+۴+۹+۱۶\ \text{وغیره})\times \text{د}^{۲}\end{array}\right.$$

چون $۱+۱+۱+۱+۱$ وغیره $=\text{ق}$ و $۰+۱+۲+۳+۴$ وغیره $=\dfrac{\text{ق}\times(\text{ق}-۱)}{۱\times۲}$ و $۰+۱+۴+۹+۱۶$ وغیره $=\dfrac{\text{ق}\times(\text{ق}-۱)\times(۲\text{ق}-۱)}{۱\times۲\times۳}$ درینصورت $\text{س}=\text{ق}\times\text{م}^{۲}+\text{ق}\times(\text{ق}-۱)\times\text{م}\,\text{د}+\dfrac{\text{ق}\times(\text{ق}-۱)\times(۲\text{ق}-۱)}{۱\times۲\times۳}\times\text{د}^{۲}=\text{ق}\,\text{م}^{۲}+\text{ق}\,\text{م}\,\text{د}\times(\text{ق}-۱)+\dfrac{\text{ق}\,\text{د}^{۲}\times(\text{ق}-۱)\times(۲\text{ق}-۱)}{۱\times۲\times۳}=$ مطلوب ۞ سؤال ششم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا تا مدهٔ

$(\text{ق})\ \text{م}^{۳}+(\text{م}+\text{د})^{۳}+(\text{م}+۲\text{د})^{۳}+(\text{م}+۳\text{د})^{۳}+(\text{م}+۴\text{د})^{۳}$ وغیره چون

$$\text{م}^{۳}=\text{م}^{۳}$$
$$(\text{م}+\text{د})^{۳}=\text{م}^{۳}+۳\times\text{م}^{۲}\text{د}+۳\times\text{م}\,\text{د}^{۲}+\text{د}^{۳}$$
$$(\text{م}+۲\text{د})^{۳}=\text{م}^{۳}+۳\times۲\,\text{م}^{۲}\text{د}+۳\times۴\,\text{م}\,\text{د}^{۲}+۸\,\text{د}^{۳}$$
$$(\text{م}+۳\text{د})^{۳}=\text{م}^{۳}+۳\times۳\,\text{م}^{۲}\text{د}+۳\times۹\,\text{م}\,\text{د}^{۲}+۲۷\,\text{د}^{۳}$$
$$(\text{م}+۴\text{د})^{۳}=\text{م}^{۳}+۳\times۴\,\text{م}^{۲}\text{د}+۳\times۱۶\,\text{م}\,\text{د}^{۲}+۶۴\,\text{د}^{۳}$$

ازین سبب $\text{س}=$

$$\left\{\begin{array}{l}(۱+۱+۱+۱+۱\ \text{وغیره})\times\text{م}^{۳}\\ (۰+۱+۲+۳+۴\ \text{وغیره})\times۳\,\text{م}^{۲}\text{د}\\ (۰+۱+۴+۹+۱۶\ \text{وغیره})\times۳\,\text{م}\,\text{د}^{۲}\\ (۰+۱+۸+۲۷+۶۴\ \text{وغیره})\times\text{د}^{۳}\end{array}\right.$$

چون $۱+۱+۱+۱+۱$ وغیره $=\text{ق}$ و همچنین $(۰+۱+۲+۳+۴$ وغیره$)=\dfrac{\text{ق}\times(\text{ق}-۱)}{۱\times۲}$ ونیز $۰+۱+۴+۹+۱۶$ وغیره $=\dfrac{\text{ق}\times(\text{ق}-۱)\times(۲\text{ق}-۱)}{۱\times۲\times۳}$ و همچنین

مجموع مطلوب ۵۵ سؤال سیزدهم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا بعدهٔ غیرمعین $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶}$ وغیره = جواب فرض کردم $ک = \frac{۱}{۲}$ و $ر$ اعنی مجموع $= \frac{ر}{۱ + ک}$ پس اینجا $\frac{ر}{۱ + ک} = ک - ک^{۲} + ک^{۳} - ک^{۴} + ک^{۵}$ وغیره درینصورت $ر = (۱ + ک) \times (ک - ک^{۲} + ک^{۳} - ک^{۴})$ وغیره پس بحسب الضرب بدینصورت شد

$ک - ک^{۲} + ک^{۳} - ک^{۴} + ک^{۵}$ وغیره مضروب

$۱ + ک$ مضروب فیه

$ک - ک^{۲} + ک^{۳} - ک^{۴} + ک^{۵}$ وغیره

$+ ک^{۲} - ک^{۳} + ک^{۴} - ک^{۵} + ک^{۶}$ وغیره

وازین سبب $ر = ک$ پس $ک - ک^{۲} + ک^{۳} - ک^{۴} + ک^{۵} - ک^{۶}$ وغیره $= \frac{ک}{۱ + ک}$ یعنی $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶}$ وغیره $= \frac{۱}{۲} \div (۱ + \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۳}$ = مجموع مطلوب واز همین عمل این قاعده ظاهر می شود که اگر بخواهند عدد معینه فرض کرده جمع این سلسله متعین نمایند درینصورت رقم اخیر از دو حال خالی نیست مثبت خواهد بود یا منفی اگر عدد معینهٔ اخیر مثبت باشد پس مجموع $= \frac{ک + ک^{ن+۱}}{۱ + ک}$ واگر عدد اخیر منفی باشد پس مجموع $= \frac{ک - ک^{ن+۱}}{۱ + ک}$ خواهد بود ۵۶ سؤال چهاردهم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا بعدهٔ غیرمعین $\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۵}{۳۲}$ = جواب فرض کردم $ک = \frac{۱}{۲}$ و $ر$ $= \frac{ر}{(۱ - ک)^{۲}}$ پس $\frac{ر}{(۱ - ک)^{۲}} = ک + ۲ک^{۲} + ۳ک^{۳} + ۴ک^{۴} + ۵ک^{۵}$ وغیره درینصورت $ر = (۱ - ک)^{۲} \times (ک + ۲ک^{۲} + ۳ک^{۳} + ۴ک^{۴} + ۵ک^{۵})$ وغیره پس بحسب الضرب بدینصورت شد

$ک + ۲ک^{۲} + ۳ک^{۳} + ۴ک^{۴} + ۵ک^{۵}$ وغیره مضروب

$۱ - ۲ک + ک^{۲}$ مضروب فیه

$ک + ۲ک^{۲} + ۳ک^{۳}$ حاصل ضرب

متواليات سلسلهٔ هندسي هذا است $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ وغيره لهذا) $\text{م}=1$ و $\text{ر}=2$ پس $\text{م}+\frac{\text{م}}{\text{ر}}+\frac{\text{م}}{\text{ر}^2}+\frac{\text{م}}{\text{ر}^3}+\frac{\text{م}}{\text{ر}^4}+\frac{\text{م}}{\text{ر}^5}$ وغيره $=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ وغيره بحسب الفرض چون مجموع اين سلسله بموجب ذيل مي شود

$$\text{۱}\qquad \frac{\text{م}\times(\text{ر}-1)}{1\times(\text{ر}-1)} = \frac{\text{م}}{\text{ر}-1}\times(\text{ر}-1)$$

$$\text{۲}\qquad \frac{\text{م}\times(\text{ر}-1)}{\text{ر}\times(\text{ر}-1)} = \frac{\text{م}}{\text{ر}-1}\times\left(\text{ر}-\frac{1}{\text{ر}}\right)$$

$$\text{۳}\qquad \frac{\text{م}\times(\text{ر}-1)}{\text{ر}^2\times(\text{ر}-1)} = \frac{\text{م}}{\text{ر}-1}\times\left(\text{ر}-\frac{1}{\text{ر}^2}\right)$$

وغيره

ازين سبب $\text{س}=\frac{\text{م}}{\text{ر}-1}\times\left\{\begin{array}{l}\text{ر}+\text{ر}+\text{ر}+\text{ر}\ \text{وغيره}\\ -\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{\text{ر}}+\frac{1}{\text{ر}^2}+\frac{1}{\text{ر}^3}\right)\ \text{وغيره}\end{array}\right.$

وچون $\text{ر}+\text{ر}+\text{ر}+\text{ر}=\text{ن}\,\text{ر}$ و $\frac{1}{1}+\frac{1}{\text{ر}}+\frac{1}{\text{ر}^2}+\frac{1}{\text{ر}^3}$ وغيره $=\frac{\text{ر}^{\text{ن}}-\text{ن}}{(\text{ر}-1)\times(\text{ر}^{\text{ن}}-1)}$ ازين جهت

$\text{س}=\frac{\text{م}}{\text{ر}-1}\times\left(\text{ن}\,\text{ر}-\frac{\text{ر}^{\text{ن}}-\text{ن}}{(\text{ر}-1)\times(\text{ر}^{\text{ن}}-1)}\right)$ وهو المطلوب ؂ سؤال بهم رسان سلسلهٔ مجموع متوالي هذا بعدهٔ غير معين $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ وغيره كه سلسلهٔ مخرج اعداد مثلثات متوالي است ؂ جواب فرض كردم $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}$ وغيره $=\text{س}$ بلكه $\frac{1}{1\times1}+\frac{1}{3\times1}+\frac{1}{3\times2}+\frac{1}{5\times2}+$ وغيره $=\text{س}$ پس $\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{3\times2}+\frac{1}{4\times3}+\frac{1}{5\times4}$ وغيره $=\frac{\text{س}}{2}$ بلكه $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)$ وغيره $=\frac{\text{س}}{2}$ بلكه

$$\frac{\text{س}}{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ \text{وغيره}\\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\ \text{وغيره}\end{array}\right.$$

وازين سبب $\frac{\text{س}}{2}=\frac{1}{1}$ بلكه $\text{س}=2=$ مجموع مطلوب واين جمع تقريبي است كه

هندسی اعداد غیرمتناهی مساوی سلسلهٔ عددی که علی نظم طبیعی است می شود چنانکه درین امثله اول سلسلهٔ هندسی تضعیف است که مشتمل مضلعات عدد دو است و سلسلهٔ دوم مشتمل مضلعات عدد سه و سوم مشتمل مضلعات عدد ده پس هرگاه عدد رقم دوم که محاذی واحد از سلسلهٔ عددی افتاده تغیر یابد بهمان نسبت تمام سلسلهٔ هندسی تغیر خواهد یافت و نیز ظاهر است که هرگاه بموجب خاصهٔ این سلسله عددین منزلین را جمع نماید مجموع مساوی عدد منزل حاصل الضرب عددین سلسلهٔ هندسی که محاذی عددین منزلین مذکورین است خواهد بود مثل مجموع دو و سه که پنج است مساوی عدد منزل مسطح ۴×۸ که ۳۲ باشد می شود و همچنین اگر یک عدد منزل را از عدد منزل دیگر نقصان کند باقی مساوی عدد منزل خارج قسمت عددین هندسیین که محاذی آن هردو بود خواهد بود * مثلاً چهار را از شش ساقط کند دو می ماند و آن مساوی عدد منزل خارج قسمت $\frac{٦٤}{١٦}$ است و نیز هرگاه عددی را از سلسلهٔ عددی در عددی دیگر [illegible] سلسلهٔ هندسی که محاذی عدد حاصل ضرب [illegible] که محاذی احد المضروبین است خواهد بود [illegible] باشد * مثلاً دو را در سه اگر ضرب کند حاصل [illegible] چهارمی شود و آن مساوی [illegible] اگر [illegible] عدد منزل [illegible] پس عددی که در سلسلهٔ هندسی [illegible] عدد محاذی [illegible] * [illegible] است [illegible] هندسی است مساوی [illegible] یعنی [illegible] [illegible] * [illegible]

به (هبربليك) اعني مختلف مثل $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ وغيره وهمچنين سلسلهٔ اعداد متساوي به (نيوترل) است اعني متساوي مثل $1-1+1-1$ وغيره ﴿ سؤال يازدهم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا بعدهٔ غيرمعين $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}$ وغيره ؛

جواب فرض كردم $\text{ر}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ وغيره الى غيرمعين پس $\text{ر}-\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ وغيره بحسب استثنا ونيز $1=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$ وغيره بحسب تفريق بلكه $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}$ وغيره و $\frac{1}{2}=\frac{2}{1\times4\times3}+\frac{6}{2\times9\times4}+\frac{8}{3\times16\times5}$ بحسب التفريق بلكه $\frac{1}{2}=\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\frac{2}{4\times5\times6}$ وغيره وازين سبب $\frac{1}{2}\div2=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}$ وغيره كه جمع غيرمعين است وچون $\frac{1}{2}\div2=\frac{1}{4}$ ازين سبب $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}$ وغيره $=\frac{1}{4}=$ مجموع مطلوب ﴿ سؤال دوازدهم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا تا عدهٔ ه) $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\frac{1}{4\times5\times6}$ وغيره ؛ جواب فرض كردم $\text{ر}=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$ وغيره تا $\frac{1}{\text{ه}\times(\text{ه}+1)}$ پس $\text{ر}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}$ تا $\frac{1}{\text{ه}\times(\text{ه}+1)}$ بحسب الاستثنا درين صورت $\text{ر}-\frac{1}{2}+\frac{1}{(\text{ه}+1)\times(\text{ه}+2)}=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}$ وغيره تا $\frac{1}{(\text{ه}+1)\times(\text{ه}+2)}$ ازين سبب $\frac{1}{2}-\frac{1}{(\text{ه}+1)\times(\text{ه}+2)}=\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}$ وغيره تا عدهٔ ه بحسب التفريق وهرگاه $\frac{1}{2}-\frac{1}{2(\text{ه}+1)\times(\text{ه}+2)}=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}$ وغيره تا عدهٔ ه بحسب القسمة پس ضرورةً $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}$ وغيره تا عدهٔ $\text{ه}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(\text{ه}+1)\times(\text{ه}+2)}=$

خواهد افتاد و مقدار) ک کسری دیگر غیر اولی خواهد باشد پس ۲ مر ۰ ۱ = ۲۱ ۵ — ۷ مر جمع کنم پس سه ربع عدد منزل مسطح جذر الجذر و فی جذره = $\frac{٤٢٠}{١٠}$ = ٤٢ و آن مقدار اعداد کسر خارج کنم ضرورة بعضی ارقام سلسلهٔ ک که کسر غیر معین ۱۰ را بدو قسم منقسم طبیعی که بعضی زائد و بعضی ناقص باشد خواهد افتاد درین صورت هرگاه ۳۸ باشد ک که کسر غیر معین و قریب با اعداد طبیعی است آن اعداد طبیعی را بهم سلسلهٔ [illegible] تقریبا مبدل بسلسلهٔ هندسی خواهد بود بالترتیب ک موسوم بغیر معین است پس (لگارتم) جمیع اعداد طبیعی درست میتواند شد لیکن چون سلسلهٔ اعداد طبیعی بالذات سلسلهٔ هندسی نیست الا تقریبا پس (لگارتم) آنهم تقریبی خواهد شد که از تحقیقی قدری تفاوت باشد و لهذا درست که تا آن کسر غیر معین متعین نشود درستی (لگارتم) تحقیقی نمی تواند شد پس ضرور است که یک کسر معین تقریبی در سلسلهٔ ١ + (١ + ک)١ + (١ + ک)٢ و غیره درست کرده شود که هرگاه آنرا با اعداد طبیعی وصل کند خواه تفاضل نگیرد (لگارتم) تحقیقی حاصل شود چرا که آن کسر اصغر که ک است قریب کنندهٔ تقریبی است و چون عدد مرکب این که ١ + ک باشد زائد از ک است لهذا ضرور شد که (لگارتم) بعضی اعداد [illegible] که قریب [illegible] اعداد طبیعی است واسطه گردد که از آن بطریق ضرب و قسمت مذکورهٔ عدد منزل را ک حاصل گردد و ازین طریق معلوم می شود که ممکن است پیدا شدن (لگارتم) [illegible] اعداد طبیعی ١ و ٢ و ٣ و غیره بسبب تعین همان کسر صغیرهٔ ک و ساختن سلسلهٔ آن مثل ١ + (١ + ک) و غیره و گویند اعداد طبیعی مقابلهٔ [illegible] آن سلسله و عدد منزل آنها را (لگارتم) [illegible] و گرچه [illegible] ساختن (لگارتم) مثل هریک اعداد و درجهٔ درست حاصل کردن [illegible] وقت طلب بلکه غیر ممکن است لیکن [illegible] اعداد منزل سلسلهٔ هندسی و معرفت و خواص آن [illegible] این نقشه عمل نماید بلاشبهه (لگارتم) [illegible] حقیقیه (لاردنپیر) امیر الامرای [illegible] که بهایت [illegible] آمد [illegible] لارد [illegible] مقام (اتن بر) [illegible]

ازین سبب ک = ر بلکه $ک + ۲ک^{۲} + ۳ک^{۳} + ۴ک^{۴}$ وغیره $= \frac{ک}{(۱ - ک)^{۲}}$ بلکه $\frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۴} + \frac{۳}{۸} + \frac{۴}{۱۶}$ وغیره $= \frac{\frac{۱}{۲}}{(۱ - \frac{۱}{۲})^{۲}} = ۲ =$ مجموع مطلوب ✿ سؤال پانزدهم بهم رسان مجموع سلسلهٔ هذا بعدهٔ غیرمعین $\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۹} + \frac{۹}{۲۷} + \frac{۱۶}{۸۱}$ وغیره ✿ جواب فرض کردم $ک = \frac{۱}{۳}$ و $\frac{ر}{(۱ - ک)^{۳}} = ک + ۴ک^{۲} + ۹ک^{۳} + ۱۶ک^{۴}$ وغیره پس $ر = (۱ - ک)^{۳} \times (ک + ۴ک^{۲} + ۹ک^{۳} + ۱۶ک^{۴}$ وغیره$) = ک + ک^{۲}$) ازین سبب $ک + ک^{۲} = ر$ پس ضرورة $ک + ۴ک^{۲} + ۹ک^{۳} + ۱۶ک^{۴}$ وغیره $= ک \times \frac{(۱ + ک)}{(۱ - ک)^{۳}}$ بلکه $\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۹} + \frac{۹}{۲۷} + \frac{۱۶}{۸۱}$ وغیره

$$= \frac{۱}{۳} \times \frac{(\frac{۱}{۳} + ۱)}{(۱ - \frac{۱}{۳})^{۳}} = ۱ + \frac{۱}{۲} = \text{مجموع مطلوب} *$$

فائده باید دانست که استخراج این طریق اکثر استادان این فن ایجاد کرده اند وابتدای آن از ارشمیدس حکیم است وبعد از ان دیگران بموجب تفصیل ذیل استخراج کردند [اریس] [دالم برت] [نارو] [برحس] [لپاس] [دانیل] [جان برنولي] [جدس برنولي] [مارمت] [دیسکرنیس] [کلموست] [کندریت] [کرنیس] وغیره *

مطلب شانزدهم در [لگارثم] یعنی [لگارثم]

عدد منزل را گویند که ازروی مجموع یا تفاضل عدد بین منزلین مضلعین حاصل میشود وآن مساوی عدد منزل مسطح مضلعین یا خارج قسمت مضلعین مذکورین میباشد وتوضیحش اینست که سلسلهٔ اعداد های نظم طبیعي عدد منزل سلسلهٔ هندسي است که ابتدا از واحد باشد

مثل { ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ وغیره *
۱ ۲ ۴ ۸ ۱۶ وغیره *

خواه { ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ وغیره *
۱ ۳ ۹ ۲۷ ۸۱ وغیره *

خواه { ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ وغیره *
۱ ۱۰ ۱۰۰ ۱۰۰۰ ۱۰۰۰۰ وغیره *

چرا که سلسلهٔ هندسي سلسلهٔ مضلعات عددی است که ابتدا از واحد باشد و سلسلهٔ عددی سلسلهٔ عدد منزل مضلعات است ابتدا از صفر وازاینجا ظاهر مي شود که سلسلهٔ عدد منزل

کردد وبعد از آن از آن وسط وسط دیگر حاصل کند و همچنین باشد پس ۳ مر — ۱ = ۲ ... ۵ — ۷ مر وبعد از آن اگر آن وسط اخیر بحسب مطلوب نباشد از آن وسط وسط ... = $\frac{۴۳۰}{۱۰}$ = ۴۳ و آن مقدار که مطابق عدد مطلوب شود مثال (لگارتم) عدد ٥ بهم رسان * جواب ... ۱۰ را بدو قسم مقسم که درمیان آن واقع شده ۱ و ۱۰ است و (لگارتم) ۱ (صفر است و (لگارتم) ... باشد است لهذا) $\frac{۰+۱}{۲}$ = ۰٫۵) این وسط عددی است و همچنین $\sqrt{۱۰\times۱}$ = $\sqrt{۱۰}$ = ۳٫۱٦۲۲۷۷۷ = وسط هندسی هرگاه (لگارتم) ۳٫۱٦۲۲۷۷۷ هست ۰٫۵ و پس از این وسط دوم مابین (لگارتم) ۱۰ حاصل ساختم بدینصورت $\frac{۰٫۵+۱}{۲}$ = ۰٫۷۵ = وسط عددی و همچنین $\sqrt{۳٫۱٦۲۲۷۷۷\times۱۰}$ = ۵٫٦۲۳۴۱۳۲ = وسط هندسی و هرگاه (لگارتم) ۵٫٦۲۳۴۱۳۲ هست ۰٫۷۵ و پس وسط سوم بدینصورت شد $\frac{۰٫۷۵+۱}{۲}$ = ۰٫۸۷۵ = وسط عددی و همچنین $\sqrt{۵٫٦۲۳۴۱۳۲\times۱۰}$ = ۷٫۴۹۸۹۴۲۱ = وسط هندسی و هرگاه (لگارتم) ۷٫۴۹۸۹۴۲۱ هست ۰٫۸۷۵ و دربنصورت وسط چهارم $\frac{۰٫۸۷۵+۱}{۲}$ = ۰٫۹۳۷۵ = وسط عددی و همچنین $\sqrt{۷٫۴۹۸۹۴۲۱\times۱۰}$ = ۸٫٦٥۹٦۴۳۲ = وسط هندسی و دربنصورت وسط پنجم $\frac{۰٫۹۳۷۵+۱}{۲}$ = ۰٫۹٦۸۷۵ = وسط عددی و همچنین $\sqrt{۸٫٦٥۹٦۴۳۲\times۱۰}$ = ۹٫۳۰۵۷۲۰۴ = وسط هندسی و چون وسط پنجمین زائد از ۹ شد لهذا از وسط چهارمین و پنجمین وسط ششمین حاصل کردم بدینصورت $\frac{۰٫۹٦۸۷۵+۰٫۹۳۷۵}{۲}$ = ۰٫۹۵۳۱۲۵ = وسط عددی و همچنین $\sqrt{۸٫٦٥۹٦۴۳۲\times۹٫۳۰۵۷۲۰۴}$ = ۸٫۹۷٦۸۷۱۳ = وسط هندسی و هرگاه (لگارتم) ۸٫۹۷٦۸۷۱۳ هست ۰٫۹۵۳۱۲۵ و پس اگر همچنین استخراج وسط ... تا وسط بیست و پنجم (لگارتم) ۸٫۹۹۹۹۹۹۸ ... خواهد بود ... و آن (لگارتم) عدد ۹ مذکور کرده خواهد شد چرا که تفاوت ... است فافهم *

وچهارم صدم ۰۰۴ و دوازده صدم ۰۰۱۲ وهکذا وچون معلوم شد که در لغتهٔ (لگارتم) صفر
عدد منزل واحد است وعدد منزل ده واحد وعدد منزل یک صد دو وعدد منزل یک هزار
سه است پس باید دانست که سلسلهٔ نزولی همچنین ۱- عدد منزل یک عشر و ۲- عدد
منزل یک صدم و ۳- عدد منزل یک هزارم وهکذا خواهد بود وبسبب این اعداد متوالیه عدد
منزل بعضی اعداد که درمیان واحد وده واقع اند ضرورة صفر و بعضی کسور خواهد بود
وهمچنین عدد منزل اعداد مابین ده وصد واحد وبعضی کسور خواهد بود وهمچنین بعدازان
وهرگاه این اعداد (لگارتم) صحیح بهم رسند آنرا (اندیکس) اعنی عدد منزل گویند والا
(لگارتم) اعنی کسور عدد منزل واکثر اوقات کسررا برای سهل عمل فروگذاشت می کنند
وباید دانست که هرگاه کدام عدد منزل را برعدد منزل دیگر قسمت کنم بحیثیتیکه خارج قسمت
صحیح نباشد بلکه کسر خواه صحیح مع الکسر شود پس عدد محاذی آن خارج قسمت درسلسلهٔ
هندسی ضرورة ضلع اول مضلع که عدد منزل آن مقسوم باشد بلحاظ عدد منزل مقسوم علیه
خواهد بود وهرگاه آن مضلع بلحاظ مقسوم علیه اصم باشد ضلع اول آن صحیح نخواهد شد بلکه
اقرب التقریبی خواهد برامد درینصورت (لگارتم) اعداد متوالیه علی نظم طبیعی ممکن
نیست که تحقیقا بهم رسد زیرا که اعداد متوالیه علی نظم طبیعی را درسلسلهٔ هندسی معین
دراوردن دشوار وغیر ممکن است مگر بغور وتامل بسیار وبعض حیلهٔ (لگارتم) بعض اعداد
معین تقریبا میتواند برامد وآن حیله این است که مثلا عموما کسری غیرمعین صغیررا) ک
فرض کنم ویک سلسلهٔ هندسی شروع از واحد نمایم بدینصورت ۱ + (۱ + ک) + (۱ + ک)^۲ +
(۱ + ک)^۳ + (۱ + ک)^۴ وغیره ومراد از غیرمعین آن است که هرجا کسر دیگر صغیر اولی خواهد بود

چنانکه درین سلسله $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{100}$ $\frac{3}{1000}$ $\frac{4}{10000}$ وغیره اگر واحدرا که عدد منزل ده است

برچهار قسمت کنم پس خارج قسمت که یک ربع است عدد منزل جذر الجذر ده خواهد بود
وآن یک صحیح وکسر است درینصورت عدد ده درمرتبهٔ مال مال خواهد افتاد ومقدار ک
کسری معین خواهد بود وهمچنین اگر واحدرا بردو قسمت کنم پس خارج که یک نصف است
عدد منزل جذر ده خواهد بود که آن صحیح وکسری است درینصورت ده درمرتبهٔ مال